Cvičná zkoušková písemka.

- vzorové řešení píši pro jednu z mnoha variant řešení bude analogické.
- pro přehlednost píšu do jednoho souboru, vy budete odevzdávat 7 souborů

PŘÍKLAD 1

14 dělníků, dvě skupiny po 7.
3 krumpáče + 4 lopaty v každé skupině
Kolik je možností, jak rozdělit skupiny a ve skupinách nářadí?

Rozdělení do skupin je výběr podmnožiny 7 ze 14.

$\binom{14}{7}$ možností.

V každé skupině výběr nářadí je s předepsaným počtem opakování: 3 krumpáče + 4 lopaty

$P^*(4,3)$

Celkem $\binom{14}{7}\cdot\left(P^*(4,3)\right)^2$

Výpočet:

$$\binom{14}{7}\cdot\left(P^*(4,3)\right)^2 = \frac{\overset{2}{\cancel{14}}\cdot 13\cdot \overset{2}{\cancel{12}}\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot\left(\frac{7!}{4!\cdot 3!}\right)^2 =$$

$$2\cdot 13\cdot 2\cdot 11\cdot 6\cdot\left(\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3\cdot 2}}\right)^2 = \underline{\underline{52\cdot 66\cdot 35^2}} = 4\,204\,200$$

PŘÍKLAD 2

Střední hodnota počtu uzlů na vyvažovacím laně. Pro $k=1,2,3,4,5,6$ je pravděpodobnost k uzlů $p_k = 0{,}2\cdot 0{,}5^{k-1}$, jinak $p_k = 0$.

X.... počet uzlů $\quad X \in [1,6]$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} p_k \cdot k = \sum_{k=1}^{6} 0{,}2 \cdot 0{,}5^{k-1} \cdot k = 0{,}2 \cdot \sum_{k=1}^{6} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot k$$

$$= \frac{1}{5}\left(1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 4 + \frac{1}{16}\cdot 5 + \frac{1}{32}\cdot 6\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1+1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{16}+\frac{3}{16}\right) = \frac{1}{5}\left(2+\frac{3+2}{4}+\frac{8}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(2+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{8+5+2}{5\cdot 4} = \frac{15}{20} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

Střední hodnota počtu uzlů je $\underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

PŘÍKLAD 3

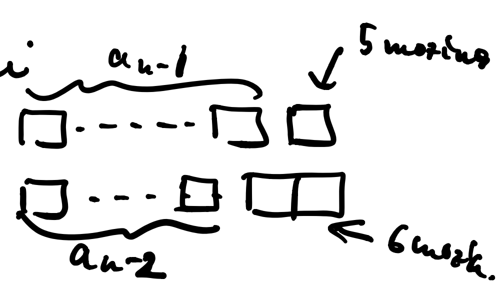
Řada $1\times n$ kachliček složená z kachliček 1×1 a 1×2.

5 barev 1×1

6 barev 1×2

Kolik způsobů na řadu $1\times n$?

Sestavíme rekurentní rovnici



$$a_n = 5\cdot a_{n-1} + 6\cdot a_{n-2}$$

CHar. rov

$$r^2 - 5r - 6 = 0$$

$$(r+1)(r-6) = 0 \qquad r_1 = -1, \; r_2 = 6$$

Tvar obecného řešení $\quad a_n = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot 6^n$

Určíme α_1, α_2 $\quad (a_0 = 1)$

$a_1 = 5$ $\quad \square$ 5 možností

$a_2 = 6 + 5 \cdot 5 = 31$ možností

Dosadím

$$5 = \alpha_1 \cdot (-1) + \alpha_2 \cdot 6$$

$$31 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 36$$

sečtením

$$36 = 42\,\alpha_2$$

$$\frac{36}{42} = \alpha_2$$

$$\underline{\alpha_2 = \frac{6}{7}}$$

$$\alpha_1 = 6\alpha_2 - 5 = 6 \cdot \frac{6}{7} - 5 = \frac{36-35}{7}$$

$$\underline{\alpha_1 = \frac{1}{7}}$$

Obecné řešení

$$\underline{\underline{a_n = \frac{1}{7}(-1)^n + \frac{6}{7} \cdot 6^n}}$$

PŘÍKLAD 4.

Kontrolní schéma UPC

$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$

Chybějící cifra 4013?5440245 ?

Sestavíme kongruenci

$3\cdot 4 + 0\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 3x + 1\cdot 5 + 3\cdot 4 + 1\cdot 4 + 3\cdot 0 + 1\cdot 2 + 3\cdot 4 + 1\cdot 5 \equiv 0 \pmod{10}$

$$3x + 8 \equiv 0 \pmod{10}$$

$$3x \equiv -8 \pmod{10}$$

$$3x \equiv 2 \pmod{10}$$

vidíme

$3\cdot 4 = 12 \equiv 2 \pmod{10}$

proto $x = 4$ (obecně $x \equiv 4 \pmod{10}$)

Hledaná cifra je 4.

PŘÍKLAD 5

Může být graf se st. posl. (6, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4) rovinný?

existence (ale ne rovinnost!) by šla ověřit větou H-H.

Určíme počet hran (pokud existuje)

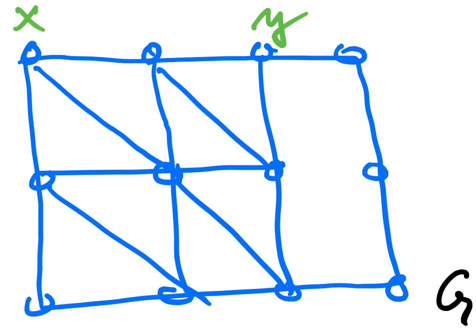
$|E| = \frac{1}{2} \sum \deg = \frac{1}{2}(3\cdot 6 + 4\cdot 5 + 3\cdot 4) = \frac{1}{2}(18+20+12) = \underline{25}$

Rovinný graf s 10 vrcholy má podle věty z přednášky nejvíce $3\cdot 10 - 6 = 24$ hran.

Daný graf (pokud existuje) nemůže být rovinný.

PŘÍKLAD 6

Cirkusový průvod má projít každou ulicí právě 1x. Lze to?



Otázku lze formulovat jako hledání otevřeného nebo uzavřeného tahu v souvislém grafu.

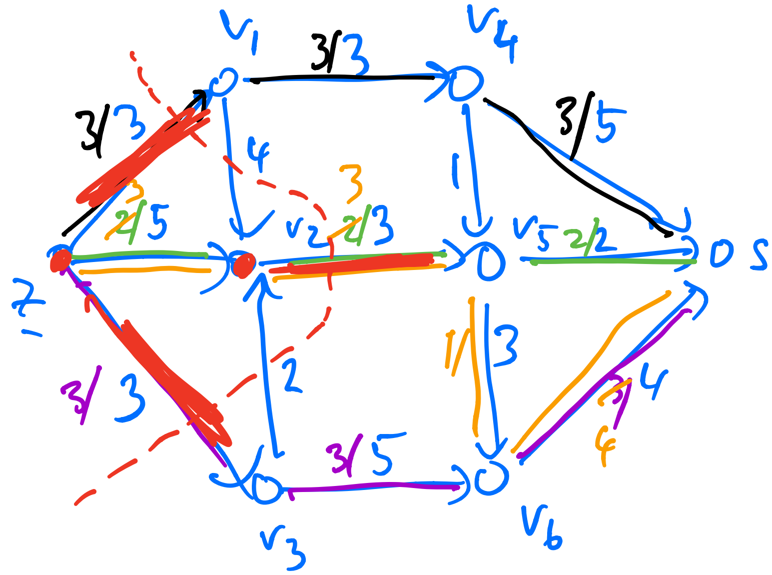
Stupně vrcholů jsou: (3, 4, 3, 2, 4, 6, 4, 2, 2, 4, 4, 2)

G má právě dva vrcholy lichého stupně, proto existuje otevřený eulerovský tah.

Průchod městem je možný. Začne v x a skončí v y, nebo naopak.

příklad 7

Hledáme největší tok a nejmenší řez v dané síti.



Postupně najdeme tok f. Nenasycené cesty odlišíme barvou.

$\|f\| = 3 + 2 + 3 + 1 = 9$ tok o velikosti 9.

ze zdroje lze najít nenasycenou cestu pouze do v_2.

Proto řez $C = \{\underset{3}{zv_1}, \underset{3}{zv_3}, \underset{3}{v_2v_5}\}$ je

řezem s kapacitou $\|C\| = 3 + 3 + 3 = \underline{9}$

Našli jsme tok f_1 velikost $\|f\| = 9$

-//- řez $C = \{zv_1, zv_3, v_2v_5\}$ $\|C\| = 9$

Protože $\|f\| = \|C\|$ je

- nalezený tok největší
- nalezený řez nejmenší.