Cvičení z diskrétní matematiky

VŠB – Technická Univerzita Ostrava
Katedra aplikované matematiky

Petr Kovář, 2007

Úvodem

Tento text je zatím pracovní. Původně soubor obsahoval přípravy na cvičení a poznámky k předmětu Diskrétní matematika pro zimní semestr 2006/2007. Nyní je k dispozici také celá řada příkladů k procvičení. V plánu je zařadit do každé kapitoly i řešené příklady.

Chtěl bych poděkovat studentům Pavle Kabelíkové a Tomáši Kupkovi, kteří pomáhali s přípravou příkladů a také Michalovi Kubesovi, který pozorně prošel řešené příklady.

K použitým symbolům

Příklady označené „*“ patří k náročnějším. Jejich řešení obvykle vyžaduje delší výpočet nebo pečlivější rozbor. Při řešení příkladů označených „**“ je třeba nějaký nápad nebo výsledek z jiné oblasti matematiky. Zdůrazněme ale, že hvězička neznamená nutně „to nikdy nevyřeším“.

Naproti tomu příklady označené „$^\heartsuit$“ jsou tak lehké, že jejich řešení je možné zpaměti jen s užitím základních pojmů.

Obsah

0 První cvičení – před přednáškou

0.1 Podmínky zápočtu

Oficiální informace o předmětu v KatISu (`http://katis.vsb.cz`)

- hodnocení v průběhu studia,
- termínech písemných testů,
- termíny zkoušky,
- možnost (závazného) přihlášení ke zkoušce.

V tomto předmětu je 100b celkem, z toho 30b během semestru:

- 10b za projekt: projekty se nevrací k dopracování (pozor na dead line)
- 20b za písemky: každý týden 0/1/2b ze zadaných příkladů

0.2 Zápočtové písemky

- Každý týden semestru se na cvičení bude psát krátká zápočtová písemka (10–11 písemek).
- K vyřešení bude zhruba 2–10 minut, podle obtížnosti příkladu.
- Během písemek není možno používat literaturu, ani zápisky.
- Za každou písemku můžete získat 0/1/2 body (NE/TÉMĚŘ SPRÁVNĚ/ZCELA SPRÁVNĚ).
- Při absenci se písemka hodnotí 0 body.
- Celkem je za zápočtové písemky až 20 bodů.

Na konci semestru se každému vezmou body **osmi nejlepších** písemek a jejich součet se vynásobí koeficientem 1,25.

- Témata písemek najdete `http://am.vsb.cz/kovar`
- Alespoň týden předem budou k dispozici také zadání příkladů.
- Při neúčasti máte možnost zjistit, co bylo probráno a na jaké téma se bude psát další písemka.

0.3 Samostatný referát

Během semestru budou zveřejněna témata samostatných písemných referátů.

- Každý student vypracuje jedno zadání podle čísla, které mu bude přiděleno.
- Pro získání zápočtu musíte mít *přijatý* referát, tj. kromě řešení musí vyhovět i formálním požadavkům.
- Referát obsahuje dva příklady, z každé části jeden (diskrétní matematika/teorie grafů).
- Příklady se hodnotí buď za 0, 3 nebo 5 bodů, (opět stylem NE/TÉMĚŘ SPRÁVNĚ/ZCELA SPRÁVNĚ). V případě mimořádně kvalitního referátu lze udělit 5 bodů navíc.
- Celkem je za samostatné referáty 10 (až 20) bodů.

Referát má pevně stanovený termín odevzdání, který musíte dodržet.

- Každý musí sepsat svůj referát sám, žádná spolupráce na výsledném textu referátu není dovolena.
- Je dovoleno o zadání referátu diskutovat se spolužáky a věnovat příkladům nějaký čas na cvičeních.
- Referát odevzdáváte e-mailem nebo na papíře příslušnému vyučujícímu (kontakt je uveden u každého zadání).
- Předepsaný formát je PDF nebo postscript.

0.4 Zkouška

- Předmět je zakončen písemnou zkouškou, až 70 bodů.
- Přihlašení ke zkouškce je možné pouze prostřednictvím KatISu.
- Ke zkoušce mohou jít pouze studenti, kteří získali zápočet.
- Přihlášky jsou závazné a v případě nepřítomnosti na zkoušce je student hodnocen 0 body.

Podrobné informace jsou v KatISu a také na stránkách `http://am.vsb.cz/kovar/`.

0.5 Další poznámky

- pokud má někdo uznaný zápočet z loňského roku, musí se rozhodnout, zda ho bude chtít uznat nebo zda bude chodit znovu a výsledky v KatISu mu zrušíme
- 14 dní na přesuny mezi skupinami
- při přesunu dát vědět oběma vyučujícím

Literatura:

- P. Hliněný. Diskrétní matematika, výukový text on-line, FEI VŠB – TUO, 2004.
- J. Matoušek, J. Nešetřil. Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum Praha 2000.
- přednášky jsou/budou dopředu na webu `http://am.vsb.cz/kovar/predmety_dm_prubeh.php`

0.6 Motivační příklady

0.6.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal. [dle věty 1.1.]

0.6.2. „Tři domy a tři studně.“ Podle pověsti žily v Temném hvozdu tři čarodejnice. Každá bydlela ve své vlastní sluji a každá potřebovala k provozování své živnosti vodu ze tří studánek: s živou vodou, s mrtvou vodou a s pitnou vodou. Jenomže cestou ke studánkám se čarodejnice nesmí potkat, ani zkřížit vyšlapanou cestičku jiné čarodejnice. Jak mohla vypadat mapa lesa se slujemi, studnami a cestičkami? Pokud řešení neexistuje, pečlivě zdůvodněte. [taková uspořádání nemůže existovat, pověst není pravdivá]

0.6.3. „Sedm mostů města Královce“ Městem Královec (nyní Kaliningrad na území Ruska) teče řeka Pregola, která vytváří dva ostrovy. V 18. století byly ostrovy spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Otázka zní, zda je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou. [řešení nemůže neexistovat]

0.6.4. „Dokonalý kompresní algoritmus“ Najděte alespoň jeden příklad dokonalého kompresního a dekompresního algoritmu, (máte najít dva algoritmy):

1. postup, jak z libovolné posloupnosti bajtů $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sestavit kratší posloupnost $c_1, c_2, \ldots, c_m$, kde $m < n$, a současně
2. postup, jak z posloupnosti $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sestavit zpět posloupnost $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Pokud takový algoritmus neexistuje, pečlivě zdůvodněte. [algoritmus nemůže existovat]

0.6.5. „Lámání čokolády“ Tabulka čokolády se skládá z $m \times n$ čtverečků. Chceme ji nalámat na jednotlivé čtverečky. Najděte (a dokažte) jaký je *nejmenší* počet zlomů, abychom čokoládu $m \times n$ rozdělili na jednotlivé čtverečky? [nejmenší možný počet lámání je $mn - 1$]

0.6.6. „Handshaking problem“ Máme skupinu n lidí ($n \geq 2$) z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejnému počtu lidí ve skupině. [rozborem a užitím Dirichletova principu]

1 Množiny a výběry prvků

Druhé cvičení je věnováno kapitole o kombinatorických výběrech.

1.1 Čísla, operace, množiny

1.1.1. Vypočítejte následující sumy nebo produkty.

a) Vypočtěte $\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{2j}$. $\left[\frac{2}{j}\right]$

b) Vypočtěte $\sum_{j=2}^{5} \frac{1}{2j}$. $\left[\frac{77}{120}\right]$

c) Vypočtěte $\sum_{i=1}^{4} i^3$. $[100]$

d) Vypočtěte $\prod_{i=0}^{n} \frac{i}{i+1}$. $[0]$

e) Vypočtěte $\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$. $\left[\frac{1}{n+1}\right]$

1.1.2. Najděte obecný vztah pro součet první k lichých čísel. $\left[k^2\right]$

1.1.3. Najděte obecný vztah pro součet první k sudých kladných čísel. $[k(k+1)]$

1.1.4. Ukažte, že aritmetický průměr libovolného sudého počtu po sobě jdoucích čísel není celé číslo. $\left[a-1+k+\frac{1}{2}\right]$

1.1.5.$^\heartsuit$ Zapište funkci součet prvků množiny $A = \{18, 25, 31, 67, 202, 301, 356\}$ pomocí sumy. $\left[\sum_{i\in A} i = \sum_{i\in\{18,25,31,67,202,301,356\}} i\right]$

1.1.6.$^\heartsuit$ Vypočítejte

a) $\lfloor 2.7 \rfloor$. $[2]$

b) $\lfloor -2.7 \rfloor$. $[-3]$

c) $\lfloor \frac{22}{10} \rfloor$. $[2]$

d) $\lfloor -\frac{22}{10} \rfloor$. $[-3]$

e) $\lfloor -\pi \rfloor$. $[-4]$

f) $\lfloor -e \rfloor$. $[-3]$

g) $P = \lfloor \frac{n+1}{n} \rfloor$, pro $n \in \mathbb{N}$ [pro $n = 0$ nemá smysl, pro $n = 1$ vyjde $P = 2$, jinak $P = 1$]

1.1.7.* Zapište funkci $\lceil\rceil$ pomocí $\lfloor\rfloor$. $[\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil]$

1.1.8.* Ukažte, že $\lfloor 1.\overline{9} \rfloor = 2$ [úpravou na celočíselný zlomek]

1.1.9.* Ukažte, že $\lceil 1.\overline{9} \rceil = 2$ [úpravou na celočíselný zlomek]

1.1.10. Ukažte, že $\lceil\lceil x \rceil\rceil = \lceil x \rceil$ [$\lceil x \rceil$ je celé číslo]

1.1.11. Upravte na celočíselný zlomek $1,\overline{23}$. $\left[\frac{122}{99}\right]$

1.1.12. Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lfloor\rfloor$? $[\lfloor x + 0.5 \rfloor]$

1.1.13.* Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lceil\rceil$? $[-\lceil -0.5 - x \rceil]$

1.1.14. Nakreslete graf funkcí $\lfloor \sin x \rfloor$, $\lceil \cos x \rceil$ a $\lfloor \tan x \rfloor$.

1.1.15. Kolik prvků má $2^{\{1,2,3,4\}}$? Rozepište. $\left[16 \text{ prvků}, 2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}\right]$

1.1.16. Rozepište potenční množinu množiny $B = \{1, 2, 3\}$. $\left[2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}\right]$

1.1.17.$^\heartsuit$ Máme dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\circ, \star\}$.

a) Kolik prvků má sjednocení $A \cup B$? [5]

b) Kolik prvků má průnik $A \cap B$? [0]

c) Kolik prvků má rozdíl $A \setminus B$? [3]

d) Kolik prvků má kartézský součin $A \times B$? [6]

e) Kolik prvků má součin $A \times 2^B$? [12]

f) Rozepište kartézský součin $A \times B$. $[A \times B = \{(1,\circ),(2,\circ),(3,\circ),(1,\star),(2,\star),(3,\star)\}]$

g) Rozepište kartézský součin $B \times A$. $[B \times A = \{(\circ,1),(\circ,2),(\circ,3),(\star,1),(\star,2),(\star,3)\}]$

h) Rozepište rozdíl $A \setminus B$. $[A \setminus B = A]$

i) Rozepište rozdíl $B \setminus A$. $[B \setminus A = B]$

j) Rozepište součin $A \times 2^B$. $\big[A \times 2^B = \{(1,\emptyset),(1,\{\circ\}),(1,\{\star\}),(1,\{\circ,\star\}),(2,\emptyset),(2,\{\circ\}),(2,\{\star\}),(2,\{\circ,\star\}),(3,\emptyset),(3,\{\circ\}),(3,\{\star\}),(3,\{\circ,\star\})\}\big]$

1.1.18. Určete doplněk množiny B v množině A, kde $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}$. $\big[\overline{B} = (-2,2) = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 0\}\big]$

1.1.19. Určete průnik a sjednocení množin $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 3\}$. $[A \cap B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 3\} = \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -3 \vee x \geq 0\} = \mathbb{Z} \setminus \{-2,-1\}]$

1.1.20. Určete rozdíly $A \setminus B$, $B \setminus A$, kde $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq -7\}$. $[A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\} = \{-1-x : x \in \mathbb{N}\}]$

1.1.21.$^\heartsuit$ Kdy platí

a) $A \cap B = A$? [je-li $A \subseteq B$]

b) $A \cup B = A$? [je-li $B \subseteq A$]

c) $A \cup B = A \cap B$? [pro $A = B$]

1.1.22.* Dokažte matematickou indukcí, že $|2^A| = 2^{|A|}$. [Indukcí vzhledem k $|A|$.]

1.2 Výběry bez opakování

1.2.1. Máme prázdnou množinu $\emptyset$.

a) Kolika způsoby můžeme seřadit prvky $\emptyset$ do posloupnosti? [1]

b) Kolika způsoby můžeme vybrat $\emptyset$ z nějaké množiny? [1]

c) Jak by se tyto počty změnily, kdyby $0! \neq 1$? [počet výběru stejný, nebylo by však možno použít vztahy pro kombinační čísla a faktoriál]

1.2.2.$^\heartsuit$ Pro jaké hodnoty n a k je více k-prvkových podmnožin z n prvkové množiny než $(n-k)$-prvkových podmnožin? [stejně pro všechny hodnoty n a k]

1.2.3. Pro jaké hodnoty n a k je více k-prvkových variací z n prvkové množiny než $(n-k)$-prvkových variací? $\big[$pro $k > \frac{n}{2}\big]$

1.2.4. Vyjádřete bez kombinačních čísel $\binom{3n}{3}$ $\big[\frac{1}{2}n(3n-1)(3n-2)\big]$

1.2.5. Tenisový turnaj se hraje se systém každý s každým. Kolik se bude hrát zápasů, jestliže

a) se turnaje zúčastní 8 hráčů? [28]

b) se turnaje zúčastní 21 hráčů? [210]

1.2.6. Tenisového turnaje se účastní 8 hráčů. Kolik je různých pořadí na stupních vítězů? [336]

1.2.7. Upravte a porovnejte $\binom{6n}{3}$ a $\binom{3n}{6}$. $\left[\text{pro } n = 2,3,4 \text{ je větší } \binom{6n}{3} \text{ a pro } n \geq 5 \text{ je větší } \binom{3n}{6}\right]$

1.2.8.$^\heartsuit$ Kolik způsoby se může postavit pět artistů na sebe? $[P(5) = 5! = 120]$

1.2.9. Kolika způsoby můžeme postavit šest artistů do pyramidy $3+2+1$, přičemž rozlišujeme pouze kdo stojí na zemi, kdo v první vrstvě a kdo nahoře? $\left[P(3,2,1) = \frac{720}{6\cdot 2} = 60\right]$

1.2.10. Máme šest karet.

a) Kolika způsoby můžeme vybrat dvě karty? [15]

b) Kolika způsoby můžeme vybrat dvě karty, jestliže rozlišuje pořadí? [30]

1.2.11. Házíme dvakrát kostkou a výsledky zapisujeme.

a) Kolik různých výsledků můžeme dostat, jestliže rozlišujeme pořadí hodů? [36]

b) Kolik různých výsledků můžeme dostat, jestliže nerozlišujeme pořadí hodů? [21]

1.2.12. Máme n lidí. Jak velké skupinky vybírat, aby byl počet možností co největší? $\left[k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right]$

1.2.13. Ukažte několika způsoby, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ [úpravou faktoriálů nebo kombinatoricky jako počet k-prvkových podmnožin]

1.2.14.* Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků a 9 obránců. Kolika způsoby vybereme pětku (2 obránce + 3 útočníci), jestliže jeden útočník může hrát i v obraně? [12276]

1.2.15. Vlajky má být sestavena ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

a) Kolik různých vlajek můžeme sestavit? [60]

b) Kolik z nich má modrý pruh? [36]

c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed? [12]

d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh? [48]

1.2.16. Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z deseti číslic vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z nich je menších než 50 000? $[V(9,1)\cdot V(9,4) = 9\cdot 3024 = 27216$, $V(4,1)\cdot V(9,4) = 4\cdot 3024 = 12096]$

1.2.17. Na konferenci vystoupí šest přednášejících: A, B, C, D, E, F. Určete počet

a) všech možných pořadí jejich vystoupení; [720]

b) všech pořadí, v nichž vystoupí A po E; [360]

c) všech pořadí, v nichž vystoupí A ihned po E. [120]

1.2.18. Kolika způsoby může n lidí posadit

a) do řady $[n!]$

b) do řady, v níž je člověk A na kraji; $[(n-1)!]$

c) do řady tak, aby lidé A a B nestáli vedle sebe; $[(n-1)\cdot(n-1)!]$

d) kolem kulatého stolu (záleží jen na tom, jakého má kdo souseda, nikoli na které židli sedí). $[(n-1)!]$

1.2.19. Kolika způsoby lze na klasické šachovnici (8×8 polí) vybrat

a) trojici políček; [41664]

b) trojici políček neležících v témže sloupci; [28682]

c) trojici políček neležících v témže sloupci ani v téže řadě; [3136]

d) trojici políček, která jsou všechna téže barvy. [9920]

1.2.20. Kolika způsoby můžeme ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, tak aby v ní byly

a) právě dvě ženy; [210]

b) alespoň dvě ženy; [371]

1.3 Výběry s opakováním

1.3.1. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI? [34650]

1.3.2. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují IIII? [38810]

1.3.3. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují II? [7350]

1.3.4. Kolik existuje anagramů slova ABRAKADABRA? [83160]

1.3.5. Kolik anagramů slova ABRAKADABRA začíná a končí písmenem B? [1512]

1.3.6. Kolik anagramů slova ABRAKADABRA začíná nebo končí písmenem B? [28728]

1.3.7. Kolik anagramů slova ABRAKADABRA začíná a končí písmenem A? [15120]

1.3.8. Kolik existuje anagramů slova ABRAKADABRA, které neobsahují AA? [3780]

1.3.9. Na patnáct stožárů budou pověšeny vlajky pěti zemí, každá třikrát. Kolik existuje možností? [168168000]

1.3.10. Kolik je tříciferných čísel dělitelných

a) dvěma? [450]

b) pěti? [180]

c) třemi? [300]

d) sedmi? [128]

1.4 Příklady k procvičení

1.4.1. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n (-a_i)$? Pokud ano, uveďte příklad! [ano, $(a_i)_{i=1}^n = (-1)_{i=1}^n$ pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$]

1.4.2. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > 0$ a $\prod_{i=1}^n a_i < 0$? Pokud ano, uveďte příklad! [ano, například $(a_1, a_2) = (-1, 3)$]

1.4.3. Existuje taková posloupnost *kladných* čísel $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > \prod_{i=1}^n a_i$? Pokud ano, uveďte příklad! [ano, například $(a_1, a_2) = (0.1, 0.2)$]

1.4.4. Kolika způsoby, je možné napsat 7 jako součet právě čtyř přirozených sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. [120]

1.4.5. Kolika způsoby, je možné napsat 7 jako součet právě čtyř kladných sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. [20]

1.4.6. Kolika způsoby, je možné napsat k jako součet n sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. $\left[\binom{n+k-1}{k}\right]$

1.4.7. Kolika způsoby, je možné napsat k jako součet n? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. $\left[\binom{k-1}{n-1}\right]$

1.4.8. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit? [286]

1.4.9. Máme 7 *různých* figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit? [2187]

1.4.10. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak některé figurky obarvit? [1001]

1.4.11. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit, přičemž od každé barvy by měla být alespoň jedna figurka? [84]

1.4.12. Kolika způsoby můžeme posadit n lidí kolem kulatého stolu? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce. $[(n-1)!]$

1.4.13. Kolika způsoby můžeme posadit n manželských párů kolem kulatého stolu tak, aby manželé seděli vždy vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce. $[2^n(n-1)!]$

1.4.14. Dříve byly státní poznávací značky osobních automobilů tvořeny uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy byly písmena a další čtyři číslice. Kolik poznávacích značek bylo možno sestavit, jestliže pro první část značky bylo možno použít každé z 26 písmen (každá možnost povolena nebyla). [175760000]

1.4.15. Určete počet všech *nejvýše* k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. $\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\right]$

1.4.16. Kolik je všech pěticiferných přirozených čísel? Kolik z nich je menších než 50 000? [90000, 40000]

1.4.17. Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných 9, v jejichž dekadickém zápisu mohou být pouze číslice 0, 1, 2, 5, 7. [54]

1.4.18. V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky (kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné). Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je

a) aspoň pět kuliček od každé barvy; [21]

b) pět červených, čtyři modré a čtyři zelené kuličky. [19]

1.4.19.$^{\heartsuit}$ Je některá množina podmnožinou každé množiny? [ano, prázdná množina]

1.4.20. Čemu se rovná

a) $A \cap (B \cup C) =\ ?$ $[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

b) $A \cup (B \cap C) =\ ?$ $[(A \cup B) \cap (A \cup C)]$

c) $\overline{A \cap B} =\ ?$ ($\bar{X}$ značí doplněk množiny X) $[\overline{A} \cup \overline{B}]$

1.4.21. Kdy je potenční množina 2^A

a) jednoprvková? [pouze pro $A = \emptyset$]

b) dvouprvková [pouze pro $|A| = 1$]

c) tříprvková [nikdy]

d) prázdná [nikdy]

1.4.22. Kdy je kartézský součin dvou množin $A \times B$ prázdný? [pouze když $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$]

1.4.23. Je možno najít dvě takové množiny A, B, aby současně platilo $A \subset B$ i $A \in B$? [ano, například pro $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$]

1.4.24. Je možno najít dvě takové neprázdné množiny A, B, aby současně platilo $A \subset B$ i $A \in B$? [ano, například $A = \{a\}$, $B = \{a, \{a\}\}$]

1.4.25.* Kolika způsoby je možné napsat číslo k jako součet sčítanců 1 a 2 (označme n počet sčítanců)? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. $\left[\binom{n}{k-n}\right]$

1.4.26.* Kolika způsoby je možné napsat číslo k jako součet sčítanců 1 a 2? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. $\left[\sum_{n=\lceil \frac{k}{2} \rceil}^{k} \binom{n}{k-n}\right]$

1.4.27.* Kolika způsoby můžeme posadit n manželských párů kolem kulatého stolu tak, aby manželé *neseděli* vždy vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce.

1.4.28.* Jaký je počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a každá jejich strana má velikost vyjádřenou některým z čísel $n+1, n+2, n+3, ...2n$, kde n je přirozené číslo. $\left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]$

1.4.29. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže žádné neleží v přímce? [21]

1.4.30. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže právě tři leží v přímce? [19]

1.4.31. Máme dány dvě mimoběžky. Na jedné je m bodů, na druhé n bodů. Kolik lze sestrojit čtyřstěnů s vrcholy v daných bodech? $\left[\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}\right]$

1.4.32. Kolika způsoby můžete seřadit v poličce pět učebnic angličtiny, čtyři učebnice matematiky a dvě učebnice českého jazyka, jestliže mají zůstat rozděleny do skupin po jednotlivých předmětech? [34560]

1.4.33. Na hlídku půjdou 4 vojáci z čety. Kolik vojáků má četa, jestliže výběr je možno provést 210 způsoby? [10 vojáků]

1.4.34. Palindrom je slovo, které se píše stejně jako pozpátku. Anglická abeceda má 26 písmen. Kolik existuje palindromů (i nesmyslných) délky n z písmen anglické abecedy? $\left[26^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right]$

1.4.35. Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší a vetší čísla? [20]

2 Diskrétní pravděpodobnost

Pokud nebude řečeno jinak, tak budeme předpokládat, že balíček obsahuje 32 karet, od sedmičky po eso ve čtyřech různých barvách (srdce, piky, káry a kříže). Klasická šestistěnná kostka je vyrobena tak, že součet ok na protilehlých stěnách je vždy sedm.

Všimněte si, že i v případěm kdy máme zamíchaný celý balíček karet, nemusíme někdy uvažovat šech 32! pořadí. Pokud se zajímám o nějaký výběr, stačí pracovat s nějakým náhodným výběrem.

2.1 Motivační příklady

2.1.1. Na jednom Americkém televizním kanálu běžela *Montyho Show*. Soutěžící měli možnost získat automobil, jestliže si vyberou ze tří dveří ty dveře, za kterými se automobil nachází. Soutěžící si jedny dveře zvolil a potom Monty šel a otevřel některé ze dvou zbývajících dveří. Vždy otevřel ty dveře, za kterými nestál automobil, ale koza. Nyní měl soutěžící možnost změnit svou volbu a vybrat si libovolné ze dvou stále zavřených dveří. Předpokládáme, že pořadatelé vyberou na začátku náhodně jedny ze tří dveří, za které zaparkují automobil a za další dvě postaví kozy. Je lepší změnit svoji volbu, nebo zůstat u původního tipu a nebo je to jedno? S jakou pravděpodobností získá soutěžící výhru jestliže změní svoji volbu? Svou odpověď vysvětlete. [je lepší volbu změnit]

2.2 Konečný pravděpodobnostní prostor

2.2.1. Hodíme kostkou.

a) Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo? $\left[\frac{1}{2}\right]$

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $\left[\frac{1}{2}\right]$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička nebo dvojka? $\left[\frac{1}{3}\right]$

d) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 7? $[1]$

e) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 3? $[0]$

2.2.2. Hodíme dvěma kostkami.

a) Je pravděpodobnější, že padne 5 a 6 nebo že padnou dvě 3? [pravděpodobnější jsou dvě různá čísla]

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 12? $\left[\frac{1}{9}\right]$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 4? $\left[\frac{1}{12}\right]$

d) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 14? $[0]$

e) Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 10? $[0]$

2.2.3. Sestavte funkci $P(n)$, která bude udávat pravděpodobnost, že při současném hodu $n \geq 1$ kostkami

a) padne součet n. $\left[P(n) = \frac{1}{6^n}\right]$

b) padne součet 3. $\left[P(n) = \frac{1}{6}\right.$ pro $n = 1$, $P(n) = \frac{1}{18}$ pro $n = 2$, $P(n) = \frac{1}{216}$ pro $n = 3$ a $P(n) = 0$ pro $\left.n \geq 4.\right]$

2.2.4. Hodíme n-stěnnou kostkou očíslovanou $1, 2, \ldots, n$. Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo? $\left[\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}\right]$

2.2.5. Hodíme n-stěnnou prvočíselnou kostkou (stěny jsou očíslované užitím prvních n prvočísel. Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo? $\left[\frac{n-1}{n}\right]$

2.2.6. Máme zamíchaný balíček 32 hracích karet. Jaká je pravděpodobnost, že

a) první karta v balíčku je eso? $\left[\frac{1}{8}\right]$

b) třetí karta v balíčku je desítka? $\left[\frac{1}{8}\right]$

c) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou dáma a král? $\left[\frac{2}{15}\right]$

d) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou sedmička a desítka? $\left[\frac{1}{10}\right]$

2.2.7. Házíme dvěma kostkami: šestistěnnou a dvanáctistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne stejné číslo? $\left[\frac{1}{12}\right]$

2.2.8. Házíme třemi kostkami: čtyřstěnnou, šestistěnnou, desetistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na všech padne stejné číslo? $\left[\frac{1}{60}\right]$

2.2.9. Házíme třemi šestistěnnými kostkami.

a) Je lepší vsadit si, že nepadne žádná šestka, nebo že padne alespoň jedna šestka? [je lepší si vsadit, že nepadne žádná šestka]

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne právě jedna šestka? $\left[\frac{75}{216}\right]$

c) Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky? $\left[\frac{2}{27}\right]$

2.2.10. Házíme desetistěnnou kostkou.

a) Hodíme jednou. Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $\left[\frac{2}{5}\right]$

b) Házíme dvakrát. Jaká je pravděpodobnost, že padne lichý součet? $\left[\frac{1}{2}\right]$

c) Házíme dvakrát. Jaká jsou pravděpodobnosti jednotlivých součtů? $[P(i) = \min\{i-1, 21-i\}$ pro $i \in [2, 20]]$

2.2.11. Házíme čtyřikrát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne čtyřikrát za sebou hlava? $\left[\frac{1}{16}\right]$

b) padne nejprve hlava, potom orel, znovu orel a nakonec hlava? $\left[\frac{1}{16}\right]$

c) padne dvakrát hlava a dvakrát orel (v libovolném pořadí)? $\left[\frac{3}{8}\right]$

d) padne alespoň jednou hlava? $\left[\frac{15}{16}\right]$

2.2.12. Hodíme třemi stejnými kostkami.

a) Jaká je pravděpodobnost, že padne $2, 4, 6$? $\left[\frac{1}{36}\right]$

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne $2, 4, 4$? $\left[\frac{1}{72}\right]$

2.2.13. Ve třídě je 25 žáků. S jakou pravděpodobností budou dva spolužáci slavit narozeniny ve stejný den? Kolik nejméně musí být ve třídě žáků, aby byla pravděpodobnost společného data narozenin dvou spolužáků větší než $\frac{1}{2}$? Předpokládejme, že nikdo z žáků nemá narozeniny 29. února (v přestupném roce). $[P_{25} = 0.4313$, pro 23 žáků$]$

2.3 Disjunktní a nezávislé jevy

2.3.1. Dva hráči hází kostkou. Jsou jejich hody nezávislé? I když někdo hodí tři šestky za sebou? [ano]

2.3.2. Mějme dva různé elementární jevy.

a) Jsou různé elementární jevy vždy disjunktní? [ano]

b) Jsou různé elementární jevy vždy nezávislé? [ne]

2.3.3. Mějme dva disjunktní jevy.

a) Mohou být dva disjunktní jevy nezávislé? [ano]

b) Je prázdný jev nezávislý s libovolným jevem? [ano]

2.3.4. Udejte příklad dvou různých jevů, které nejsou disjunktní. [Například při hodu kostkou: jev padlo liché číslo a jev padlo prvočíslo.]

2.3.5. Hodíme dvěma kostkami.

a) Jsou jevy A: *padl součet* 4 a B: *padl součin* 4 disjunktní? [ne]

b) Jsou jevy A: *padl součet* 6 a B: *padl součin* 6 disjunktní? [ano]

2.3.6. Mějme tři jevy A, B, C. Víme, že jevy A a B jsou nezávislé, jevy B a C jsou nezávislé a jevy A a C jsou nezávislé.

a) Jsou jevy A, B, C nezávislé jako trojice? [ne]

b) Mohou být ve speciálním případě nezávislé? Kdy? [ano, je-li alespoň jeden z jevů prázdný]

2.3.7. Máme zamíchaný balíček 32 karet.

a) Rozdáme dvěma hráčům po třech kartách. Jsou výběry karet nezávislé? [ne]

b) Dáme prvnímu hráči tři karty a zbylé karty zamícháme. Potom druhý hráč dostane také tři karty. Jsou výběry karet nezávislé? [ne]

c) Dáme prvnímu hráči tři karty. On si je zapamatuje a vrátí do balíčku. Potom karty zamícháme a druhý hráč dostane tři karty. Jsou výběry karet nezávislé? [ano]

d) Hráč dostane pět karet, potom karty vrátí a po zamíchání dostane znovu pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl pokaždé fullhouse (3+2 stejné hodnoty)? $\left[\frac{3136}{720801}\right]$

e) Hráč dostane pět karet, schová si je dostane dalších pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl královský poker (4 esa a další karta stejné hodnoty) dvakrát za sebou? [0]

2.3.8. Hodíme dvěma kostkami, jednou zelenou a jednou červenou. Jsou jevy A: „na obou padne stejné číslo“ a B: „na zelené kostce padne šestka“ nezávislé? [ano]

2.3.9. Hoďme dvěma kostkami. Jsou jev *padl součet* 6 a jev *padl součin* 8 nezávislé? [nejsou nezávislé]

2.3.10. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{5, 6, 7, 8\}$ nezávislé? [jevy A a B nejsou nezávislé]

2.3.11. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5, 7\}$ (padlo liché číslo) nezávislé? [jevy A a B jsou nezávislé]

2.3.12. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme šestistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5\}$ (padlo liché číslo) nezávislé? [jevy A a B nejsou nezávislé]

2.3.13. Házíme n-stěnnou kostkou. Nadefinujeme jev A, že padne malé číslo $1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a jev B, že padne liché číslo. Pro jaká n jsou jevy A a B nezávislé? [jevy jsou nezávislé jen pro $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$]

2.4 Podmíněná pravděpodobnost

2.4.1. Jaká je pravděpodobnost při hodu klasickou kostkou, že padne číslo větší než 3 víme-li, že padlo liché číslo. $\left[\frac{1}{3}\right]$

2.4.2. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že první je bílá a druhá černá? $\left[\frac{3}{10}\right]$

2.4.3. Počítejme u předchozího příkladu: Všechny možnosti, jak mohou dopadnout losování jsou: bílá-bílá, bílá-černá, černá-černá a černá-bílá. Pouze jedna z nich je příznivá: bílá-černá. Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{1}{4}$. Co je špatně? Vysvětlete! [nelze užít vztah platný pro uniformní pravděpodobnostní prostor]

2.4.4. Počítejme u předchozího příkladu: Všech možností, jak může dopadnout losování je $\binom{5}{2} = 10$. Příznivé jsou ty, kdy vybereme nejprve bílou a potom černou: Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{|\Omega|} = \frac{3\cdot 2}{10} = \frac{3}{5}$. Co je špatně? Vysvětlete! [rozlišit neuspořádaný a uspořádaný výběr]

2.4.5. Z celkové produkce závodu jsou 4% zmetků. Z dobrých výrobků je 75% standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní. [72%]

2.5 Střední hodnota

2.5.1. Jaká je střední hodnota počtu šestek, které padnou při hodu pěti kostkami? $\left[\frac{5}{6}\right]$

2.5.2. Máme šestistěnnou kostku.

a) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 6, 2 naproti 5 a 3 naproti 4? [7]

b) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 2, 3 naproti 5 a 4 naproti 6? [7]

2.5.3. Kolik je třeba průměrně hodů mincí, aby vyšly dva stejné výsledky? $\left[\frac{5}{2}\right]$

2.5.4.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby vyšly dva stejné výsledky? $\left[2(1 + p - p^2)\right]$

2.5.5.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, aby padla první hlava? [2]

2.5.6.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby padla první hlava?

2.5.7. Máme dva sáčky s kuličkami. V prvním sáčku jsou dvě kuličky s číslem 2 a tři kuličky s číslem 3. Ve druhém sáčku jsou 3 kuličky s číslem 4 a 2 kuličky s číslem 5. Taháme z obou sáčků po jedné kuličce. Jaký je průměrný součet tažených čísel? [7]

2.5.8. Jaká je střední hodnota počtu políček, o které se vaše figurka přesune v jednom kole hry „Člověče, nezlob se!“, pokud se

a) po třetí šestce za sebou již znovu nehází? $\left[\frac{301}{72}\right]$

b) opakovaně hází dokud padají šestky? $\left[\frac{21}{5}\right]$

2.5.9. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Jestliže tři z pěti jídel již není možné objednat. Jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří? [2]

2.5.10. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Je-li v menu výběr z n jídel a jestliže $k \le n$ je počet jídel z pěti, která je možno objednat, jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří? $\left[E(X) = \frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=1}^{n-k}\frac{(n-i)!}{(n-i-k+1)!}\cdot i\right]$

2.6 Náhodné výběry

2.6.1. Máme sedmiprvkovou množinu A.

a) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou množinu mezi pětiprvkovými podmnožinami? $\left[\frac{1}{21}\right]$

b) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou množinu mezi všemi podmnožinami? $\left[\frac{1}{128}\right]$

c) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně některou pětiprvkovou množinu mezi všemi podmnožinami? $\left[\frac{21}{128}\right]$

2.6.2. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu k-prvkovou podmnožinu n-prvkové množiny? $\left[\frac{1}{\binom{n}{k}}\right]$

2.6.3. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně k-prvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami n-prvkové množiny? $\left[\frac{\binom{n}{k}}{2^n}\right]$

2.6.4. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná podmnožina n-prvkové množiny obsahuje jeden pevně zvolený prvek? $\left[\frac{1}{2}\right]$

2.6.5. Máme náhodnou posloupnost čtyř bitů.

a) S jakou pravděpodobností se jedná o „0011“? $\left[\frac{1}{16}\right]$

b) S jakou pravděpodobností obsahuje dvě jedničky a dvě nuly? $\left[\frac{3}{8}\right]$

2.6.6. S jakou pravděpodobností obsahuje více jedniček než nul? $\left[\frac{5}{16}\right]$

2.6.7. Máme náhodnou permutaci pětiprvkové množiny.

a) Jakou pravděpodobnost má jedna náhodná permutace? $\left[\frac{1}{120}\right]$

b) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje bezprostředně za číslem 2? $\left[\frac{1}{5}\right]$

c) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje za číslem 2? $\left[\frac{1}{2}\right]$

d) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde čísla 1, 2 jsou vedle sebe? [48]

2.7 Příklady k procvičení

2.7.1. Házíme opakovaně poctivou mincí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že při šesti hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát? $\left[\frac{5}{16}\right]$

b) Jaká je pravděpodobnost, že při n hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát? $\left[\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}\right]$

2.7.2. Máme zamíchaný balíček 32 karet. Vytáhneme postupně dvě karty. Jaká je pravděpodobnost, že

a) obě karty budou esa? $\left[\frac{3}{248}\right]$

b) obě karty budou devítka a desítka (v tomto pořadí)? $\left[\frac{1}{62}\right]$

c) obě karty budou devítka a desítka (v libovolném pořadí)? $\left[\frac{1}{62}\right]$

d) ani jedna karta nebude král? $\left[\frac{189}{248}\right]$

e) obě karty budou stejné barvy? $\left[\frac{7}{31}\right]$

2.7.3. Kuchař upustil omylem do polévky 2 prsteny. Všechna polévka byla rozdělena mezi 25 hostů, z toho 8 žen. Jaká je pravděpodobnost, že

a) oba prsteny dostane jedna osoba? $\left[\frac{1}{25}\right]$

b) prsteny budou mít v polévce dva muži? $\left[\frac{136}{625}\right]$

c) prsteny budou mít v polévce jeden muž a jedna žena? $\left[\frac{136}{625}\right]$

d) prsteny budou mít v polévce dvě ženy? $\left[\frac{28}{625}\right]$

2.7.4. Hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že větší číslo bude m? $\left[\frac{2m-1}{36}\right]$

2.7.5. V šuplíku máme rozházených po 6 ponožkách od každé z barev černá, šedá a bílá. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku. $\left[\frac{101}{34}\right]$

2.7.6. V šuplíku máme rozházených po p ponožkách od každé z b barev. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku.

2.7.7.* Magnet má dva póly, které se přitahují. Barevné dětské magnetky mají na sobě umělohmotnou čepičku. Čepička zakrývá celý jeden pól magnetu, proto přitahovat se mohou pouze jedním pólem. Magnetky jsou balené po 40 kusech, 10 od každé ze čtyř barev. Předpokládejme, že zakryté póly těchto magnetků jsou zvoleny náhodně s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že těchto 40 magnetků lze pospojovat do 5×4 stejnobarevných dvojic tak, že každá dvojice se navzájem přitahuje opačnými nezakrytými póly? $\left[\left(\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}\right)^4\right]$

3 Kapitola 3 – Důkazy v diskrétní matematice

3.1 Motivační příklady

3.1.1. Tabulka čokolády se skládá z $m \times n$ čtverečků. Chceme ji nalámat na jednotlivé čtverečky. Najděte a dokažte jaký je *nejmenší* počet zlomů, abychom čokoládu $m \times n$ rozdělili na jednotlivé čtverečky? [přímo nebo silnou indukcí]

3.1.2. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že n přímek rozdělí rovinu na nejvýše $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ oblastí. [indukcí vzhledem k n.]

3.1.3.* Dva zloději ukradli náhrdelník. Náhrdelník je sestaven z drahokamů (rubínů a diamantů) po řadě spojených řetízkem. Svůj lup by si chtěli rozdělit tak, aby každý dostal stejný počet diamantů i rubínů. Ukažte, že pokud náhrdelník obsahuje sudý počet diamantů ($2d$) a sudý počet rubínů $2r$, je vždy možné rozdělit náhrdelník na *dvě* části tak, aby každá část obsahovala polovinu rubínů i polovinu diamantů. [přímo nebo počítáním]

3.2 Základní logické symboly

3.2.1. Sestavte negaci výroku „Všechna auta jsou červená.“ [alespoň jedno auto není červené]

3.2.2. Sestavte negaci výroku „Každý student u zkoušky uspěje.“ [alespoň jeden student u zkoušky neuspěje]

3.2.3. Sestavte negaci výroku $\forall n : 2^n > n^2$. [$\exists n : 2^n \leq n^2$]

3.2.4. Sestavte negaci výroku $\forall x > 1 : x^2 > x$. [$\exists x > 1 : x^2 \leq x$]

3.2.5. Sestavte negaci výroku $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ln|x| < 0$. [$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ln|x| \geq 0$]

3.3 Pojem matematického důkazu

Celé číslo a se nazývá sudé, existuje-li $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $a = 2k$. V opačném případě se číslo nazývá liché.

3.3.1. Dokažte že pro $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li a liché, potom a^2 je liché. [přímo]

3.3.2. Dokažte že pro $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li a^2 liché, potom a je liché. [nepřímo]

3.3.3. Najděte chybu v následujícím důkazu. Ukážeme, že 13 je prvočíslo. Předpokládejme, že všechna lichá čísla jsou prvočísla. Protože $13 = 2 \cdot 6 + 1$ je liché číslo, tak 13 je prvočíslo. [implikace z nepravdivého výroku není důkaz!]

3.3.4. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme výrok V, který říká $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$. Protože jistě $0 > -1$, tak přičtením x dostaneme $x > x - 1$. Nyní z nerovností $x^2 > x > x - 1$ dostaneme $x^2 > x - 1$. Rovnice $x^2 - x + 1 > 0$ má řešení pro všechna reálná čísla (vyřešte si podrobně sami), proto náš předpoklad je pravdivý pro všechna reálná čísla. [implikace z nepravdivého výroku není důkaz!]

3.3.5. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme celé číslo a. Jistě platí $a = a$. Umocněním předpokladu $a = a$ dostaneme $a^2 = a^2$, neboli $0 = a^2 - a^2 = (a+a)(a-a)$. Nyní $0 \cdot (a-a) = 0 = (a+a)(a-a)$ a zkrácením výrazem $a - a$ dostaneme $a + a = 0$, tj. $a = -a$. [neekvivalentní úprava]

3.3.6. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme celá čísla a, b. Pokud platí $a = b$, tak umocněním dostaneme $a^2 = b^2$, neboli $0 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Nyní zkrácením výrazem $a - b$ dostaneme $0 = a + b$, tj. $a = -b$. [neekvivalentní úprava]

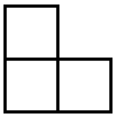
3.4 Princip matematické indukce

3.4.1. Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních n lichých čísel je n^2. [indukcí vzhledem k n]

3.4.2. Dokažte kombinatoricky (jinak než přímo nebo indukcí), že součet prvních n lichých čísel je n^2. [rozkrájením šachovnice]

3.4.3. Dokažte přímo (jinak než indukcí nebo kombinatoricky), že součet prvních n lichých čísel je n^2. [součtem posloupnosti]

3.4.4. Máme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ políček ($n \geq 1$), na které chybí jedno (libovolné) políčko. K dispozici máme neomezený počet dílků, z nich každý sestává ze tří políček šachovnice ve tvaru L. Ukažte, že šachovnici je možno pokrýt dílky tak, aby se žádné dílky nepřekrývaly a přitom byla celá šachovnice (až na chybějící políčko) pokrytá.



Obrázek 3.1: *Dílek se třemi políčky šachovnice ve tvaru L.*

[indukcí vzhledem k n]

3.4.5. Dokažte, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Základ indukce: Pro $i = 1$ je tvrzení snadné:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{6}1(1+1)(2+1).$$

Indukční krok: Dále předpokládáme platnost pro $1, 2, \ldots, n$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Pro $n+1$ chceme ukázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Pro $n+1$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7 + 6\right) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

[indukcí vzhledem k n]

3.4.6. Dokažte $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \binom{n}{2}^2$. [graficky nebo indukcí]

3.4.7. Najděte chybu v následujícím důkazu. Indukcí podle n dokážeme, že každých n čísel je sobě rovných: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Pro $n = 1$ jistě platí $x_1 = x_1$. Nechť tvrzení platí pro obecné n. Ukážeme, že platí i pro $n+1$ čísel: $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Dle indukčního předpokladu je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, a současně $x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$. Nyní z tranzitivity rovnosti vyplývá $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$. [chybně zvolený základ indukce $n = 1$]

3.4.8. Najděte chybu v následujícím důkazu. Indukcí podle n dokážeme, že každých $n \geq 2$ různoběžných přímek má právě jeden společný bod. Pro $n = 2$ tvrzení jistě platí: dvě různoběžky p_1 a p_2 mají společný právě jeden bod. Nechť tvrzení platí pro n přímek. Ukážeme, že platí i pro $n+1$ přímek: $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$. Dle indukčního předpokladu mají přímky $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jediný společný bod, a současně přímky $p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ mají jediný společný bod. Označíme P společný bod přímek p_2 a p_3. Podle indukčního předpokladu je tento bod společný pro prvních n přímek i pro posledních n přímek a je proto společný pro všech $n+1$ přímek. [chybně zvolený základ indukce $n = 2$]

3.4.9. Ukažte, že každé poštovné větší než 12 Kč může být získáno užitím známek v hodnotě 4 Kč a 5 Kč. [indukcí vzhledem k ceně c, krok po 4]

3.4.10. Ukažte, že každé poštovné větší než $(h_1-1)(h_2-1)$ Kč může být získáno užitím známek v hodnotě h_1 Kč a h_2 Kč.

3.4.11. Dokažte Bernoulliho nerovnost: Pro každé přirozené n a reálné $x > -1$ platí nerovnost $(1+x)^n \geq 1+nx$. [indukcí vzhledem k n]

3.4.12. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ [indukcí vzhledem k n]

3.5 Vztahy s kombinačními čísly

3.5.1. Upravte výraz $\binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n+3}$ na jediné kombinační číslo. $\left[\binom{2n+1}{n-2}\right]$

3.5.2. Upravte výraz $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4}$ na jediné kombinační číslo. $\left[\binom{n+5}{4}\right]$

3.5.3.* Upravte výraz $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i}$ na jediné kombinační číslo. $\left[\binom{n+k+1}{k}\right]$

3.5.4. Pro jaká n platí $C(n-1,3) + C(n+2,3) + 10 = P(n,3)$? $[n = 3, 8]$

3.5.5. Ukažte, že platí

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

[kombinatoricky (čísla $1, 2, \ldots, 2n$) nebo přímo]

3.5.6. Ukažte, že platí

$$\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = n^3$$

[přímo]

3.5.7. Zdůvodněte (bez výpočtu), že platí

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

[kombinatoricky (čísla $1, 2, \ldots, 2n$)]

3.5.8. Upravte výraz $1 + 2\binom{n}{1} + \cdots + (k+1)\binom{n}{k} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n}$ na jediné kombinační číslo. $\left[(n+2)2^{n-1}\right]$

3.5.9. Ukažte, že platí

$$\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5} + \cdots = 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + \cdots$$

3.5.10. Vypočítejte

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

$\left[3!\binom{n+1}{3}\right]$

3.6 Důkazy počítáním

3.6.1. Existují na VŠB dva studenti se stejným posledním čtyřčíslím rodného čísla? [Dirichletův princip]

3.6.2. Ukažte, že na Zemi žijí dva lidé se stejným počtem vlasů. [Dirichletův princip]

3.6.3. V místnosti je n lidí. Každý z nich má v místnosti několik známých (třeba i žádného). Předpokládáme, že relace „mít známého“ je symetrická. Ukažte, že někteří dva lidé mají v ;místnosti stejný počet známých. [Dirichletův princip, a když někdo $n-1$ známých, nemůže být 0.]

3.6.4. Máte 4 různá čísel od 1 do n ($n \geq 4$). Ukažte, že některá dvě dávají sudý součet. Kolik nejméně čísel zaručí sudý součet? [Dirichletův princip, min=3]

3.6.5. Máte k různých čísel od 1 do n ($n \geq k \geq 2$). Pro jaké nejmenší k máme zaručeno, že některá dvě dávají lichý součet. $\left[k_{min} = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right]$

3.6.6. Na čtrnáctidenní dovolenou jelo 20 lidí. Každé odpoledne hrají stolní tenis. U každého ze dvou stolů se hraje postupně šest zápasů, Ukažte, že některí dva lidé spolu během celé dovolené nehráli. [počet dvojic, Dirichletův princip]

3.6.7. V Plzni se v městský dopravních prostředcích štípají lístky. Po Plzni jezdí 150 tramvají, 90 trolejbusů a 120 autobusů. Ukažte, že pokud se štípe vždy 3, 4 nebo 5 políček z devíti, tak musí být v některých vozech stejné kombinace. $[336 < 360]$

3.6.8.* Ukažte, že vyřízneme-li z šachovnice dva protilehlé rohy, potom není možné šachovnici pokrýt dominovými kostkami.

3.6.9.* Ze šachovnice odebereme dvě políčka různé barvy. Ukažte, že je možno pokrýt dominem.

3.6.10. Ukažte, že neexistuje univerzální bezztrátový kompresní algoritmus, tj. taková kompresní funkce, která libovolnou posloupnost n bajtů zkompresuje na posloupnost délky menší než n. [Neexistuje injektivní zobrazení $VSTUP \to VYSTUP$.]

3.7 Příklady k procvičení

3.7.1. Dokažte, že pro každé přirozené n je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti. [přímo nebo indukcí]

3.7.2. Dokažte, že platí

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

[indukcí podle n]

3.7.3. Dokažte, že pro všechna přirozená $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) \cdot 3^i = (n-1) \cdot 3^{n+1} + 3.$$

[indukcí vzhledem k n]

3.7.4. Najděte všechna řešení nerovnice $\binom{n}{2} > \binom{n}{3}$. $[n = 3, 4]$

3.7.5.* Dokažte, že platí

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

[přímo]

3.7.6. Ukažte, že aritmetický průměr dvou nezáporných reálných čísel je nejvýše roven geometrickému průměru, tj. $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$. [přímo]

3.7.7. Ukažte, že při hodu $n \geq 1$ kostkami je stejná pravděpodobnost, že součet bude sudý nebo lichý.

3.7.8. Ukažte, že počet všech zobrazení m prvkové množiny do n prvkové je n^m. [indukcí vzhledem k m]

3.7.9. Ukažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. [sporem]

4 Relace a zobrazení

4.1 Motivační příklady

Na první pohled se může pojem relace, který je zaveden jako podmnožina kartézské mocniny (kartézského součinu), zdát nezajímavý. Zkuste si však spočítat, kolik různých relací na konečné množině je možno definovat. Uvidíme, že formalizace pojmu relace je nezbytná i pro velmi malé množiny (na čtyřech, na deseti prvcích), neboť relací je příliš mnoho na to, abychom mohli všechny vypsat.

4.1.1.$^\heartsuit$ Kolik existuje relací na konečné n prvkové množině X? $\left[2^{n^2}\right]$

4.2 Pojem relace

Řekneme, že (binární) relace na množině A je

- *reflexivní* pokud $\forall x \in A : (x,x) \in R$,
- *ireflexivní* pokud $\forall x \in A : (x,x) \notin R$,
- *symetrická* pokud $\forall x,y \in A : (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$,
- *antisymetrická* pokud $\forall x,y \in A : (x,y),(y,x) \in R \Rightarrow x = y$,
- *asymetrická* pokud $\forall x,y \in A : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$,
- *tranzitivní* pokud $\forall x,y,z \in A : (x,y),(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$,
- *lineární* (*úplná*) pokud $\forall x,y,z \in A : (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$.

4.2.1. Kolik existuje relací na konečné n prvkové množině, které jsou

a) symetrické? $\left[2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$

b) antisymetrické? $\left[2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

c) asymetrické? $\left[3^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

4.2.2. Kolik existuje relací na konečné n prvkové množině X takových, které jsou symetrické i antisymetrické současně? $[2^n]$

4.2.3. Popište relaci $R \circ R$, je-li R

a) relace rovnosti „=“ na $\mathbb{N}$, $[R]$

b) relace menší nebo rovno „$\leq$“ na $\mathbb{N}$, $[R]$

c) relace menší „<“ na $\mathbb{N}$. $[R \circ R = \{(a,b) : a+1 < b, a,b \in \mathbb{N}\}]$

4.2.4. Najděte příklad relací R a S na nějaké množině X tak, aby $R \circ S \neq S \circ R$. $[X = \{1,2\}, R = \{(1,2)\}, S = \{(2,1)\}]$

4.2.5. Pro relaci R na množině A definujeme symbol R^n takto: $R^1 = R$, $R^{n+1} = R \circ R^n$.

a) Ukažte, že je-li A konečná množina, tak musí existovat taková $r,s \in \mathbb{N}$, $r < s$, že platí $R^r = R^s$. [relací na A je konečně mnoho]

b) Najděte takovou relaci R na konečné množině A, že $R^{r+1} \neq R^r$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

4.2.6.$^\heartsuit$ Sestavte na množině $\{1,2,3,4\}$ relace

a) rovnosti R, $[R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}]$

b) menší $<$, $[<= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}]$

c) menší nebo rovno $\leq$. [$\leq = R \cup <$]

4.2.7. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)\}$ definovaná na množině $A = \{1,2,3\}$? [reflexivní, antisymetrická, úplná]

4.2.8. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)\}$ definovaná na množině $A = \{1,2,3,4\}$? [antisymetrická]

4.2.9. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ na množině $A = \{1,2,3,4\}$? [antisymetrická, reflexivní i tranzitivní]

4.2.10. Jaké vlastnosti má relace soudělnosti R na N (dva prvky jsou v relaci, jestliže jejich největší společný dělitel je větší než 1)? [symetrická]

4.2.11. Může na konečné množině existovat relace, která

a)$^\heartsuit$je symetrická i antisymetrická? [ano]

b)$^\heartsuit$není symetrická ani antisymetrická? [ano]

c) není symetrická ani asymetrická? [ano]

d) je symetrická i asymetrická? [ano]

e) není symetrická, antisymetrická ani asymetrická? [ano]

4.2.12. Je relace dělitelnosti na $\mathbb{Z}$ antisymetrická? [není]

4.3 Uspořádání a ekvivalence

4.3.1. Nakreslete hasseovský diagram relace podmnožin množiny $A = \{1,2,3,4\}$. Najděte všechny minimální, maximální, největší a nejmenší prvky. [nejmenší i minimální $\emptyset$; největší i maximální A]

4.3.2. Máme dánu množinu $A = \{2,3,4,5,6,7\}$ s relací dělitelnosti $|$.

a) Nakreslete hasseovský diagram relace $|$ na množině A. Najděte všechny minimální, maximální, největší a nejmenší prvky. [minimální: 2, 3, 5, 7; maximální: 4, 5, 6, 7; největší ani nejmenší nemá]

b) Jaký prvek $a \in \mathbb{N}$ je třeba přidat do A, aby relace dělitelnosti měla nejmenší prvek? [1]

c) Jaký prvek $a \in \mathbb{N}$ stačí přidat do A, aby relace dělitelnosti měla největší prvek? [$NSN(2,3,4,5,6,7) = 420$]

d) Jaký *nejmenší* prvek $a \in \mathbb{N}$ je třeba přidat do A, aby relace dělitelnosti měla největší prvek? [0]

4.3.3. Sestavte relaci $R_\equiv$ kongruence podle modulu 4 na množině $\{1,2,\ldots,10\}$. Je $R_\equiv$ relací ekvivalence? Pokud ano, sestavte třídy rozkladu. [$R_\equiv = \{(1,5),(5,1),(1,9),(9,1),(5,9),(9,5),(2,6),(6,2),(2,10),(10,2),(6,10),(10,6),(3,7),(7,3),(4,8),(8,4)\}$, ano, $A_1 = \{1,5,9\}, A_2 = \{2,6,10\}, A_3 = \{3,7\}, A_4 = A_0 = \{4,8\}$]

4.3.4. Vezmeme systém všech tříprvkových podmnožin množiny $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Definujeme relaci $X \rho Y$, jestliže mají stejný největší prvek. Ověřte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud ano, kolik má tříd rozkladu a která třída má nejvíce prvků? [reflexivní, symetrická, tranzitivní; 5 tříd rozkladu, největší přísluší hodnotě 7]

4.3.5. Popište všechny relace na množině A, které jsou současně relacemi ekvivalence i uspořádáním. [právě relace rovnosti]

4.3.6. Mějme R a S libovolné relace ekvivalence na množině A. Které následující relace jsou také nutně ekvivalence?

a) $R \cap S$ [ano]

b) $R \cup S$ [ne]

c) $R \setminus S$ [ne]

d) $R \circ S$ [ano]

4.3.7. Mějme R a S libovolné relace částečného uspořádání na množině A. Které následující relace jsou také nutně částečného uspořádání?

a) $R \cap S$ [ano]

b) $R \cup S$ [ne]

c) $R \setminus S$ [ne]

d) $R \circ S$ [ano]

4.3.8. Kolik uspořádaných dvojic na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ patří do relace

a)$^\heartsuit$ rovnosti? [5]

b) menší? [10]

4.3.9. Kolik uspořádaných dvojic na množině $A = [1, n]$, kde $1 \leq n \in \mathbb{N}$, patří do relace

a) rovnosti? $[n]$

b) menší? $\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right]$

4.3.10. Je relace dělitelnosti relací částečného uspořádání

a) na $\mathbb{N}$? [ano]

b) na $\mathbb{Z}$? [ne]

c) na $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{N} \wedge a < b$? [ano]

4.3.11. Má smysl kreslit hasseovský diagram relace R, kde pro dva různé prvky platí $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$? [relace není antisymetrická – není jasné, který prvek zakreslit výš]

4.4 Funkce a zobrazení

4.4.1. Rozhodněte, zda následující funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou injekce, surjekce, bijekce nebo žádná z nich.

a) $f : y = x^4$ [žádná]

b) $g : y = \ln x$ [není funkce]

c) $h : y = e^x$ [injekce]

d) $k : y = \operatorname{tg} x$ [není funkce]

e) $k : y = \operatorname{arctg} x$ [injekce]

f) $l : y = x^3 - x$ [nic]

g) $m : y = (x - 1)^3$ [bijekce]

4.4.2. Najděte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je

a) injekce, ale není surjekcí $[f : y = \operatorname{arctg} x]$

b) surjekce, ale není injekcí $\left[f : y = x^3 - x\right]$

c) (netriviální) bijekce $\left[f : y = (x-1)^3\right]$

4.4.3. Najděte příklad funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je

a) injekce, ale není surjekcí $[f : y = 2x]$

b) surjekce, ale není injekcí $\left[f : \lfloor \frac{x}{2} \rfloor\right]$

c) (netriviální) bijekce $\left[f : y = \begin{cases} x+1 & \text{pro } x \text{ sudé} \\ x-1 & \text{pro } x \text{ liché} \end{cases}\right]$

4.4.4. Je-li $g \circ f$ surjekce,

a) musí být g surjekce? [ano]

b) musí být f surjekce? [ne]

4.4.5. Je-li $g \circ f$ prostá,

a) musí být g prostá? [ne]

b) musí být f prostá? [ano]

4.4.6. Je-li $g \circ f$ prostá, musí být g prostá? Musí být f prostá? [a) ne $g : y = \ln |x|$, $f : y = e^x$, b) ano]

4.4.7. Ukažte, že přirozených čísel i celých čísel je stejně, tj. že platí $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. [Najdeme bijekci a ukážeme, že se jedná o bijekci.]

4.5 Skládání zobrazení a permutace

4.5.1. Ukažte, že zobrazení ρ přiřazující číslu x z množiny $0, 1, \ldots, 6$ číslo $x \cdot 3 (\bmod 7)$ je permutace. Zapište permutaci ρ pomocí a) matice, b) pomocí cyklů. Jaký je řád této permutace? [a) $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\rho = (0)(132645)$. Řád ρ je 6.]

4.5.2. Určete řád permutace $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ [12]

4.5.3. Kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ s jediným cyklem? $[(n-1)!]$

4.5.4. Jakého nejvyššího řádu najdete permutaci na množině A, je-li

a) $A = [1, 9]$ [20]

b) $A = [1, 10]$ [30]

c) $A = [1, 13]$ [60]

4.5.5. Představme si, že máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \ldots, 32$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že vloží sudé karty mezi liché. Dostaneme pořadí $1, 17, 2, 18, 3, 19, \ldots, 16, 32$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček? [5]

4.5.6.** Představme si, že máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \ldots, n = 2t$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že vloží sudé karty mezi liché. Dostaneme pořadí $1, t+1, 2, t+2, 3, 19, \ldots, t, 2t$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

4.5.7.** Představme si, že máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \ldots, n$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že vloží sudé karty mezi liché. Dostaneme pořadí $1, \lceil\frac{n}{2}\rceil + 1, 2, \lceil\frac{n}{2}\rceil + 2, 3, 19, \ldots, n, \lceil\frac{n}{2}\rceil$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

4.5.8. Označme $r(n)$ funkci, která každému číslu n přiřadí největší řád permutace na n-prvkové množině. Ukažte, že $r(n)$ je neklesající funkce. [ke každé permutaci n prvkové množiny najdeme permutaci $n+1$ prvkové množiny přidáním cyklu $(n+1)$]

4.6 Princip inkluze a exkluze

4.6.1. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků $2, 3, 5$? [266]

4.6.2. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků $2, 3, 5, 7$? [228]

4.6.3. Na večírku se sešly 3 manželské páry. Kolika různými způsoby lze posadit těchto 6 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe? [32]

4.6.4.* Na večírku se sešlo n manželských párů. Kolika různými způsoby lze posadit těchto $2n$ lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe?

4.6.5.* Na plese se sešlo n manželských párů. Kolika různými způsoby může spolu tančit vždy všech $2n$ lidí tak, aby manželé netančili spolu?

4.6.6.* (Problém šatnářky) Na shromáždění přišlo n hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět? $\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}\right]$

4.6.7. Na shromáždění přišlo 5 hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět? $\left[\frac{11}{30}\right]$

4.6.8. Máme dva zamíchané balíčky 32 karet. Z každého obrátíme shora vždy jednu kartu. jaká je pravděpodobnost, že nikdy nebudou vytaženy dvě stejné karty? $[\approx 0.36788]$

4.6.9. Kolika způsoby je možno vybrat pět karet z 52 tak, aby mezi nimi byla od každé barvy alespoň jedna karta? [685464]

4.6.10. Kolika způsoby rozmístíme r objektů do pěti schránek tak, aby alespoň jedna byla prázdná? $\left[\binom{5}{1}4^r - \binom{5}{2}3^r + \binom{5}{3}2^r - \binom{5}{4}1^r + 0\right]$

4.6.11. Kolik existuje n prvkových posloupností čísel $0, 1, \ldots, 9$ takových, které obsahují vždy čísla 1, 2 a 3? Čísla se mohou opakovat. $[10^n - 3 \cdot 9^n + 3 \cdot 8^n - 7^n]$

4.7 Příklady k procvičení

4.7.1. Kolik nul na konci má

a) číslo 50!? [12]

b) číslo 1234!? [305]

6 Úvod do teorie grafů

6.1 Motivační příklady

6.1.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal. [dle věty 1.1.]

6.1.2. Máme 6 házenkářských týmů, které mají odehrát 15 zápasů, každý s každým. Je možné odehrát celý turnaj během pěti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy? [užitím výsledku o hranovém barvení grafu]

6.1.3. Máme 7 házenkářských týmů, které mají odehrát 21 zápasů, každý s každým. Ukažte, že není možné odehrát celý turnaj během šesti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy. [Dirichletův princip nebo užitím výsledku o hranovém barvení grafu]

6.2 Pojem grafu

6.2.1.$^\heartsuit$ Nakreslete graf $G(V,E)$, je-li dáno

a) $V = \{a,b,c,d\}$ a $E = \{ab, ac, ad\}$. [$K_{1,3}$]

b) $V = \{k,l,m,n,o\}$ a $E = \{kl, mn, mo, lm, ko\}$. [$C_5$]

c) $V = \{k,l,m,n,o,p\}$ a $E = \{kl, mn, mp, lo, ok, np\}$. [$2C_3$]

d) $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ a $E = \{12, 13, 14, 25, 26, 57, 68\}$ [langusta $L(2,1,1)$]

6.2.2.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má P_n (dle značení ve skriptech)? [$|V(P_n)| = n+1$, $|E(P_n)| = n$]

6.2.3.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má K_n? $\left[|V(K_n)| = n,\ |E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\right]$

6.2.4.$^\heartsuit$ Kolik hran a kolik vrcholů má $K_{m,n}$? [$|V(K_{m,n})| = m+n$, $|E(K_{m,n})| = mn$]

6.2.5.$^\heartsuit$ Srovnejme grafy $K_{7,7}$ a K_{10}.

a) Který má více vrcholů? [$K_{7,7}$]

b) Který má více hran? [$K_{7,7}$]

6.3 Stupně vrcholů v grafu

6.3.1. Jaký je největší a nejmenší stupeň vrcholu v grafu

a) P_n [$\delta(P_n) = 1$, $\Delta(P_n) \in \{1,2\}$]

b) C_n? [$\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$]

c) K_n? [$\delta(K_n) = \Delta(K_n) = n-1$]

d) $K_{m,n}$? [$\delta(K_{m,n}) = \min\{m,n\}$ a $\Delta(K_{m,n}) = \max\{m,n\}$]

6.3.2.$^\heartsuit$ Napište stupňovou posloupnost grafu

a) P_5, [$1,1,2,2,2,2$]

b) C_4, [$2,2,2,2$]

c) K_4, [$3,3,3,3$]

d) $K_{3,2}$. [$2,2,2,3,3$]

6.3.3. Kolik existuje různých grafů na n vrcholech. Rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1, 2, 3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a s $E_2 = \{23\}$. $\left[2^{\binom{n}{2}}\right]$

6.3.4. Kolik existuje různých bipartitních grafů na $m + n$ vrcholech. Rozlišujeme pojmenování vrcholů! $[2^{mn}]$

6.3.5. Pro jaké n je K_n cestou? $[n = 0,\ n = 1]$

6.3.6. Pro jaké n je K_n cyklem? $[n = 3]$

6.3.7. Pro jaké n je $K_{m,n}$ cyklem? $[n = m = 2]$

6.3.8. Pro jaké m, n je $K_{m,n}$ cestou? [pro $m = n = 1$ nebo pro $m = 2, n = 1$ nebo pro $m = 1, n = 2$]

6.3.9.$^\heartsuit$ Kolik hran má graf

a) s deseti vrcholy stupně 5? [25]

b) s 11 vrcholy stupně 5? [takový graf neexistuje]

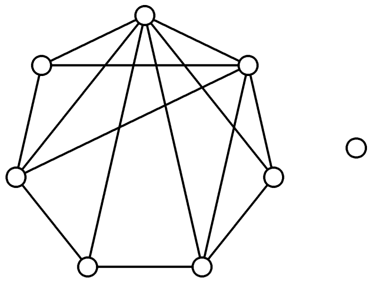
c) se stupňovou posloupností $(1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$ [18]

d) se stupňovou posloupností $(1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$ [takový graf neexistuje]

e) se stupňovou posloupností $(1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$ [takový graf neexistuje]

6.3.10. Kolik vrcholů má graf, který má 15 hran, 3 vrcholy stupně 4 a zbývající vrcholy stupně 3? [9 vrcholů]

6.3.11. Určete stupňovou posloupnost grafu G na Obrázku 6.1. Je to jediný graf s touto stupňovou posloupností?



Obrázek 6.1: *Graf G.*

$[(0, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6),$ ne$]$

6.3.12. Nakreslete graf se stupňovou posloupností

a)$^\heartsuit$ $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ [takový graf neexistuje]

b) $(1, 1, 1, 2, 2, 5)$

c) $(0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$

d) $(2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5)$

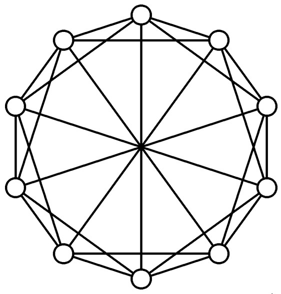
e) $(1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7)$ [takový graf neexistuje]

f)$^\heartsuit$ $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$ [takový graf neexistuje]

g) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$

6.3.13. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu $K_{5,5}$. [5]

6.3.14. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu na Obrázku 6.2.



Obrázek 6.2: *Cirkulant* $C_{10}(1, 2, 5)$.

[tři]

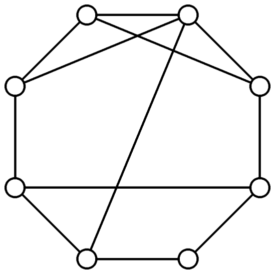
6.4 Podgrafy a isomorfismus

Mějme dána kladná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Cirkulantem $C_n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rozumíme graf $G(V, E)$ na n vrcholech $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, kde hranová množina je

$$E = \{v_i v_{(i+a_j) \bmod k} : 0 \leq i \leq n-1 \wedge 1 \leq j \leq k\}.$$

Příklad cirkulantu $C_{10}(1, 2, 5)$ je na Obrázku 6.4.

6.4.1. Mějme graf G na Obrázku 6.3.



Obrázek 6.3: *Graf G.*

a)$^\heartsuit$ Jaká je nejdelší kružnice obsažená jako podgraf v grafu G? [C_8]

b)$^\heartsuit$ Jaká je nejkratší kružnice obsažená jako podgraf v grafu G? [C_3]

c)$^\heartsuit$ Jaká je nejdelší cesta obsažená jako podgraf v grafu G? [P_7]

d)$^\heartsuit$ Jaká je nejkratší indukovaná kružnice v grafu G? [C_3]

e)* Jaká je nejdelší indukovaná kružnice v grafu G? [C_5]

f)* Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu G? [P_5]

g) Jaká je velikost největší nezávislé množiny vrcholů grafu G? [3]

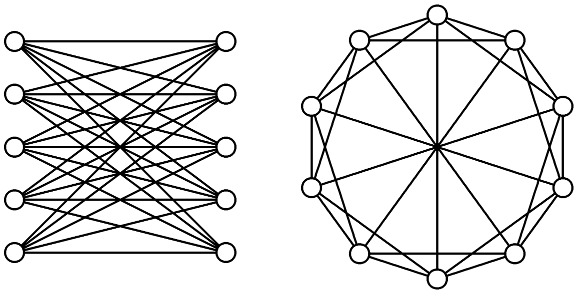
h) Existuje nějaký neisomorfní graf se stejnou stupňovou posloupností? [ano]

6.4.2. Kolik existuje neisomorfních 2-pravidelných grafů

a) na 5 vrcholech? [1]

b) na 6 vrcholech? [2]

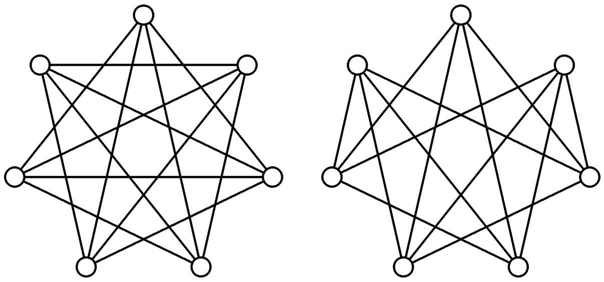
6.4.3. Jsou isomorfní $K_{5,5}$ a cirkulant $C_{10}(1,2,5)$?



Obrázek 6.4: *Kompletní bipartitní graf* $K_{5,5}$ *a cirkulant* $C_{10}(1,2,5)$.

[ne]

6.4.4. Jsou isomorfní grafy $K_7 - C_7$ a $K_7 - (C_3 \cup C_4)$?



Obrázek 6.5: *Grafy* $K_7 - C_7$ *a* $K_7 - (C_3 \cup C_4)$.

[ne]

6.4.5. Jsou následující dva grafy G a H isomorfní?

Obrázek 6.6: *Grafy* G *a* H.

[ne]

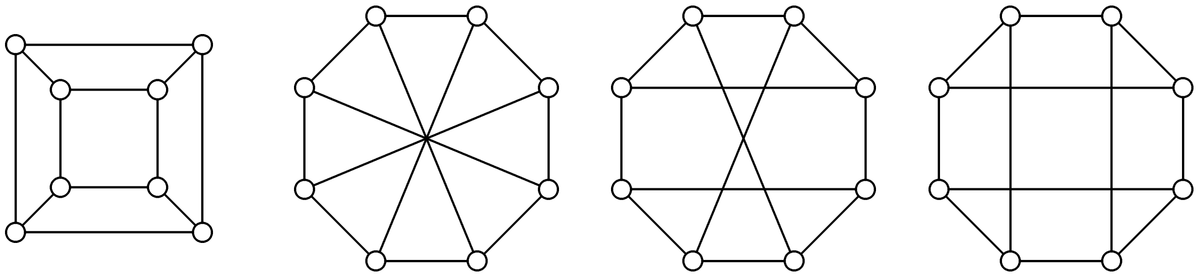
6.4.6. Kolik existuje neisomorfních 5-pravidelných grafů na osmi vrcholech? [tři]

6.4.7. Existují dva neisomorfní grafy se stupňovou posloupností

a) $(3,3,3,3,3,3)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují. [ano, $K_6 - C_6$ a $K_6 - 2C_3$]

b) $(2,2,3,3)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují. [ne]

6.4.8. Najděte mezi grafy G_1, G_2, G_3 a G_4 na Obrázku 6.7 všechny isomorfní dvojice. Pečlivě zdůvodněte.



Obrázek 6.7: *Grafy* G_1*,* G_2*,* G_3 *a* G_4*.*

[$G_1 \simeq G_4$ a $G_2 \simeq G_3$]

6.4.9. Najděte všechny neisomorfní jednoduché grafy na čtyřech vrcholech. [jedenáct]

6.5 Orientované grafy a multigrafy

6.5.1.* Dva hráči přidávají postupně 1, 2, nebo 3 centy na hromádku. Ten, kdo na hromádku přidá šestnáctý cent, vyhrál. Modelujte hru s užitím orientovaného grafu a ukažte, že druhý hráč může vždy vyhrát.

6.5.2. Najděte všechny neisomorfní orientované grafy na třech vrcholech.

6.6 Implementace grafů

6.6.1.* Naprogramujte algoritmus, jak rozmístit 8 královen na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovaly.

6.6.2. Naprogramujte algoritmus, který vygeneruje všechny grafy na n vrcholech, jestliže rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1, 2, 3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a s $E_2 = \{23\}$.

6.7 Příklady k procvičení

6.7.1.$^\heartsuit$ Srovnejme grafy $K_{6,6}$ a K_9.

a) Který má více vrcholů? [$K_{6,6}$]

b) Který má více hran? [stejně hran]

6.7.2. Srovnejme grafy $K_{20,20}$ a K_{29}.

a) Který má více vrcholů? [$K_{20,20}$]

b) Který má více hran? [K_{29}]

6.7.3. Kolik hran a kolik vrcholů má C_n? [$|V(C_n)| = n$, $|E(C_n)| = n$]

6.7.4. Pro jaké m, n neobsahuje $K_{m,n}$ žádnou kružnici? [pouze je-li $m = 1$ nebo $n = 1$]

6.7.5.$^\heartsuit$ Kolik hran musíme odebrat z grafu K_6, abychom dostali $K_{3,3}$? [6 hran]

6.7.6. Pro která n je následující stupňová posloupnost grafová?

a) $(1, 2, \ldots, n)$ [pro žádné n]

b) $(0, 1, \ldots, n-1)$ [pouze $n = 1$]

c) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n)$ [pro každé $n \geq 1$]

6.7.7. Pro které hodnoty n a r existuje grafu na n vrcholech, kde každý vrchol je stupně r? Dokažte. [pro n, r liché graf neexistuje, jinak ano]

6.7.8. Jsou grafy $K_{3,3}$ a cirkulant $C_6(1, 3)$ isomorfní? [ano]

6.7.9. Jsou grafy $K_{4,4}$ a cirkulant $C_8(1, 2)$ isomorfní? [ne]

6.7.10. Jsou následující dva grafy G a H isomorfní?

Obrázek 6.8: *Grafy G a H.*

[ne]

6.7.11.* Na jakém nejmenším počtu vrcholů najdete dva neisomorfní grafy se stejnou stupňovou posloupností? [$n = 5$]

6.7.12.* Strnulý graf má pouze triviální automorfismus. Najděte strnulý graf s co nejmenším počtem vrcholů. [nejmenší strnulý graf má 6 vrcholů]

6.7.13. Kolik existuje grafů se sedmi vrcholy stupně 2? [dva]

6.7.14. Kolik existuje grafů s deseti vrcholy stupně 2? [pět]

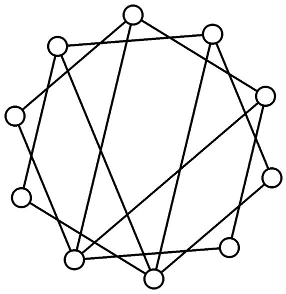
7 Souvislost

7.1 Souvislost a komponenty grafu

7.1.1.♡ Kolik komponent souvislosti má souvislý graf? [jedinou komponentu]

7.1.2.♡ Kolik komponent souvislosti má nesouvislý graf? [alespoň dvě komponenty]

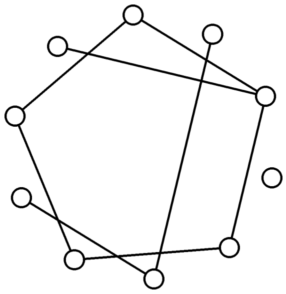
7.1.3.♡ Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 7.1? Je souvislý?



Obrázek 7.1: *Graf G.*

[dvě komponenty, ne]

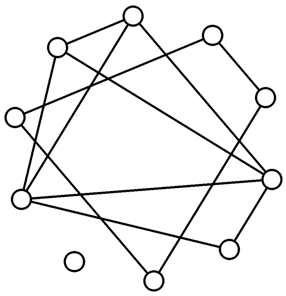
7.1.4. Kolik komponent souvislosti má graf G na Obrázku 7.2? Je souvislý?



Obrázek 7.2: *Graf G.*

[tři komponenty, ne]

7.1.5.♡ Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 7.3? Je souvislý?



Obrázek 7.3: *Graf G.*

[tři komponenty, ne]

7.1.6. Kolik komponent souvislosti má cirkulant $C_{12}(3,6)$? [tři]

7.1.7. Kolik komponent má graf s deseti vrcholy stupně 5? Dokažte. [jednu komponentu]

7.1.8.♡ Kolik komponent má graf s patnácti vrcholy stupně 5? Dokažte. [žádnou, takový graf neexistuje]

7.1.9. Kolik komponent může mít graf s deseti vrcholy stupně 2? Dokažte. [jednu, dvě nebo tři komponenty]

7.1.10. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty? Najdete takový graf? [36 hran, $K_1 \cup K_9$]

7.1.11. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty a žádný vrchol stupně většího než 3? Najdete takový graf? [graf $K_4 \cup K_6 - C_6$ nebo $K_6 - (C_3 \cup C_3)$ mají 15 hran]

7.1.12. Kolik nejméně hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty? [8 hran, $2P_4$]

7.1.13. Kolik nejméně hran může mít graf na n vrcholech, který má k komponent? [$n - k$ hran, $P_{n-k-1} \cup (k-1)K_1$]

7.2 Prohledávání grafu

7.2.1. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do šířky?

7.2.2. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do hloubky?

7.3 Vyšší stupně souvislosti

7.3.1. Mějme cyklus C_n.

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti C_n? [2]

b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti C_n? [2]

7.3.2. Mějme kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$.

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti $K_{m,n}$? [$\min\{m, n\}$]

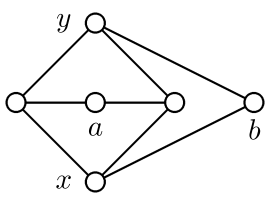
b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti $K_{m,n}$? [$\min\{m, n\}$]

7.3.3.$^{\heartsuit}$ Víte, že minimální stupeň grafu G je 5.

a) Co můžete říci o hranové souvislosti grafu G? [hranový stupeň souvislosti je menší než 5]

b) Co můžete říci o vrcholové souvislosti grafu G? [vrcholový stupeň souvislosti je menší než 5]

7.3.4. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 7.4.



Obrázek 7.4: *Graf* $K_{3,3} - e$.

a) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy a, b? Zdůvodněte! [dvě]

b) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy x, y? Zdůvodněte! [tři]

7.3.5.♡ Kolik musíme přidat hran do grafu P_5 (podle značení ve skriptech), aby byl 2-souvislý? [jednu]

7.3.6. Kolik musíme přidat hran do grafu P_5 (podle značení ve skriptech), aby byl 3-souvislý? [čtyři]

7.3.7. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je 1.

7.3.8. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je 2.

7.3.9. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je $k \le r$.

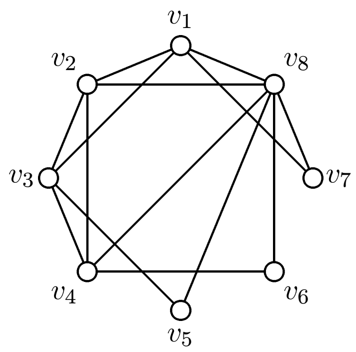
7.3.10. Mějme libovolná přirozená čísla $a \le b \le c$. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně c a hranová souvislost je b a vrcholová souvislost je a.

7.3.11. Najděte příklad souvislého grafu, jehož vrcholová souvislost je menší než hranová souvislost. [motýlek]

7.3.12. Najděte příklad souvislého grafu, jehož hranová souvislost je menší než vrcholová souvislost. [neexistuje]

7.4 Eulerovské grafy

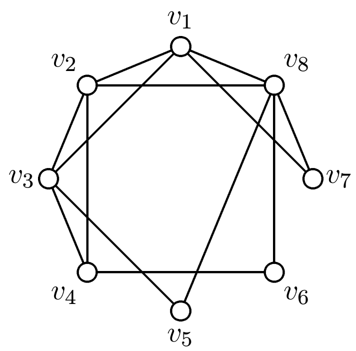
7.4.1. Je graf na Obrázku 7.5 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



Obrázek 7.5: *Graf G.*

[ano, například tah $v_1, v_2, v_3, v_4, v_8, v_1, v_3, v_5, v_8, v_2, v_4, v_6, v_8, v_7, v_1$]

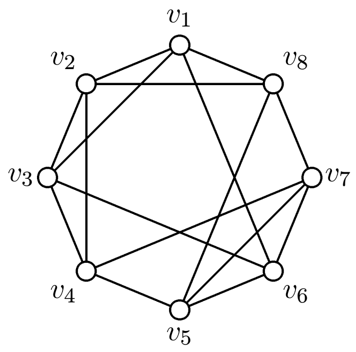
7.4.2. Je graf na Obrázku 7.6 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



Obrázek 7.6: *Graf G.*

[ne]

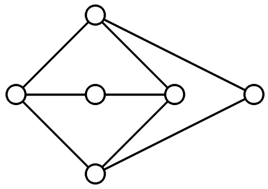
7.4.3. Je graf na Obrázku 7.7 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.



Obrázek 7.7: *Graf G.*

[ano, například tah $v_1, v_3, v_6, v_1, v_2, v_4, v_7, v_5, v_8, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$]

7.4.4. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 7.8.



Obrázek 7.8: *Graf $K_{3,3} - e$.*

a) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ne]

b) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním otevřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ne]

c) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit dvěma otevřenými tahy? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ano]

d) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním otevřeným tahem? [1 hranu]

e) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním uzavřeným tahem? [2 hrany]

7.4.5. Je cirkulant $C_6(1, 2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, 6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano, například $v_1, v_3, v_5, v_1, v_2, v_4, v_6, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1$]

7.4.6. Je cirkulant $C_6(1, 3)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, 6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [není eulerovský]

7.4.7. Je cirkulant $C_8(1, 2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, 8\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano, například $v_1, v_3, v_5, v_7, v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$]

7.4.8.$^\heartsuit$ Pro která n je možno K_n nakreslit jedním uzavřeným tahem? [pro n liché]

7.4.9. Pro která n je možno K_n nakreslit jedním otevřeným a nikoli uzavřeným tahem? [pouze pro $n = 2$]

7.4.10. Pro která m, n je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? [pro m, n sudé]

7.4.11. Pro která n je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním otevřeným tahem? [pro $m = 2$, n liché nebo $n = 2$, m liché nebo $m = n = 1$]

7.5 Příklady k procvičení

7.5.1.$^\heartsuit$ Může existovat souvislý graf, který má více vrcholů než hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte. [ano, K_2]

7.5.2. Může existovat souvislý graf, který má n vrcholů a méně než $n-1$ hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte. [takový graf nemůže existovat]

7.5.3. Ukažte, že není možné putovat koněm po celé šachovnici 3×3. [graf úlohy není souvislý]

7.5.4. Kolik nejvíce hran může mít graf s $n \geq 2$ vrcholy a 2 komponentami? $\left[\binom{n-1}{2}\right]$

7.5.5.* Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a k komponentami? Předpokládáme, že $k \leq n$. $\left[\binom{n-k+1}{2}\right]$

7.5.6. Kolik nejméně hran musí mít 3-souvislý graf

a) na 6 vrcholech? [9]

b) na 12 vrcholech? [18]

c) na 9 vrcholech? [14]

7.5.7. Je graf $K_{4,4}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano]

7.5.8. Je graf $K_{4,6}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano]

7.5.9. Pro které n je graf $K_{2,n}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [n sudé]

7.5.10. Najděte příklad souvislého grafu, který má dva vrcholy lichého stupně a všechny ostatní vrcholy sudého stupně a do kterého

a) stačí přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf? [$K_5 - e$, P_2]

b) není možné přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf? [$K_4 - e$, K_2]

7.5.11. Pro každé t najděte příklad souvislého grafu, který

a) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy. [K_{2t}]

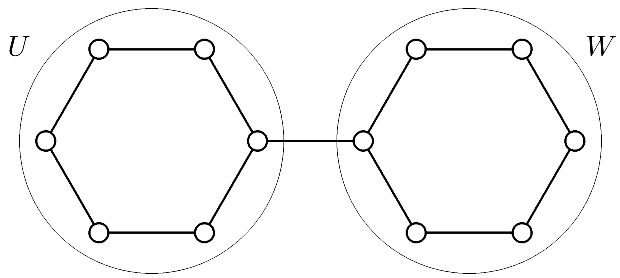
b) není souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy. [tK_2]

c) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, ale není možné přidáním t hran získat eulerovský graf. [K_{2t}]

d)* je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, a přidáním t hran je možné získat eulerovský graf.. [$K_{1,2t}$]

7.5.12. Pro libovolné sudé r a libovolné $n > r$ najděte příklad r-pravidelného eulerovského grafu na n vrcholech. [například cirkulant $C_n(1, 2, \dots, \frac{r}{2})$]

7.5.13. Máme dán graf G na Obrázku 7.9.



Obrázek 7.9: *Graf G.*

a) Je graf G eulerovský? [ne]

b) Jak přidat hrany pouze mezi vrcholy v množině U a pouze mezi vrcholy v množině W tak, aby vznikl eulerovský graf? Pokud to není možné, dokažte! [není možné]

7.5.14. Definujme graf $Z_2(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké n prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy jsou disjunktní.

a) Pro která n je graf $Z_2(n)$ souvislý? $[n \geq 5]$

b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný? [ano]

c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$?

7.5.15. Definujme graf $Z_2^*(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké n prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy nejsou disjunktní.

a) Pro která n je graf $Z_2(n)$ souvislý? [všechna $n \geq 2$]

b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný? [ano]

c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$? $[n - 2]$

7.5.16. Ukažte, že souvislý graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit t otevřenými eulerovskými tahy. [přidáním pomocného vrcholu]

7.5.17. Ukažte, že pro nesouvislé grafy nemusí platit, že graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit t otevřenými eulerovskými tahy. [například $K_2 \cup K_3$ nevyhovuje]

8 Vzdálenost a metrika

8.1 Vzdálenost v grafu

8.1.1.$^{\heartsuit}$ Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_4? [1]

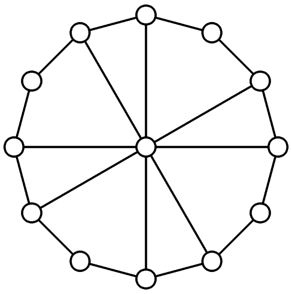
8.1.2.$^{\heartsuit}$ Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_1? [0]

8.1.3.$^{\heartsuit}$ Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu C_7? [3]

8.1.4.$^{\heartsuit}$ Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_{7,8}$? [2]

8.1.5. Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu W_n? [1 pro $n = 3$, 2 jinak]

8.1.6. Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu G na Obrázku 8.1?



Obrázek 8.1: *Graf G.*

[4]

8.1.7. Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_n? [0 pro $n = 1$, 1 jinak]

8.1.8.$^{\heartsuit}$ Jaká je největší vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu P_n? [n (oba koncové vrcholy cesty P_n.]

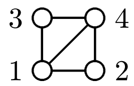
8.1.9. Jaká je největší vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu $K_{m,n}$? [1 pro $m = n = 1$, jinak 2]

8.1.10. Jaká je největší vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu C_n? $\left[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right]$

8.1.11. Najděte příklad grafu na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou nesousedních vrcholů 2. [$K_{4,4}$]

8.1.12. Najděte graf na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou nesousedních vrcholů 2, s co nejmenším počtem hran. [$K_{1,7}$]

8.1.13. Vypočítejte metriku (matici udávající vzdálenosti mezi vrcholy) grafu $K_4 - e$ na Obrázku 8.2.

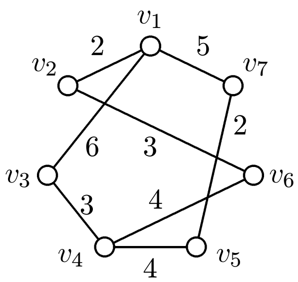


Obrázek 8.2: *Graf K_4 bez jedné hrany.*

[matice 4×4, kde $a_{ii} = 0$, políčka $a_{23} = a_{32} = 2$ a ostatní prvky jsou 1]

8.2 Vážená (ohodnocená) vzdálenost

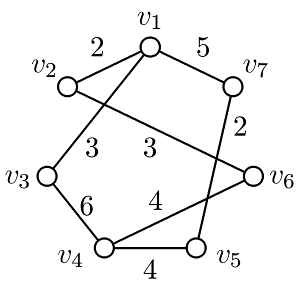
8.2.1. Máme dán graf G na Obrázku 8.3. Jaká je největší vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu G?



Obrázek 8.3: *Graf G.*

[9]

8.2.2. Máme dán graf G na Obrázku 8.4. Jaká je největší vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu G?



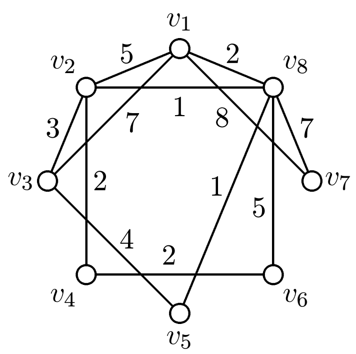
Obrázek 8.4: *Graf G.*

[10]

8.2.3. Jaká největší vzdálenost může být mezi dvěma vrcholy v cyklu délky 9, který je ohodnocený čísly $1, 2, \ldots, 9$ v nějakém libovolném pořadí. $[\lfloor\frac{45}{2}\rfloor]$

8.3 Dijkstrův algoritmus

8.3.1. Máme dán graf jako na Obrázku 8.5.



Obrázek 8.5: *Graf G.*

a) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_1? [dist$(v_1, v_1) = 0$, dist$(v_1, v_2) = 3$, dist$(v_1, v_3) = 6$, dist$(v_1, v_4) = 5$, dist$(v_1, v_5) = 3$, dist$(v_1, v_6) = 7$, dist$(v_1, v_7) = 8$, dist$(v_1, v_8) = 2$]

b) V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_1? [$v_1, v_8, v_2, v_5, v_4, v_3, v_6, v_7$ nebo $v_1, v_8, v_5, v_2, v_4, v_3, v_6, v_7$]

c) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_3? [dist$(v_3, v_1) = 6$, dist$(v_3, v_2) = 3$, dist$(v_3, v_3) = 0$, dist$(v_3, v_4) = 5$, dist$(v_3, v_5) = 4$, dist$(v_3, v_6) = 7$, dist$(v_3, v_7) = 11$, dist$(v_3, v_8) = 4$]

d) V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_3? [$v_3, v_2, v_5, v_8, v_4, v_1, v_6, v_7$ nebo $v_3, v_2, v_8, v_5, v_4, v_1, v_6, v_8$]

e) Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_5? [dist$(v_5, v_1) = 3$, dist$(v_5, v_2) = 2$, dist$(v_5, v_3) = 4$, dist$(v_5, v_4) = 4$, dist$(v_5, v_5) = 0$, dist$(v_5, v_6) = 6$, dist$(v_5, v_7) = 8$, dist$(v_5, v_8) = 1$]

f) V jakém pořadí budou objeveny vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_5? [$v_5, v_8, v_2, v_1, v_3, v_4, v_6, v_7$ nebo $v_5, v_8, v_2, v_1, v_4, v_3, v_6, v_7$]

g) Které dva vrcholy jsou nejvzdálenější? Jaká je jejich vzdálenost? [v_4 a v_7, dist$(v_6, v_7) = 12$]

h) Ze kterého vrcholu je maximální vzdálenost do všech ostatních vrcholů nejmenší?

8.3.2. Ve kterém místě selže Dijkstrův algoritmus, jestliže připustíme i záporná ohodnocení hran?

8.4 Příklady k procvičení

Hyperkrychlí řádu n budeme rozumět takový graf $G(V,E)$ na 2^n vrcholech, jehož vrcholovou množinu tvoří všechny binární vektory délky n

$$V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\ldots,n\}$$

a hrana je mezi každými dvěma vrcholy, jejichž vektory se liší v jediné souřadnici

$$E = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) : (a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V \wedge \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = 1\}.$$

Hyperkrychle řádu se značí Q_n.

8.4.1. Mějme graf Q_3 (hyperkrychle řádu 3). Kolik nejméně hran musíme přidat, aby největší vzdálenost mezi vrcholy grafu byla 2? [2]

8.4.2.$^\heartsuit$ Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu Q_n? Dokažte [n]

8.4.3.* Jak převést úlohu hledání nejkratší cesty i pro grafy s ohodnocenými vrcholy? [nahradit vrchol stupně d grafem K_d]

8.4.4. Kolik nejvíce vrcholů může mít graf, který má největší vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2? [počet vrcholů není omezen]

8.4.5. Kolik nejvíce vrcholů může mít 3-pravidelný graf, který má největší vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2? Nakreslete příklad takového grafu. [10, například Petersenův graf]

9 Stromy a les

9.1 Základní vlastnosti stromů

9.1.1. Kolik neisomorfních lesů existuje na čtyřech vrcholech? [1+1+2+2=6]

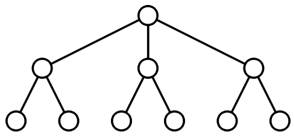
9.1.2. Kolik neisomorfních stromů existuje na pěti vrcholech? $[1+1+1=3]$

9.1.3. Kolik neisomorfních lesů existuje na pěti vrcholech? $[1+1+2+3+3=10]$

9.1.4. Najděte takový graf se dvěma kružnicemi, že vynecháním jediné hrany vznikne strom. [neexistuje]

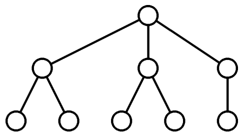
9.1.5.♡ Najděte centra následujících stromů.

a) Strom T na Obrázku 9.1.



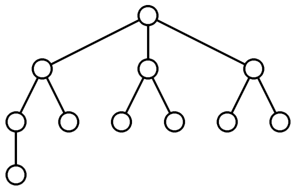
Obrázek 9.1: *Strom T.*

b) Strom T na Obrázku 9.2.



Obrázek 9.2: *Strom T.*

c) Strom T na Obrázku 9.3.



Obrázek 9.3: *Strom T.*

9.1.6. Máme dán strom se 17 vrcholy.

a) Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum? [15 nebo 16]

b) Kolik nejméně nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy? [jeden]

c) Kolik nejvíce nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy? [osm]

9.1.7.♡ Máme dán strom se 4 vrcholy. Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum? [2 nebo 3]

9.1.8. Můžeme algoritmus hledání centra použít i pro jiné grafy než stromy? Vysvětlete! [ne]

9.1.9.♡ Strom má 56 hran. Kolik může mít vrcholů? [57]

9.1.10. Acyklický graf má 70 vrcholů a 60 hran. Kolik má komponent? [10]

9.1.11. Acyklický graf má 60 vrcholů a 70 hran. Kolik má komponent? [takový graf neexistuje]

9.1.12.♡ Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom. [lehké]

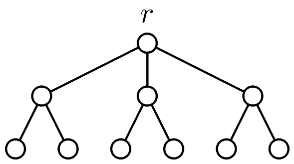
9.1.13. Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom. [neexistuje]

9.1.14. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom. [existuje]

9.1.15. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom. [existuje]

9.2 Kořenové a pěstované stromy

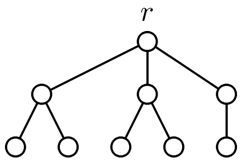
9.2.1. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 9.4.



Obrázek 9.4: *Kořenový strom* (T, r).

[00010110010110010111]

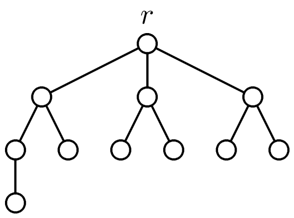
9.2.2. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 9.5.



Obrázek 9.5: *Kořenový strom* (T, r).

[000101100101100111]

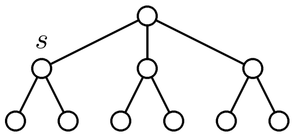
9.2.3. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 9.6.



Obrázek 9.6: *Kořenový strom* (T, r).

[0000110110010110010111]

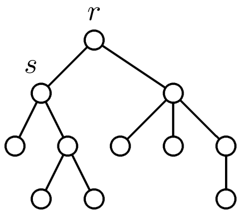
9.2.4. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, s) na Obrázku 9.7.



Obrázek 9.7: *Kořenový strom* (T, s).

[00101000101100101111]

9.2.5. Máme dán strom T na Obrázku 9.8



Obrázek 9.8: *Strom T.*

a) Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r). [000100101110010100111 1]

b) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu (T, r). [0000110101100100101111]

c) Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, s). [00100101100101001111]

d) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu (T, s). [00001101011001011011]

9.2.6. Nakreslete pěstovaný kořenový daný kódem

a) 000000000111111111.

b) 00010110010110010111 [viz Obrázek 9.4]

c) 0000101101001110001101111

d) 000010110100111000110 11 [toto není korektní kód]

e) 0000101101100111000110 11 [toto není korektní kód]

9.2.7. Je kód pěstovaného kořenového daného kódem minimální?

a) 000000000111111111. [ano]

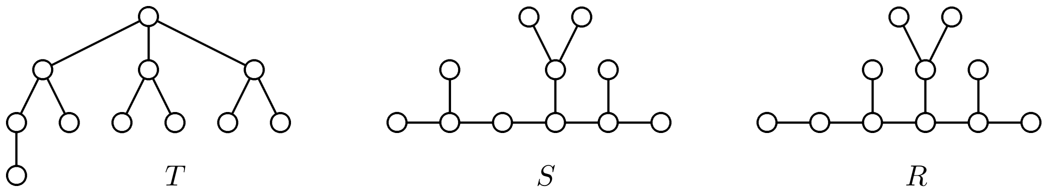
b) 00010110010110010111 [ano]

c) 0000101101001110001101111 [ne]

9.3 Isomorfismus stromů

9.3.1. Které kořenové stromy mají jednoznačně určený kód i když nejsou pěstované? [takové, kde všechny vrcholy ve vzdálenosti d od kořene mají stejný stupeň]

9.3.2. Rozhodněte, které z následujících stromů na Obrázku 9.9 jsou isomorfní.

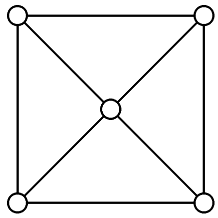


Obrázek 9.9: *Stromy T, S a R.*

[isomorfní jsou T a R]

9.4 Kostry grafů

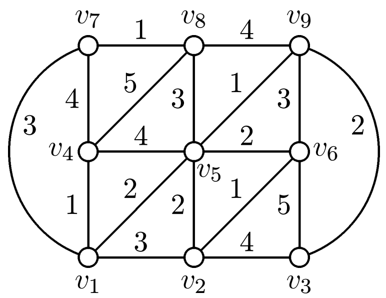
9.4.1. Kolik koster má následující graf W_4?



Obrázek 9.10: *Graf* W_4.

[$4 + 18 + 32 + 8 + 1 = 63$ možností]

9.4.2. Máme dán graf G na Obrázku 9.11.



Obrázek 9.11: *Graf* G.

a) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Kruskalova (hladového) algoritmu. Jaká je váha minimální kostry? [minimální váha je 13]

b) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Jarníkova (Primova) algoritmu. Výchozí vrchol je v_1. Jaká je váha minimální kostry? [minimální váha je 13]

c) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Borůvkova algoritmu. Jaká je váha minimální kostry? [nelze použít]

9.4.3. Jaké vlastnosti musí mít ohodnocení grafu, aby všechny tři algoritmy (Borůvkův, Jarníkův/Primův i Kruskalův (hladový) našly vždy stejnou kostru? [ohodnocení musí být injekcí]

9.5 Příklady k procvičení

9.5.1.$^\heartsuit$ Kolik různých koster má cyklus C_n? [n]

9.5.2.$^\heartsuit$ Kolik různých neisomorfních koster má cyklus C_n? [jedinou]

9.5.3. Máme graf K_4.

a) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_4? [2]

b) Kolik různých koster má graf K_4? [16]

9.5.4. Máme graf K_5.

a) Kolik různých koster má graf K_5? [125]

b) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_5? [3]

9.5.5. Máme graf K_6.

a) Kolik různých koster má graf K_6? [1296]

b) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_6? [6]

9.5.6. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního grafu K_n, aby zůstala kostra? $\left[\binom{n-1}{2}\right]$

9.5.7. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$, aby zůstala kostra? $[(m-1)(n-1)]$

9.5.8. Kolik nejméně vrcholů musí mít graf, který má dvě hranově disjunktní kostry? [4]

9.5.9. Najděte příklad souvislého grafu, který má 1001 koster. [spojení tří cyklů C_7, C_{11} a C_{13}]

10 Barvení a rovinné kreslení grafů

10.1 Motivační příklady

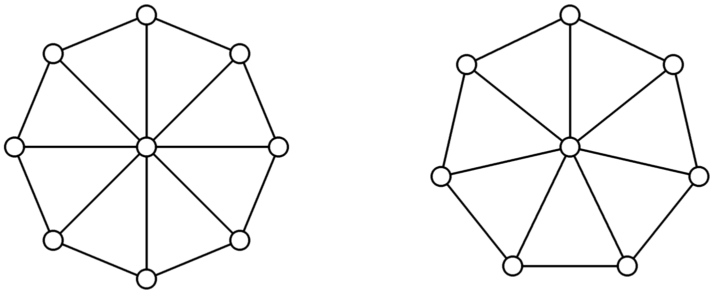
10.1.1. Skladovací problém: Ve skladu potravin máme různé druhy zboží. Podle hygienických norem se nesmí některé druhy potravin skladovat spolu v jedné místnosti. Naším úkolem je zjistit, kolik nejméně místností je potřeba ve skladu pronajmout, aby bylo zboží uloženo podle předpisů. Jak namodelujete skladovací problém pomocí teorie grafů. [převedeme na barvení jednoduchého grafu]

10.1.2. Podle předpisů se káva nesmí skladovat společně s rýží, rýže s moukou, mouka s jablky a jablka se nesmí skladovat společně s tropickým ovocem. Kolik nejméně místností je potřeba pro uskladnění všech druhů zboží? [stačí 2 místnosti]

10.1.3. Máme za úkol pronajmout skladové prostory, ve kterých se budou skladovat broskve, kukuřice, papriky, pšenice, rajčata, švestky a konzervy. Podle předpisů se obiloviny nesmí skladovat společně s ovocem, rajčata ani papriky se nesmí skladovat s pšenicí nebo kukuřicí a broskve se nesmí skladovat s rajčaty. Kolik nejméně místností je třeba pronajmout pro uskladnění všech druhů zboží? [3 místnosti]

10.2 Vrcholové barvení grafů

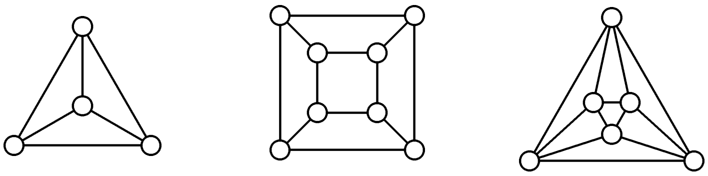
10.2.1. Jaké je chromatické číslo (barevnost) následujících grafů?



Obrázek 10.1: *Grafy W_8 a W_7.*

a) Graf W_8, viz Obrázek 10.1? [3]

b) Graf W_7, viz Obrázek 10.1? [4]



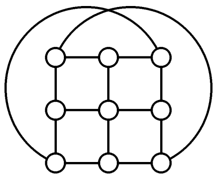
Obrázek 10.2: *Rovinná nakreslení pravidelného čtyřstěnu, šestistěnu a osmistěnu.*

c) Grafu pravidelného čtyřstěnu, viz Obrázek 10.2. [3]

d) Grafu pravidelného šestistěnu, viz Obrázek 10.2. [2]

e) Grafu pravidelného osmistěnu, viz Obrázek 10.2. [3]

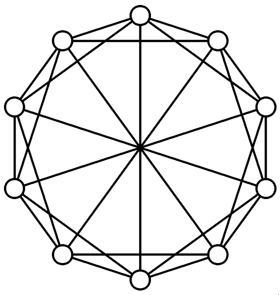
10.2.2. Jaké je chromatické číslo (barevnost) grafu G na Obrázku 10.3?



Obrázek 10.3: *Graf G.*

[3]

10.2.3. Jaké je chromatické číslo (barevnost) cirkulantu $C_{10}(1,2,5)$ na Obrázku 10.4?



Obrázek 10.4: *Cirkulant* $C_{10}(1,2,5)$.

[4]

10.2.4. Kolik musíme vynechat hran z grafu W_8 (viz Obrázek 10.1), aby jeho chromatické číslo bylo 2? [4]

10.2.5. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf, jestliže mu přidáme jednu hranu? [3]

10.2.6. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf, jestliže mu přidáme dvě hrany? [3 nebo 4]

10.2.7.♡ Kolika barvami lze obarvit strom. [1 pro $T = K_1$, 2 jinak]

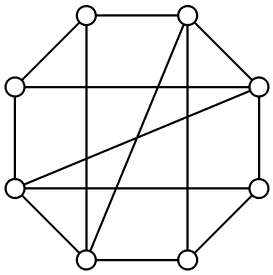
10.2.8. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) $K_n - e$? [$n - 1$]

10.2.9. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) C_n s jednou přidanou hranou v_1v_i, $i \in [1,n]$? [2 pro n, i sudé, 3 jinak]

10.2.10. Mám dán graf G. Co můžeme říci o barvenosti grafu G, jestliže známe $\Delta(G)$? [$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$]

10.3 Rovinné kreslení grafu

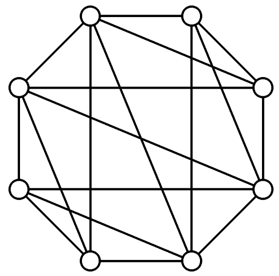
10.3.1. Pokud je to možné, nakreslete graf G na Obrázku 10.5 tak, aby se hrany neprotínaly.



Obrázek 10.5: *Graf G.*

[G je rovinný]

10.3.2. Pokud je to možné, nakreslete graf G na Obrázku 10.6 tak, aby se hrany neprotínaly.



Obrázek 10.6: *Graf G.*

[G je rovinný]

10.3.3. Ukažte, že po přidání libovolné hrany do grafu na Obrázku 10.6 výsledný graf již nebude rovinný. [užitím důsledku Eulerova vzorce]

10.3.4. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného čtyřstěnu. [graf pravidelného čtyřstěnu je rovinný]

10.3.5. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného šestistěnu (krychle). [graf pravidelného šestistěnu je rovinný]

10.3.6. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného osmistěnu. [graf pravidelného osmistěnu je rovinný]

10.3.7. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvanáctistěnu. [graf pravidelného dvanáctistěnu je rovinný]

10.3.8. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvacetistěnu. [graf pravidelného dvacetistěnu je rovinný]

10.3.9. Nakreslete rovinný graf osmistěnu a najděte odpovídající duální graf. [duální graf pravidelného osmistěnu je graf pravidelného šestistěnu (krychle)]

10.3.10. Nakreslete rovinný graf dvanáctistěny a najděte odpovídající duální graf. [duální graf pravidelného dvanáctistěnu je graf pravidelného dvacetistěnu]

10.3.11. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného osmistěnu. Stěny pravidelného osmistěnu jsou trojúhelníky.

a) Kolik má oblastí? [8]

b) Kolik má hran? [12]

c) Kolik má vrcholů? [6]

10.3.12. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného šestistěnu (krychle).

a) Kolik má oblastí? [6]

b) Kolik má hran? [12]

c) Kolik má vrcholů? [8]

10.3.13. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvanáctistěnu. Stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou pětiúhelníky.

a) Kolik má oblastí? [12]

b) Kolik má hran? [30]

c) Kolik má vrcholů? [20]

10.3.14. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvacetistěnu. Stěny pravidelného dvacetistěnu jsou trojúhelníky.

a) Kolik má oblastí? [12]

b) Kolik má hran? [30]

c) Kolik má vrcholů? [12]

10.3.15. Kolik má souvislý rovinný graf stěn, víte-li že má

a) 20 vrcholů a 25 hran? [7]

b) 16 vrcholů a 15 hran? [1]

c) 25 vrcholů a 22 hran? [takový souvislý graf neexistuje]

10.3.16. Nakreslete graf K_4 tak, aby

a) se hrany neprotínaly [graf K_4 je grafem pravidelného čtyřstěnu]

b) a navíc aby byly úsečky. [graf K_4 je grafem pravidelného čtyřstěnu]

10.3.17. Nakreslete graf $K_5 - e$ tak, aby

a) se hrany neprotínaly [$K_5 - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

b) a navíc aby byly úsečky. [$K_5 - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

10.3.18. Nakreslete graf $K_{3,3} - e$ tak, aby

a) se hrany neprotínaly [$K_{3,3} - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

b) a navíc aby byly úsečky. [$K_{3,3} - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

10.3.19. Najděte rovinný graf, který má nejmenší stupeň vrcholů 5. [graf pravidelného dvacetistěnu]

10.3.20.* Najděte nekonečně mnoho neisomorfních souvislých rovinných grafů, které mají nejmenší stupeň vrcholů 5. [šikovně spojíme více pravidelných dvacetistěnů]

10.3.21. Do rovinného nakreslení stromu přidáme dvě nekřížící se hrany. Kolik bude mít výsledný graf stěn? [3]

10.4 Rozpoznání rovinných grafů

10.4.1.$^\heartsuit$ Pro která n je graf K_n rovinný? Zdůvodněte. [pro $1 \le n \le 4$, užitím Kuratowského věty]

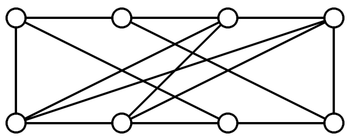
10.4.2.$^\heartsuit$ Pro která m, n je graf $K_{m,n}$ rovinný? Zdůvodněte. [pouze pro $m < 3$ nebo $n < 3$]

10.4.3. Existuje rovinné nakreslení pro $K_6 - C_3$? Zdůvodněte. [ne, podle Kuratowského věty]

10.4.4. Nakreslete nějaký rovinný graf s 12 hranami a 8 stěnami. [graf pravidelného osmistěnu]

10.4.5. Nakreslete nějaký rovinný graf s 21 hranami a 16 stěnami. [takový graf neexistuje]

10.4.6.* Je graf G na Obrázku 10.7 rovinný? Zdůvodněte.



Obrázek 10.7: *Graf G.*

[ne, podle Kuratowského věty]

10.5 Barvení map a rovinných grafů

10.5.1. Kolik nejméně barev je třeba na dobré vrcholové barvení rovinného nakreslení grafů?

a) $K_5 - e$ [4]

b) $K_{3,3} - e$ [2]

10.5.2. Najdete rovinný graf, na jehož obarvení je potřeba alespoň 5 barev? Zdůvodněte. [takový graf neexistuje podle věty o 4 barvách]

10.5.3. Kolik barev je třeba na dobré obarvení hyperkrychle Q_n? [2 (je bipartitní)]

10.5.4. Najdete graf s největším stupněm 2 na jehož dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň 3 barvy? Zdůvodněte. [ano, takové grafy existují]

10.5.5. Najděte graf s největším stupněm r na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň $r+1$ barev. [K_{r+1}]

10.5.6. Najdete graf s největším stupněm 3 na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba minimálně 5 barev? Zdůvodněte. [takový graf neexistuje]

10.6 Bonus – Hamiltonovské grafy

10.6.1. Nechť $V(G)$ grafu G je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny $[1,5]$ a nechť hrana $XY \in E(G)$ právě tehdy, když jsou dvouprvkové podmnožiny X, Y disjunktní ($X \cap Y = \emptyset$). Nakreslete graf. [Petersenův graf]

10.6.2. Je Petersenův graf hamiltonovský? Své tvrzení dokažte. [Petersenův graf není hamiltonovský]

10.6.3. Je Petersenův graf rovinný? Zdůvodněte. [není rovinný]

10.7 Příklady k procvičení

10.7.1. Kolik hran stačí přidat do cyklu C_n, aby výsledný graf nebyl rovinný? [pro $n \geq 6$ 3 hrany, pro $n = 5$ 5 hran a pro $n < 5$ nelze]

10.7.2. Nakreslete graf K_5 na torus.

10.7.3. Nakreslete graf K_6 na torus.

10.7.4. Nakreslete graf K_7 na torus.

10.7.5. Nakreslete graf $K_{3,3}$ na torus.

10.7.6. Nakreslete graf $K_{4,4}$ na torus.

10.7.7. Máme dány hyperkrychli řádu n, značíme ji Q_n (viz strana 43).

a) Jaký je počet vrcholů Q_n? [$|V(Q_n)| = 2^n$]

b) Jaký je počet hran Q_n? $\left[|E(Q_n)| = n \cdot 2^{n-1}\right]$

c) Jaký je stupeň vrcholů v grafu Q_n? $\left[\forall v \in V(Q_n) : \deg_{Q(n)}(v) = n\right]$

d) Jaké je chromatické číslo Q_n? [$\chi(Q_n) = 2$]

e) Pro které hodnoty n je graf Q_n rovinný? [Q_n je rovinný pouze pro $n = 1, 2, 3$]

11 Kapitola 11 – Toky v sítích

11.1 Definice sítě

11.1.1. Pro které vrcholy sítě neplatí zákony kontinuity? [zdroj a stok]

11.1.2. Jak v síti namodelovat neorientovanou hranu? [dvojicí nesouhlasně orientovaných hran]

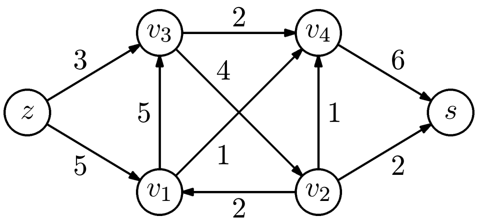
11.1.3. Může pro (jediný) zdroj platit zákon kontinuity? [ano]

11.1.4. Může v síti něco přitékat do zdroje? [ano]

11.1.5. Může být tok na hranách vycházející ze zdroje větší, než tok na hranách přitékajících do stoku? [ano]

11.2 Hledání maximálního toku

11.2.1. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.1.



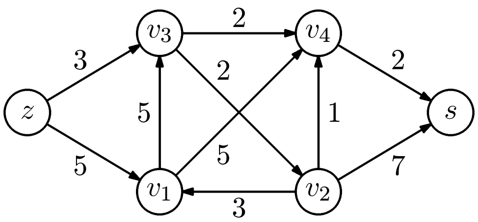
Obrázek 11.1: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [6]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. [6, $\{v_3v_4, v_1v_4, v_2v_4, v_2z\}$]

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_2, v_3\}$]

11.2.2. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.2.



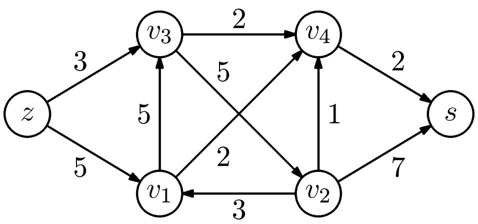
Obrázek 11.2: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [4]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. [4, $\{v_3v_2, v_4z\}$]

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_3, v_4\}$]

11.2.3. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.3.



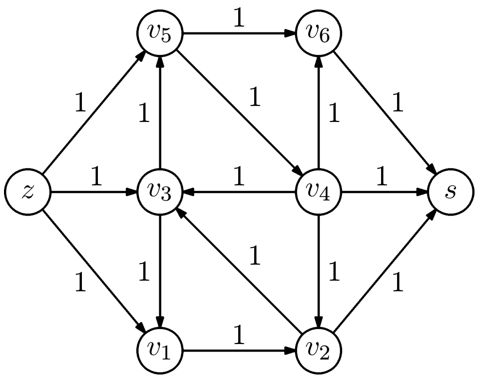
Obrázek 11.3: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [7]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. $[7, \{v_3v_2, v_4z\}]$

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? $[U = \{s, v_1, v_3, v_4\}]$

11.2.4. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.4.



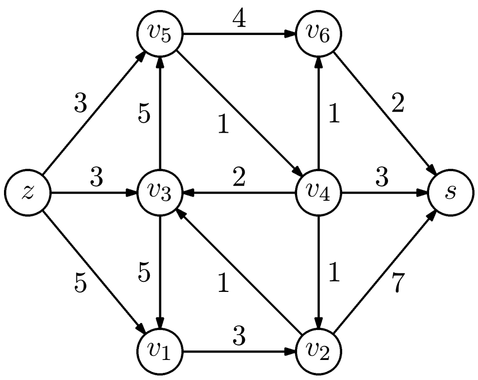
Obrázek 11.4: *Síť* (G, z, s, w).

a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [3]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. $[3, \{sv_1, sv_3, sv_5\}]$

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? $[U = \{s\}]$

11.2.5. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.5.



Obrázek 11.5: *Síť* (G, z, s, w).

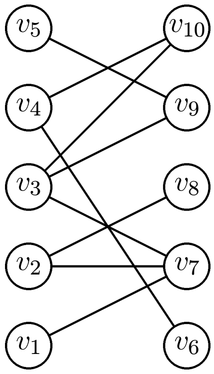
a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S? Najděte jej! [6]

b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S? Najděte minimální řez. $[6, \{v_1v_2, v_5v_4, v_6z\}]$

c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? $[U = \{s, v_1, v_3, v_5, v_6\}]$

11.3 Zobecnění sítí a další aplikace

11.3.1. Najděte největší párování v následujícím grafu. Zdůvodněte, proč neexistuje větší párování.



Obrázek 11.6: *Bipartitní graf G.*

$[v_2v_8, v_3v_5, v_4v_6, v_5v_9]$

11.3.2. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1, 2, 4\}, M_2 = \{1, 3, 7\}, M_3 = \{1, 5, 6\}, M_4 = \{2, 6, 7\}, M_5 = \{2, 3, 5\}, M_6 = \{3, 4, 6\}, M_7 = \{4, 5, 7\}$$

[systém reprezentantů $x_1 = 1$, $x_2 = 7$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$, $x_7 = 4$]

11.3.3. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1, 4, 5\}, M_2 = \{1, 4, 6\}, M_3 = \{1, 5, 6\}, M_4 = \{2, 3, 5\}, M_5 = \{4, 5, 6\}, M_6 = \{4, 5, 7\}, M_7 = \{4, 6, 7\}$$

[systém reprezentantů: $|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7| = |\{1, 4, 5, 6, 7\}| = 5 \not\geq 6$]

11.4 Příklady k procvičení

11.4.1. Najděte příklad sítě, kde kapacity hran jsou celočíselné a maximální tok není celočíselný. [taková síť neexistuje]

Reference

[F] D. Fronček, Teorie grafů, skriptum, VŠB (1999).

[H] P. Hliněný, Diskrétní matematika, skriptum, VŠB (2005).

[MN] J. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova, Praha (2003)

[W] D. B. West, Introduction to graph theory – 2nd ed., *Prentice-Hall*, Upper Saddle River NJ, (2001).