CVIČENÍ DIM

ZOBRAZENÍ A PERMUTACE

$$f : A \to B$$

Zobrazení f množiny A do B přiřadí KAŽDÉMU prvku z A přesně JEDEN prvek z B.

Př 1: $A = \left\{-1, -\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$

$B = \{1, e, e^2\}$

$C = \{0, 1, 2, 3, 6\}$

$f : A \to B \qquad g : B \to C$

$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad g(x) = \ln x^3$

Jsou přiřazení f, g zobrazení?
Pokud ano, určete vlastnosti zobrazení f, g.
Určete zobrazení $(g \circ f)$ a jeho vlastnosti.

$$f : A \to B$$

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1 \in B$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e \in B$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{e^2}} = e^2 \in B$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e \in B$$

Ke každému prvku z A je přiřazen přesně jeden prvek z B $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f je zobrazení

Protože ke dvěma různým prvkům $-\frac{1}{\sqrt{e}}$, $\frac{1}{\sqrt{e}}$ přiřazuje f tentýž prvek e, tak
f není injektivní (prosté)

Každý prvek z B je obrazem nějakého prvku z A $\Rightarrow$ f je surjektivní neboli
<u>na</u> množinu B.

$g : B \to C$

$g(1) = \ln (1)^3 = \ln 1 = 0 \in C$

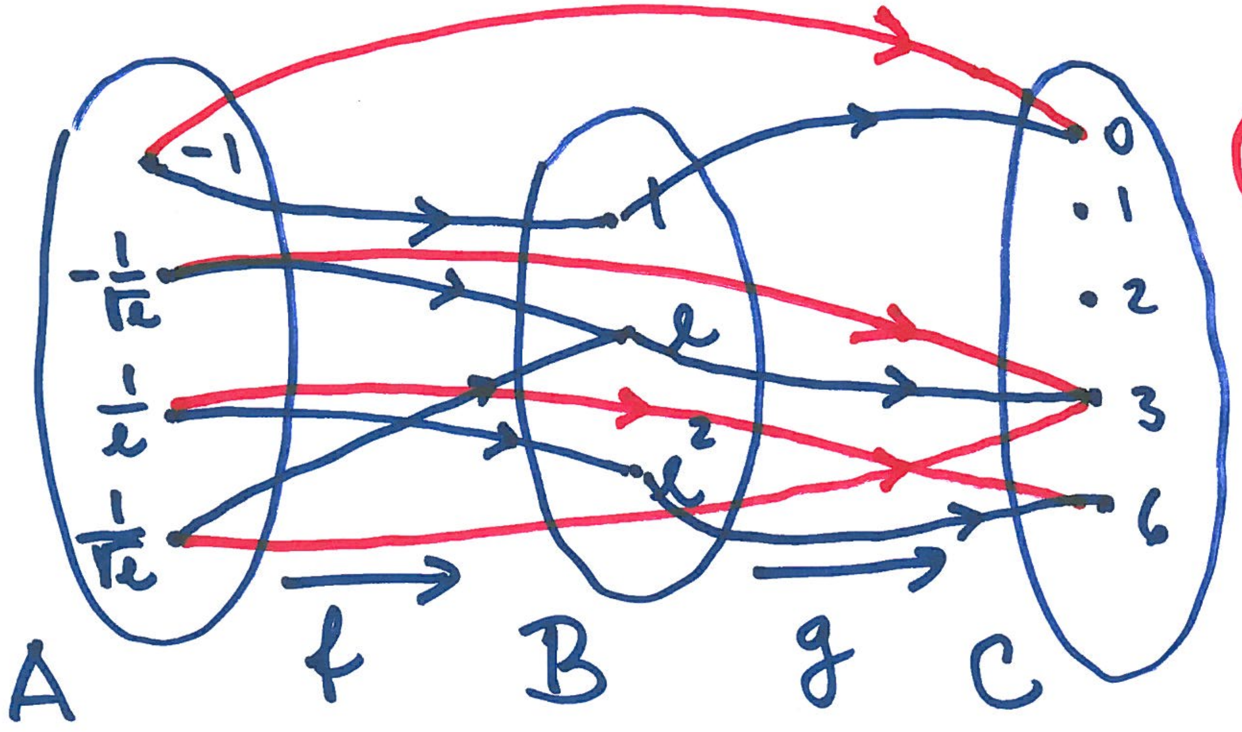
$g(e) = \ln e^3 = 3 \in C$

$g(e^2) = \ln (e^2)^3 = \ln e^6 = 6 \in C$

g je zobrazení.

g je injektivní (prosté), protože ke každým dvěma různým vzorům jsou přiřazeny různé obrazy.

g není surjektivní, neboť prvky $1, 2 \in C$ nejsou obrazy žádného prvku z množiny B.



$(g \circ f) : A \to C$

$(g \circ f)(-1) = 0$

$(g \circ f)\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 3$

$(g \circ f)\left(\frac{1}{e}\right) = 6$

$(g \circ f)\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 3$

$(g \circ f)$ není prosté
není surjektivní

Předpis:

$(g \circ f)(x) = \ln \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 =$

$= \ln \frac{1}{x^6}$

Všimněte si:

Chceme-li, aby složení zobrazení mělo nějakou vlastnost (injektivní, surjektivní), pak musí mít tuto vlastnost obě zobrazení!

Zobrazení, které je injektivní i surjektivní nazýváme BIJEKTIVNÍ (VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉ).

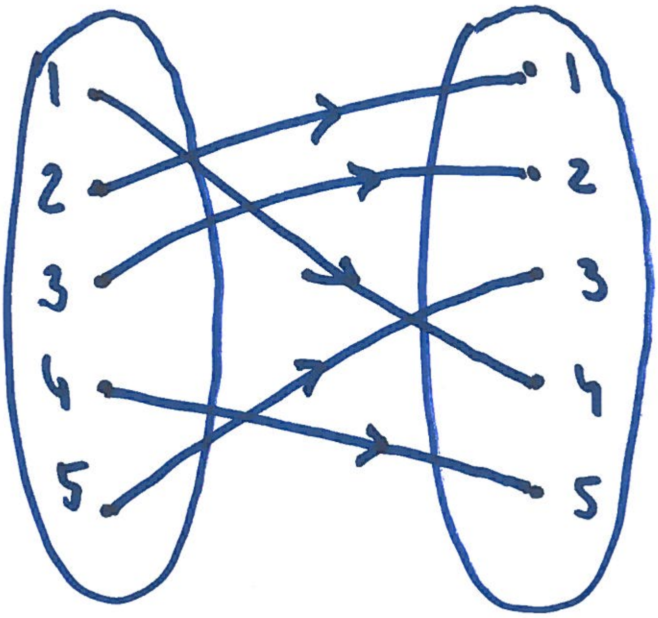
PERMUTACE

Mějme nějakou bijekci

$\pi : A \to A$, kde

$A = [1, 5]$

A



Takovou bijekci umíme jednoznačně zapsat do dvojřádkové matice.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1. řádek – VZORY

2. řádek – JEJICH OBRAZY

Tvrdíme, že bijekci π umíme také jednoznačně zapsat pomocí posloupnosti:

$$\pi = (4, 1, 2, 5, 3)$$

Pozice v posloupnosti jsou VZORY

Čísla na těchto pozicích OBRAZY

Proto: $\pi(1) = 4$, $\pi(4) = 5, \ldots$

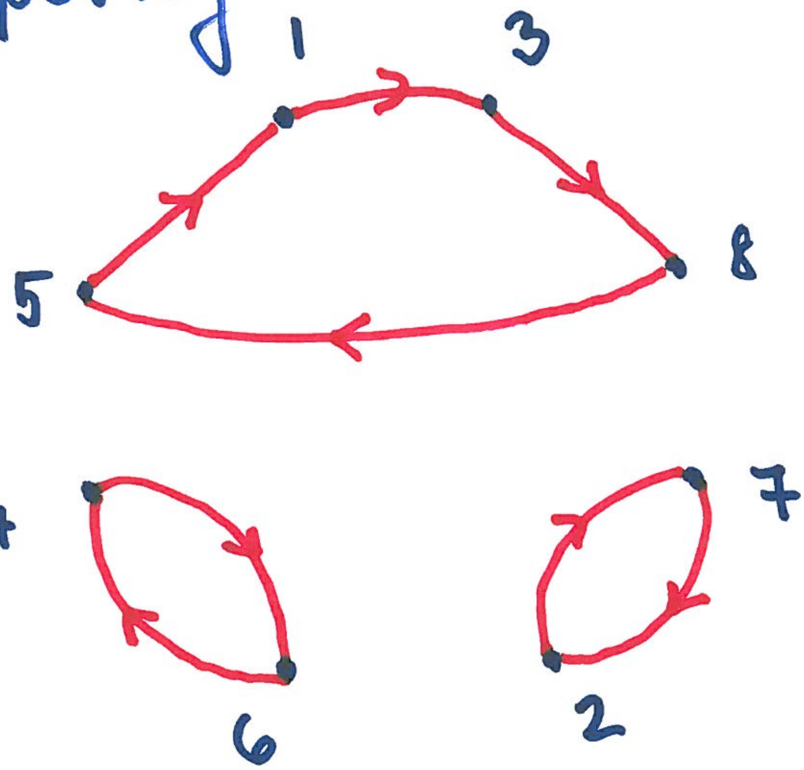
Jestliže všechny prvky konečné množiny seřadíme do posloupnosti, pak této posloupnosti říkáme PERMUTACE.

Proto každé bijekci $\pi : A \to A$ budeme říkat PERMUTACE

Mějme permutaci

$\hat{\pi} = (3, 7, 8, 6, 1, 4, 2, 5)$

Podívejme se, jak koroxuje kroky.



Vidíme, že permutace $\hat{\pi}$ vytváří na $A = [1, 8]$ disjunktní CYKLY.

Permutaci můžeme tedy zapsat i CYKLICKY.

$\pi = (1,$

Otevřeme 1. cyklus nejmenším číslem, tedy jedničkou.

Vidíme, že $\pi(1) = 3$.

Za jedničku napíšeme 3.

$\pi = (1, 3,$

$\pi(3) = 8$, proto

$\pi = (1, 3, 8,$

$\pi(8) = 5$, proto

$\pi = (1, 3, 8, 5)$

Protože $\pi(5) = 1$, UZAVŘEME cyklus pravou závorkou.

Další cyklus započneme nejmenším „nepoužitým" číslem, tedy 2.

$\pi = (1,3,8,5)(2,$

$\pi(2) = 7$ a $\pi(7) = 2$

$\pi = (1,3,8,5)(2,7)$

Dále

$\pi = (1,3,8,5)(2,7)(4,$

$\pi(4) = 6$ a $\pi(6) = 4$

$\pi = (1,3,8,5)(2,7)(4,6)$

A JSME HOTOVI!

π má 2 cykly délky 2 a jeden cyklus délky 4.

Připišme do cyklického tvaru permutaci

$$\sigma = (4, 8, 6, 7, 2, 3, 1, 5)$$

$\sigma = (1,$

$\sigma = (1, 4,$

$\sigma = (1, 4, 7)$

$\sigma = (1, 4, 7)(2$

$\sigma = (1, 4, 7)(2, 8,$

$\sigma = (1, 4, 7)(2, 8, 5)$

$\sigma = (1, 4, 7)(2, 8, 5)(3,$

$\sigma = (1, 4, 7)(2, 8, 5)(3, 6)$

HOTOVO!

σ – 2 cykly délky 3
1 cyklus " 2

$\pi = (1,3,8,5)(2,7)(4,6)$

$\sigma = (1,4,7)(2,8,5)(3,6)$

Najděme složenou permutaci

$$\pi \circ \sigma$$

Z tohoto zápisu vidíme, že nejdříve zobrazí σ, a pak π.

$(\pi \circ \sigma) = (1,$

$\sigma(1) = 4$ a $\pi(4) = 6 \Rightarrow$

$$(\pi \circ \sigma)(1) = 6$$

$(\pi \circ \sigma) = (1,6,$

$\sigma(6) = 3 \wedge \pi(3) = 8 \Rightarrow (\pi \circ \sigma)(6) = 8$

$(\pi \circ \sigma) = (1,6,8,$

$\sigma(8) = 5 \wedge \pi(5) = 1 \Rightarrow (\pi \circ \sigma)(8) = 1$

$(\pi \circ \sigma) = (1,6,8)(2,$

(13)

$\sigma(2) = 8 \wedge \pi(8) = 5 \Rightarrow (\pi \circ \sigma)(2) = 5$

$(\pi \circ \sigma) = (1,6,8)(2,5,$

$\sigma(5) = 2 \wedge \pi(2) = 7 \Rightarrow (\pi \circ \sigma)(5) = 7$

$(\pi \circ \sigma) = (1,6,8)(2,5,7,$

$\sigma(7) = 1 \wedge \pi(1) = 3 \Rightarrow (\pi \circ \sigma)(7) = 3$

$(\pi \circ \sigma) = (1,6,8)(2,5,7,3,$

$\sigma(3) = 6 \wedge \pi(6) = 4 \Rightarrow (\pi \circ \sigma)(3) = 4$

$(\pi \circ \sigma) = (1,6,8)(2,5,7,3,4$

$\sigma(4) = 7 \wedge \pi(7) = 2 \Rightarrow (\pi \circ \sigma)(4) = 2$

$(\pi \circ \sigma) = (1,6,8)(2,5,7,3,4)$

HOTOVO!

Najdeme $\pi^4 = \pi \circ \pi \circ \pi \circ \pi$

Odtud $\pi^4 = \pi^2 \circ \pi^2$ $= \pi \circ \pi$

Nejdříve najdeme π^2, a pak

$\pi^4 = \pi^2 \circ \pi^2$

$\hat{\pi} = (1,3,8,5)(4,6)(2,7)$

$\hat{\pi}^2 = \hat{\pi} \circ \hat{\pi} =$

$= (1,8)(2)(3,5)(4)(6)(7)$

$\hat{\pi}(1) = 3 \wedge \hat{\pi}(3) = 8 \Rightarrow \hat{\pi}^2(1) = 8$

a tak dále

$\hat{\pi}^2 = (1,8)(2)(3,5)(4)(6)(7)$

$\hat{\pi}^4 = \hat{\pi}^2 \circ \hat{\pi}^2 =$

$= (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) =$

$=$ id – IDENTITA

IDENTITA má jen cykly délky 1.

Def: Nejmenší přirozené číslo k, pro které platí

$$\hat{\pi}^k = \underbrace{\hat{\pi} \circ \hat{\pi} \circ \ldots \circ \hat{\pi}}_{k} = id,$$

se nazývá ŘÁD PERMUTACE.

Čili řád naší permutace $\hat{\pi}$ je 4!

OBECNĚ PLATÍ:

$c_1, c_2, \ldots, c_m$ jsou délky cyklů v perm. $\hat{\pi}$.
Potom řád permutace

$$k = NSN\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$$

nejmenší spol. násobek

OVĚŘME:

$$k = NSN\{4, 2, 2\} = 4.$$