Pracovní list k předmětu Základy matematiky

Kuželosečky

26. listopadu 2019

1. Opakování

– http://mdg.vsb.cz/portal/zm/index.php, tam Kapitola 7. Analytická geometrie v rovině
– Wikipedie: Kružnice, Elipsa, Hyperbola, Parabola.

Všechny kuželosečky, které mají osy rovnoběžné se souřadnými osami, se dají popsat obecnou rovnicí

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

O jakou kuželosečku se jedná, poznáme podle hodnot parametrů A, B, C, D, E. Lze o tom rozhodnout po převodu na středový (resp. vrcholový) tvar.

Kružnicí rozumíme množinu všech bodů $X = [x, y]$, které mají od pevného bodu $S = [m, n]$ konstantní vzdálenost r (nazývanou poloměr). Body kružnice vyhovují rovnici

$$k : (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

(tzv. středový tvar). Speciálně je-li $S = [0, 0]$ a $r = 1$, pak $k : x^2 + y^2 = 1$.

Elipsou rozumíme množinu všech bodů $X = [x, y]$, které mají od dvou různých pevně zvolených bodů E, F (tzv. ohnisek) konstantní **součet** vzdáleností $|EX| + |XF| = 2a > |EF|$. Body elipsy se středem $S = [m, n]$, hlavní poloosou $a \parallel x$ a vedlejší poloosou b vyhovují rovnici

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Excentricita neboli výstřednost je číslo $e = |ES| = |FS| = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Hyperbolou rozumíme množinu všech bodů $X = [x, y]$, které mají od dvou různých pevně zvolených bodů E, F (tzv. ohnisek) konstantní **rozdíl** vzdáleností $||EX| - |XF|| = 2a < |EF|$. Body elipsy se středem $S = [m, n]$, hlavní poloosou $a \parallel x$ a vedlejší poloosou b vyhovují rovnici

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Excentricita $e = |ES| = |FS| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Parabolou rozumíme množinu všech bodů $X = [x, y]$, které mají stejnou vzdálenost od pevně zvoleného bodu F (tzv. ohniska) jako od dané řídící přímky d, tedy $|XF| = v(X, d)$. Body paraboly s vrcholem $V = [m, n]$, parametrem p a osou $o \parallel o_y$ vyhovují rovnici

$$(x - m)^2 = 2p(y - n).$$

Osa má rovnici $x - m = 0$ a na ni kolmá řídící přímka má rovnici $d : y - n = -\frac{p}{2}$. Parametr p určuje jak moc je parabola otevřená, jeho znaménko udává směr otevření paraboly.

2. Řešené úlohy ve skriptech

http://mdg.vsb.cz/portal/zm/index.php, tam Kapitola 7. Analytická geometrie v rovině

Opakujeme dva základní typy úloh:

1. Sestavení rovnice kuželosečky z daných prvků: příklady 7.3.8 (s. 219), 7.3.9 (s. 220), 7.4.2 (s. 222), 7.4.3 (s. 223).
2. Převod obecné rovnice kuželosečky na středový (resp. vrcholový tvar): příklady 7.3.1 (s. 211), 7.4.1 (s. 222), 7.5.1 (s. 229), 7.6.1 a 7.6.2 (s. 235).

3. Úlohy k řešení v hodině

1. Napište rovnici kružnice, která má střed $S = [5, -1]$ a dotýká se přímky $p : 3x + 4y + 14 = 0$.
2. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A = [12, 10], B = [6, 2]$, a jejíž střed leží na přímce $p : 3x - 4y - 3 = 0$.
3. Napište rovnici elipsy, která má hlavní poloosu rovnoběžnou s osou x, dotýká se osy x i y a její střed je v bodě $S = [4, -2]$.
4. Napište rovnici elipsy, která má ohniska $E = [-2, -2],\ F = [6, -2]$ a vedlejší vrchol $B = [2, 1]$.
5. Určete vrchol, parametr a ohnisko paraboly $y^2 - 8x + 6y = 7$ a napište rovnice její osy a řídící přímky.
6. Napište vrcholovou rovnici paraboly, je-li dáno $F = [3, 1],\ d : y = -1$
7. Určete typ kuželosečky a spočítejte její charakteristické prvky (souřadnice středu, resp. vrcholu, poloměr, resp. velikosti poloos nebo parametr, excentricitu apod.):
   (a) $3x^2 + 36x - y + 108 = 0$;
   (b) $9x^2 - 5y^2 + 54x - 10y + 121 = 0$;
   (c) $2x^2 + 3y^2 - 12x + 3y + \frac{27}{4} = 0$;
   (d) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 119 = 0$;
   (e) $x^2 + 10x - 4y + 37 = 0$;
   (f) $x^2 + 16y^2 - 8x = 0$;
   (g) $2x^2 + 2y^2 - 16x - 12y = 0$;
   (h) $3y^2 - x - 12y + 18 = 0$;
   (i) $3x^2 - 2y^2 - 8y - 26 = 0$;