3. Analytická geometrie v rovině

Vyjádření přímky v rovině

Parametrické vyjádření $\mathsf{X} = \mathsf{A} + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$, obecná rovnice $ax + by + c = 0$, směrnicový tvar $y = kx + q$, úsekový tvar $x/r + y/s = 1$.

3.1. [N?,] Zjistěte zda body A, B leží na parametricky zadané přímce $p : x = 1 - t,\ y = 3t$.

(a) $\mathsf{A} = [-3, 7]$, $\mathsf{B} = [0, 3]$.
(b) $\mathsf{A} = [-5, 18]$, $\mathsf{B} = [-14, -1]$.

3.2. [N?,] Zjistěte zda bod D leží na přímce $p : x - y + 2 = 0$.

(a) $\mathsf{D} = [-1, 8]$,
(b) $\mathsf{D} = [2, 4]$,
(c) $\mathsf{D} = [3, -2]$.

3.3. [N?,] Určete druhou souřadnici bodu D tak, aby ležel na přímce AB. Napište dále parametrické vyjádření úsečky AB a polopřímky BA.

(a) $\mathsf{A} = [4, 1]$, $\mathsf{B} = [2, 2]$, $\mathsf{D} = [0, y]$.
(b) $\mathsf{A} = [3, 4]$, $\mathsf{B} = [2, 1]$, $\mathsf{D} = [7, y]$.

3.4. [N?,] Napište parametrickou rovnici přímky p, která prochází bodem $\mathsf{A} = [2, 5]$ a je rovnoběžná s přímkou BC a přímky q, která prochází bodem C a je kolmá na přímku AB. Tam kde to lze, převeďte parametrické vyjádření na obecné. Zadáno jest:

(a) $\mathsf{B} = [3, 7]$, $\mathsf{C} = [-4, 9]$.
(b) $\mathsf{B} = [2, 1]$, $\mathsf{C} = [4, 7]$.

3.5. [N?,] Napište obecnou rovnici přímky AB a pokuste se ji vyjádřit také ve směrnicovém tvaru!

(a) $\mathsf{A} = [0, 2]$, $\mathsf{B} = [3, 1]$
(b) $\mathsf{A} = [-5, 18]$, $\mathsf{B} = [-14, 6]$
(c) $\mathsf{A} = [0, 6]$, $\mathsf{B} = [1, 6]$

3.6. [N?,] Mějme zadánu přímku p její obecnou rovnicí. Stanovte nějaké její parametrické vyjádření a určete její směrový úhel!

(a) $2x + \sqrt{3}y + 9 = 0$.
(b) $x - 8y + 32 = 0$.
(c) $y = -1$.

3.7. [KBo,] Zapište přímku p ve směrnicovém tvaru:

(a) $p \equiv \overrightarrow{\mathsf{AB}}, \mathsf{A} = [-2, 1], \mathsf{B} = [3, -1]$,
(b) $p : x = 3t - 1, y = 2 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$,
(c) $p : x = \frac{1}{2}t, y = 2t - 3,\ t \in \mathbb{R}$.

3.8. [KBo,] Určete směrnici k přímky $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$ je-li

(a) $\mathsf{A} = [8, 1], \mathsf{B} = [6, 5]$,
(b) $\mathsf{A} = [-2, 1], \mathsf{B} = [1, 3]$.

Vzájemná poloha přímek v rovině

3.9. [N?,] Určete vzájemnou polohu přímek $p: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $q: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
Rada: doplňte symboly $\|, \equiv, \times$ do následujících implikací

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \Rightarrow \quad p \quad q$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad \Rightarrow \quad p \quad q$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \Rightarrow \quad p \quad q$$

V případě různoběžek určete jejich odchylku a souřadnice průsečíku.

(a) $p: x = 5 - 7t, y = 4 - 14t, \quad q: x = 18 - 3r, y = 17 - r.$
(b) $p: x = 1 - 3t, y = 3 + 2t, \quad q: x = -1 + 2r, y = 2 - 5r.$
(c) $p: 3x + 4y - 3 = 0, \quad q: x = 1 + 2t, y = 2 - t.$
(d) $p: 2x - 3y + 4 = 0, \quad q: x - y + 1 = 0.$
(e) $p: 5x + 6y - 1 = 0, \quad q: -10x - 12y + 1 = 0.$
(f) $p: x + y + 13 = 0, \quad q: 3x + 7 = 0.$
(g) $p: 3x - 5y + 12 = 0, \quad q: 5x + 2y - 42 = 0.$

3.10. [N?,] Dokažte, že polopřímka p protíná úsečku AB, kde $\mathsf{A} = [-2, 0]$, $\mathsf{B} = [2, 8]$, jestliže

$$p: x = 3 + t, \quad y = 1 - t, \quad t \leqq 0.$$

Určete souřadnice jejich průsečíku!

3.11. [N?,] Určete $m \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka p určená body $\mathsf{A} = [3, m]$ a $\mathsf{B} = [3, 2]$ byla rovnoběžná s přímkou q o parametrickém vyjádření $x = 1$, $y = 1 + t$; $t \in \mathbb{R}$.

Polohové a metrické úlohy v rovině

3.12. [N?,] Napište rovnici přímky q, která prochází bodem A a má od dané přímky p odchylku α!

(a) $\mathsf{A} = [3, -2]$, $p: \sqrt{3}x - y + 1 = 0$, $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$
(b) $\mathsf{A} = [3, 5]$, $p: 2x - 3y - 7 = 0$, $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$
(c) (využitím směrnicového tvaru rovnice přímky) $A = [1, 3]$, $p: 2x - y + 3 = 0$, $\alpha = 45°$.

3.13. [N?,] Určete vzdálenost bodu $\mathsf{A} = [3, -2]$

(a) od přímky $p: 2x + 3y - 1 = 0$,
(b) od přímky p z příkladu 3.12.c,
(c) od přímek q z příkladů 3.12.

3.14. [N?,] Napište ve směrnicovém tvaru rovnici přímky p, která prochází bodem A a je kolmá na přímku p, je-li zadáno

(a) $\mathsf{A} = [6, 2], p: y = 3x + 1$,
(b) $\mathsf{A} = [2, -\sqrt{2}], y = \sqrt{2}x - 3$.

3.15. [N?,] Je dán bod $\mathsf{A} = [0, 1]$ a přímka $p: x + y + 1 = 0$. Spusťte z bodu A kolmici na přímku p, nalezněte její patu a spočítejte $v(\mathsf{A}, p)$.

3.16. [N?,] Určete rovnici osy úsečky AB, je-li

(a) $\mathsf{A} = [-3, 1]$, $\mathsf{B} = [4, -3]$
(b) AB z příkladu 3.3..

3.17. [N?,] Určete rovnice přímek v nichž leží výšky $\Delta\,\mathsf{ABC}$:

(a) $\mathsf{A} = [1, 1]$, $\mathsf{B} = [2, 3]$, $\mathsf{C} = [-4, -3]$.
(b) $\mathsf{A} = [1, 3]$, $\mathsf{B} = [2, -1]$, $\mathsf{C} = [-7, 1]$.

Spočítejte velikosti výšek v_a a v_b.

3.18. [N?,]* Přímka p prochází bodem $\mathsf{M} = [6, 3]$ a spolu s přímkami o rovnicích $3x + y - 6 = 0$, $x - 3y + 8 = 0$ určuje rovnoramenný trojúhelník. Určete jeho obsah.

3.19. [N?,] Určete souřadnice vrcholů B, D rovnoběžníka ABCD, jsou-li jeho vrcholy $\mathsf{A} = [3, 2]$, $\mathsf{C} = [-1, 1]$, strana AB je rovnoběžná s vektorem $\vec{u} = (1, 0)$ a úhlopříčka BD je rovnoběžná s vektorem $\vec{v} = (3, 2)$.

3.20. [N?,] Je zadán trojúhelník ABC: $\mathsf{A} = [0, 5]$, $\mathsf{B} = [5, 1]$, $\mathsf{C} = [3, 6]$;

(a) Napište parametrické vyjádření těžnic $\Delta\mathsf{ABC}$ a spočítejte souřadnice těžiště.
(b) Napište parametrické vyjádření výšek $\Delta\mathsf{ABC}$ a spočítejte souřadnice ortocentra.
(c) Spočítejte velikost výšky v_a a obsah $\Delta\mathsf{ABC}$.
(d) Nalezněte souřadnice středu kružnice opsané trojúhelníku ABC.