Zápočtové minimum z Matematiky 2

(denní studium)

27. dubna 2011

I. hodina: Opakování průběhu funkcí

I.1. Vypočítejte druhou derivaci funkce

$$y = \ln \sqrt{\frac{\cos x}{1 - \sin x}}.$$

I.2. Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{1 - x^3}{x^2}$$

I.3. Vydělte polynomy:

$$\frac{4x^4 - 6x^3 + 3x - 5}{2x - 1}$$

I.4. Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů:

$$x^3 - x^2 + x - 1,$$
$$x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4$$

II. hodina: Integrace rozkladem

II.1. Pomocí základních vzorců integrujte:

$$\int \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x \tag{2.1a}$$

$$\int \frac{5}{v - 4} - \mathrm{e}^{-4v}\,\mathrm{d}v \tag{2.1b}$$

$$\int \tan^2 t\,\mathrm{d}t \tag{2.1c}$$

$$\int 2\sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \tag{2.1d}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 6} \tag{2.1e}$$

$$\int \frac{u}{u^2 + 6}\,\mathrm{d}u \tag{2.1f}$$

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \tag{2.1g}$$

III. hodina: Integrace metodou per partes a substitucemi I. druhu

III.1. Integrujte metodou per partes:

$$\int (x-1)^2 \cdot \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x \tag{3.1a}$$

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}}\,\mathrm{d}v \tag{3.1b}$$

$$\int \cos(\ln u)\,\mathrm{d}u \tag{3.1c}$$

III.2. Integrujte substituční metodou

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{3.2a}$$

$$\int \frac{u}{1+4u^4}\,\mathrm{d}u \tag{3.2b}$$

IV. hodina: Integrace racionální lomené funkce

IV.1. Rozložte na součet parciálních zlomků

$$\int \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z \tag{4.1}$$

$$\int \frac{2x-5}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

$$\int \frac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x \tag{4.3}$$

$$\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x \tag{4.4}$$

IV.2. Vydělte polynomy a zintegrujte rozkladem na parciální zlomky:

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x \tag{4.5}$$

$$\int \frac{3x^5+6x^3+5x}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x \tag{4.6}$$

V. hodina: Integrace substitucemi II. druhu

V.1. Vhodnou substitucí převeďte iracionální funkci na RLF a zintegrujte:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x \tag{5.2}$$

V.2. Univerzální goniometrickou substitucí převeďte integrand na RLF a zintegrujte:

$$\int \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t \tag{5.3}$$

V.3. Vhodnou substitucí převeďte integrand na RLF a zintegrujte:

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2v}-1}\,\mathrm{d}v \tag{5.4}$$

VI. hodina: určité integrály a jejich aplikace

VI.1. Integrujte:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \tag{6.1a}$$

$$\int_1^4 u\mathrm{e}^{3u}\,\mathrm{d}u \tag{6.1b}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^v+1}{\mathrm{e}^{3v}+1} dv \tag{6.1c}$$

VI.2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 - 2x + 2$, její tečnou v bodě $T = [3, 5]$ a souřadnicovými osami.

VI.3. Načrtněte rovinný obrazec ohraničený křivkou zadanou parametrickými rovnicemi

$$x(t) = 3t^2, \qquad y(t) = 3t - t^3, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Vypočtěte obsah uzavřené části.

VII. hodina: Aplikace určitých integrálů II

VII.1. Vypočítejte délku Neilovy semikubické paraboly $y^2 = x^3$ na intervalu $I = \langle 0, 1\rangle$.

VII.2. Vypočítejte délku jednoho oblouku cykloidy $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

VII.3. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti určené funkcemi $y = x^2$ a $y^2 = x$ kolem osy x.

VII.4. Vypočítejte povrch kulového vrchlíku, tedy obsah pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f : y = \sqrt{1-x^2}$ kolem osy x na intervalu $I = \langle \frac{1}{2}, 1\rangle$.

VIII. hodina: Funkce dvou proměnných

VIII.1. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkcí $f(x, y)$:

(8.1a) $$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

(8.1b) $$z = \ln\big(\sin(x + y)\big),$$

(8.1c) $$z = \arcsin \frac{y}{x},$$

a vypočítejte jejich druhé parciální derivace.

VIII.2. Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f

$$f(x, y) = \frac{\cos^2 x}{\cos y},$$

v bodě dotyku $T = [\pi, 0, z_0]$.

IX. hodina: Lokální extrémy

IX.1. Nalezněte lokální extrémy funkcí

(9.1a) $$z = \mathrm{e}^{y-x}(x^2 + y^2),$$

(9.1b) $$z = \ln(xy) - 4x - 9y,$$

(9.1c) $$z = (x^2 - 1)(y^2 - 4),$$

IX.2. Nalezněte extrémy funkcí f vázané podmínkou g:

(9.2a) $$f : z(x, y) = \mathrm{e}^{xy} \qquad g : x + y = 4$$

(9.2b) $$f : z(x, y) = -8x + 6y - 5, \qquad g : x^2 + y^2 = 100;$$

X. hodina: Obyčejné diferenciální rovnice

X.1. Určete systém integrálních křivek rovnice $y' - \sin x = 2x$.

X.2. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $yy' = y \cos x + x(\cos(x) - y')$. Nezapomeňte na singulární řešení!

X.3. Určete křivku procházející bodem $A = [0, 2]$, která má v libovolném bodě směrnici tečny $k = (1/3y^2)$.

X.4. Řešte separovatelné rovnice:

(10.1a) $$\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + 3y^2\,\mathrm{d}y = 0$$

(10.1b) $$y' = 2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{y-1} - \frac{1}{x - xy}$$

(10.1c) $$\sqrt{xy}\,y' = \sqrt[3]{xy^2};$$

(10.1d) $$xy' = 3y - y', \qquad y(1) = 1.$$

XI. hodina: Homogenní a lineární ODR 1. řádu

XI.1. Určete typ diferenciální rovnice a vyřešte ji:

(11.1a) $$y' = \frac{y}{x-y},$$

(11.1b) $$4x^2y' = y^2 + xy - 4x^2,$$

(11.1c) $$y' \cos x - y \sin x = x \cos x,$$

(11.1d) $$y' - 2xy = -2x^3,$$

(11.1e) $$y'(x-y) = 2x - y,$$

(11.1f) $$y' + \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

XII. hodina: Lineární ODR vyšších řádů s konstantními koeficienty.

XII.1. Metodou neurčitých koeficientů řešte rovnice:

(12.1a) $$y'' - 3y' + 2y = 5x^2 + 1$$

(12.1b) $$y'' - y' = 3x^2 - 2x + 3;$$

(12.1c) $$y'' - 4y' + 13y = 6\mathrm{e}^{2x};$$

(12.1d) $$y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x};$$

(12.1e) $$y'' - 6y' + 9y = \cos(3x)$$

(12.1f) $$y'' + 4y = \sin 2x,$$

XIII. hodina: Lagrangeova metoda variace konstant pro LDR 2. řádu