Integrace racionálních lomených funkcí

Jan Kotůlek

(kombinované studium, první soustředění)
verze 3 ze dne 25. února 2011

Abstrakt

Tento článek je koncipován jako rozšířený zápis průběhu prvního soustředění z předmětu Matematika II pro studenty 1. ročníku kombinovaného studia na Fakultě strojní, VŠB-TU v Ostravě. Rozebíráme zde praktický postup integrace tzv. racionálních lomených funkcí (RLF), tedy výpočtu

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, \mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou libovolné polynomy.

Text je určen k přípravě na zkoušku z předmětu Matematika II.

Motivace. Polynomy jsou asi nejdůležitější elementární funkce v tom smyslu, že na základě Taylorovy věty lze libovolně komplikovanou (elementární) funkci přinejmenším na nějakém okolí libovolného bodu s libovolnou přesností aproximovat (tzv. Taylorovým) polynomem. Toho se často využívá v praxi, kdy se nějaká reálná data nahradí vhodným polynomem. Odtud pramení potřeba znalosti práce s polynomy (součet, součin, podíl a jejich derivace a integrál).

RLF navíc často vystupují při řešení komplikovaných integrálů substituční metodou. Totiž, zejména při substitucích 2. druhu (iracionální substituce, goniometrické substituce, aj.) se složitý integrand pomocí vhodné substituce převádí právě na RLF a úloha se tak redukuje na problém integrace nějaké racionální lomené funkce.

Definice. *Polynomem* neboli mnohočlenem v proměnné x rozumíme libovolnou funkci tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Čísla $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nazýváme *koeficienty polynomu* $P(x)$ a číslo $\deg P(x) = n$, tedy nejvyšší mocninu, nazýváme *stupněm polynomu* $P(x)$. Pro polynom stupně n používáme také označení $P_n(x)$, zejména chceme-li zdůraznit o polynom jakého stupně se jedná.

Letmé seznámení. Pro některé velmi jednoduché polynomy umíme RLF zintegrovat pomocí základních integračních vzorů, například

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \int x \, \mathrm{d}x - 2 \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 - 2 \ln(x) - \frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x = \ln(x^2 + 1) + c$$

$$\int \frac{2}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x = 2 \arctan(x) + c$$

To je kupodivu vše co může vyjít při integraci RLF. Tedy řešením je obecně součet

- polynomu,
- lomené funkce,
- přirozeného logaritmu a
- funkce arkus tangens.

Algoritmus řešení. Naším cílem tedy bude přepsat RLF na součet jednoduchých (tzv. parciálních) zlomků, které pak snadno zintegrujeme. Důležité je, že to lze provést **pro libovolné polynomy** $P(x)$ a $Q(x)$. Naučíme se univerzální recept, jakousi kuchařku uvařit integrál z jakékoliv RLF, a navíc jen ve čtyřech krocích:

1. převod na polynom + ryze lomená funkce (dělení)
2. rozklad jmenovatele na součin kořenových činitelů
3. rozklad RLF na součet parciálních zlomků
4. integrace parciálních zlomků

Pro pochopení strategie rozkladu na parciální zlomky prozkoumejme vyřešenou úlohu 1.–3.:

$$\frac{x^6 - 2x^5 + 11x^4 - 13x^3 + 67x^2 - 71x + 67}{(x-1)^2(x^2+2x+7)} = x^2 - 2x + 7 + \frac{4}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2} + \frac{3x+4}{x^2+2x+7}.$$

Funkce na levé straně vznikla převodem funkce z pravé strany na společného jmenovatele (přesvědčte se o tom!). Stačí tedy vědět, že naše úloha je **obrácená úloha k převodu funkce na společného jmenovatele**. Snažíme se tedy najít funkci, která (když převedeme na společného jmenovatele a roznásobíme) je rovna našemu zadání.

Integrál funkce na levé straně je tedy součtem integrálů funkcí na pravé straně, které jsou stejného typu jako ukázkové příklady z předchozího odstavce.

Pojďme jednotlivé kroky blíže rozebrat.

1. Převod na ryze lomenou funkci (dělení polynomů):

Racionální funkci nazýváme *ryze lomenou* je-li $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

Pokud je stupeň polynomu (nejvyšší mocnina) v čitateli větší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli, tedy

$$\boxed{\deg P(x) \geq \deg Q(x)}$$

vydělím je. Dělení polynomů probíhá úplně stejně jako dělení mnohociferných čísel se zbytkem (zkuste si dosadit $x = 10$ a uvidíte):

$$\begin{array}{l} (x^3 - 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = x - 2 + \dfrac{4-2x}{x^2+1} \\ \underline{-(x^3 + x)} \\ \quad -2x^2 - 2x + 2 \\ \quad \underline{-(-2x^2 - 2)} \\ \qquad -2x + 4 \end{array}$$

Všimněte si, že

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

kde $\deg S < \deg Q$, takže jsme si RLF rozložili na **součet polynomu**, který již umíme zintegrovat, **a ryze lomené funkce**, kterou se naučíme integrovat v dalších bodech kuchařky.

Příklady

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 2 + \frac{4-2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2 - 2x + 4\arctan x - \ln(x^2+1) + C,$$

$$\int \frac{4x^4 - 6x^3 + 3x - 5}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^4 - \frac{2}{3}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + x - 2\ln|2x-1| + C,$$

$$\int \frac{2x^4 - 6x^3 - 2x + 14}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\,\mathrm{d}x = \int 2x + \frac{2x^2 - 8x + 14}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\,\mathrm{d}x$$

2. Rozklad jmenovatele na součin kořenových činitelů:

A) Kořen a součin kořenových činitelů

Čísla z v nichž nabývá polynom hodnoty nula se nazývají *kořeny* polynomu $Q(x)$. Tento pojem již jistě znáte (srov. kořen kvadratické funkce = řešení kvadratické rovnice).

Věta 1. (Základní věta algebry) *Každý polynom $Q(x)$ stupně n má právě n komplexních kořenů.*

I s touto větou jste se již setkali, alespoň pro kvadratické polynomy.

Polynom $x - z$ nazýváme *kořenovým činitelem* polynomu $Q(x)$. Pozor, zde je x proměnná a z číslo, tedy příklady kořenových činitelů jsou $x - 1$ nebo $x - 2 + 3i$.

Důsledek 2. *Každý polynom $Q(x)$ stupně n se dá zapsat ve tvaru tzv. součinu kořenových činitelů*

$$Q(x) = k(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n), \tag{2.1}$$

kde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou (komplexní) kořeny polynomu $Q(x)$.

V rozkladu nerozlišujeme zda jsou kořeny různé nebo stejné. *Násobností kořene x_i* rozumíme to, kolikrát vystupuje kořenový činitel v rozkladu (2.1).

Je-li komplexní číslo $z = a + bi$ kořenem polynomu $Q(x)$, pak je také komplexně sdružené číslo $\bar{z} = a - bi$ jeho kořenem. Součin kořenových činitelů $(x - z) \cdot (x - \bar{z}) = x^2 + px + q$ je polynomem druhého stupně (kvadratický polynom s reálnými koeficienty a se záporným diskriminantem).

Důsledek 3. *Každý polynom $Q(x)$ stupně n se dá* ***v množině reálných funkcí*** *zapsat ve tvaru*

$$Q(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_i) \cdot (x^2 + p_1 x + q_1) \cdots (x^2 + p_j x + q_j)$$

kde $x_0, x_1, \ldots, x_i$ jsou ***reálné*** *kořeny polynomu $Q(x)$ a $x^2 + px + q$ jsou součiny kořenových činitelů příslušných ke* ***komplexně sdruženým*** *kořenům, tedy $x^2 + px + q = (x - z) \cdot (x - \bar{z})$.*

Nejlépe vše pochopíte na příkladech polynomů druhého stupně:

(a) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$: dva jednoduché reálné kořeny $x_{1,2} = \pm 1$

(b) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$: jeden dvoj-násobný reálný kořen $x_0 = 1$

(c) $x^2 + 1$: nelze rozložit, nemá reálné kořeny, komplexní kořeny jsou $z_{1,2} = \pm i$; příslušný rozklad v $\mathbb{C}$ by byl $Q(x) = (x - i)(x + i)$.

(d) $x^2 - 2x + 2$: nelze rozložit, nemá reálné kořeny, komplexní kořeny jsou $z_{1,2} = 1 \pm i$

a třetího stupně:

(a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$: jeden troj-násobný reálný kořen $x_0 = 1$

(b) $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$: jeden dvoj-násobný reálný kořen $x_0 = 1$ a jeden jednoduchý reálný kořen $x_0 = -1$

(c) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$: tři jednoduché reálné kořeny $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$

(d) $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$: jeden jednoduchý reálný kořen $x_0 = 1$ a dva komplexní kořeny $x_{1,2} = \pm i$

Dodejme, že jiné možnosti (krom konkrétních hodnot kořenů) u polynomů druhého a třetího stupně nemohou nastat.

B) Hledání kořenů polynomu

To je v praxi nejtěžší problém. Naštěstí se v testech objevují (takřka výhradně) polynomy, jejichž koeficienty jsou celá čísla.(1)

(1) Jsou-li mezi koeficienty také racionální čísla, lze polynom převést na polynom s celočíselnými koeficienty, a to tak, že jej vynásobíme společným jmenovatelem koeficientů, což pochopitelně nemění nezmění kořeny.

Hornerovo schema viz např. [VUT]. Používá se k:

(a) ověření zda je číslo x_0 kořen,

(b) dělení $P_n(x)/(x-a) = P_{n-1}(x)$, kde a je kořen. Tím dosáhneme snížení stupně polynomu, jak tvrdí Bezoutova věta $P_n(x) = (x-a)P_{n-1}(x)$.

Následující věta velmi omezuje množinu ze které má smysl vybírat možné kořeny:

Věta 4. *Buď $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polynom s koeficienty $a_i \in \mathbb{Z}$. Je-li jeho kořenem číslo $x_0 \in \mathbb{Z}$, pak $x_0 | a_0$ (kořen je dělitelem absolutního členu).*

Kdybychom ji neměli, museli bychom vyzkoušet všechna (celá) čísla. Takto je alespoň jasné, že pokud žádný z dělitelů čísla a_0 není kořenem, pak $Q(x)$ prostě nemá **celočíselný** kořen.

Příklady

$$x^3 - x^2 + 5x - 14 = (x-2)(x^2+x+7),$$
$$x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = (x+1)(x-1)(x-3)(x+5),$$
$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$
$$x^3 + 5x^2 + 11x + 15$$

3. Rozklad na parciální zlomky:

Jde o opačný proces k dávání zlomků na společného jmenovatele:

(a) Zápis jmenovatele jako součin kořenových činitelů (viz výše)

(b) Zápis rozkladu jako součet parciálních zlomků typu

Typ I.	$\dfrac{A}{(x-x_0)^k}$	(pro reálný kořen x_0)
Typ II.	$\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$	(pro komplexně sdružené kořeny)

kde k je násobnost kořene a každému k-násobnému kořeni odpovídá právě k parciálních zlomků. Počet neznámých konstant $(A, B, C, \ldots, M, N, \ldots)$ tedy odpovídá stupni jmenovatele $Q(x)$, tedy každému reálnému nebo komplexnímu kořenu odpovídá právě jedna neznámá (konstanta).

(c) Určení koeficientů v čitatelích: Po vynásobení jmenovatelem dostáváme rovnost dvou polynomů, kterou lze řešit dvěma způsoby:

- převod na $n+1$ rovnic o $n+1$ neznámých, pro $\deg Q = n$ (porovnání koeficientů dvou polynomů)
- metoda nulových bodů: dosazení libovolného kořene do nezávislé proměnné zjednodušuje situaci.

Ukažme si rozklad na vzorovém příkladu

$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$
$$2x^2 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$
$$0x^3 + 2x^2 + 0x + 0 = x^3(A+C) + x^2(-A+B-2C+D) + x(A+C-2D) - A + B + D$$

Porovnáním koeficientů obou polynomů dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad 0 = A + C \\ x^2 &: \quad 2 = -A + B - 2C + D \\ x &: \quad 0 = A + C - 2D \\ 1 &: \quad 0 = -A + B + D \end{aligned}$$

kterou umíme řešit metodami probíranými v Matematice I (Gaussova eliminační metoda, dosazovací metoda, ...). Řešením je čtveřice $A = 1, B = 1, C = -1, D = 0$, a tedy

$$\int \frac{2x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \frac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

jednoduchý kořen $x_0 = 0$ a dvojnásobný kořen $x_1 = 2$.

$$\int \frac{2x^3-x^2+x-2}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

dvojnásobný kořen $x_0 = 0$ a dva komplexní kořeny $x_{1,2} = \pm i$.

$$\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x-1} - \frac{2x+5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

jednoduchý kořen $x_0 = 1$ a dva komplexní kořeny $x_{1,2} = \pm i$.

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x,$$

dva dvojnásobné komplexní kořeny $x_{1,2} = \pm i$.

4. Integrace parciálních zlomků:

Je jich celkem 6 typů, většinu už umíme zintegrovat:

1. Zlomek příslušný jednoduchému reálnému kořeni:

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|x-a|,$$

2. Zlomek příslušný násobnému reálnému kořeni:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}},$$

3.–4. Zlomek příslušný jednoduchým komplexně sdruženým kořenům:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+px+q|$$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{(x+p/2)^2}{q-p^2/4}+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)$$

5. Zlomek příslušný násobným komplexně sdruženým kořenům:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}$$

Příklady (integrály příkladů z předchozího kroku)

$$\int \frac{3}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x| + 2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + c,$$

$$\int \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{x} + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x) + c,$$

$$\int \frac{3}{x-1} - \frac{2x+5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x-1| - \ln(x^2+1) - 5\arctan(x) + c,$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x^2+1} + \arctan(x) + c$$

Úlohy k procvičení:

$$\int \frac{x^4+2x^3+2x^2+5}{x^3+1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$$

$$\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x}{x^4-3x^2+2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x$$

Jen pro úplnost (viz např. [MS, lekce 9])

Poslední parciální zlomek

6. $$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

rozložíme přičtením a odečtením x^2: u jednoho se sníží stupeň jmenovatele, druhý se spočítá metodou per partes.

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t &= 2\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \left| u = t, \quad v' = \frac{t}{(t^2+1)^2} \right|\\ &= 2\arctan(t) + \frac{t}{t^2+1} - \arctan(t)\end{aligned}$$

Reference

[VB] H. Vrbenská – J. Bělohlávková, Základy matematiky pro bakaláře II. 2. vyd (Skriptum VŠB-TU Ostrava, Ostrava, 2006).

[VUT] Matematika online, `http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=747` (ÚM FSI VUT, Brno, 2006)

[MS] Moje škola, e-learningový kurz Matika krokem 2. Limita, derivace, integrál, `http://www.mojeskola.cz/Vyuka/Php/Learning/matika_krokem.php`