Matematika I (FS, kombinované studium)

Příklad č. 1: Výpočet definičního oboru a inverzní funkce

K dané funkci *f* nalezněte

- definiční obor
- maximální interval, na kterém je funkce prostá,
- předpis inverzní funkce
- obor hodnot obou funkcí.

1. $f(x): y = 1 - \ln\left(-1 + \sqrt{x}\right)$

2. $M(R): M = \pi\left(R^4 - r^4\right)$

3. $f(x): y = \ln\left(1 - \mathrm{e}^x\right)$

4. $p(b): \dfrac{p}{q} = \sqrt{\dfrac{a+2b}{a-2b}}$

5. $f: y = 3 + 2\arccos\dfrac{x}{2}$

6. $S(L): L = \sqrt{\dfrac{3d(L-d)}{8}}$

7. $f: y = \dfrac{4x-1}{x+3}$

8. $y(r): y + x = \dfrac{r}{4+r}$

9. $f: y = \ln(x-1) - \ln(x+1)$

10. $f: y = 3 - \dfrac{2}{1+2x+x^2}$

11. $f: y = \dfrac{1}{\sin x}$

Příklad č. 2: l’Hôpitalovo pravidlo

S využitím l’Hôpitalova pravidla vypočítejte limitu:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{4x}}{x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\cot x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\mathrm{e}^{-3x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{\sqrt{x-1}}{2x+3}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{2x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-1}\right)^{x+3}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Příklad č. 3: Taylorův polynom

S pomocí Taylorova polynomu třetího stupně funkce *f* v bodě $x = 0$ spočítejte přibližnou hodnotu čísla *a*.

1. $f: y = \mathrm{e}^x, \quad a = \mathrm{e}.$

2. $f: y = \ln(1+x^2), \quad a = \ln(2).$

3. $f: y = \log(x), \quad a = \log(10).$

4. $f: y = \sin x, \quad a = \sin(\tfrac{1}{2}).$

5. $f: y = \sin x, \quad a = \sin(1).$

6. $f: y = \cos x, \quad a = \cos(\tfrac{1}{2}).$

7. $f: y = \cos x, \quad a = \cos(1).$

8. $f: y = \tan x, \quad a = \tan(1).$

9. $f: y = \arcsin x, \quad a = \arcsin(0,7).$

10. $f: y = \arccos x, \quad a = \arccos(0,9).$

11. $f: y = \arctan x, \quad a = \arctan(1,7).$

Příklad č. 4: průběh funkce

Pro zadanou funkci

- určete její definiční obor
- nalezněte souřadnice průsečíků grafu se souřadnicovými osami,
- vypočítejte limity v krajních bodech definičního oboru (včetně nevlastních bodů),
- pomocí první derivace nalezněte všechny jejich stacionární body, určete intervaly monotónnosti a nalezněte všechny lokální extrémy,
- pomocí druhé derivace nalezněte všechny inflexní body a určete intervaly konvexnosti (resp. konkávnosti),
- napište rovnice všech asymptot (se směrnicí, bez směrnice),
- v Geogebře si vykreslete graf funkce.

1. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

2. $y = x \cdot \ln x$

3. $y = \mathrm{e}^{-x^2}$

4. $y = x + \mathrm{e}^{-x}$

5. $y = \arctan \dfrac{1}{x}$

6. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{1+x^2}$

7. $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

8. $y = \mathrm{e}^{x^2-3x+2}$

9. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$

10. $y = \arcsin \sqrt{x}$

Příklad č. 5: extremální úloha

1. Kávový filtr

Z kulatého filtračního papíru o poloměru 15cm potřebujeme vyříznout kruhovou výseč na kávový filtr ve tvaru pláště kužele. Určete výšku filtru h (a poloměr podstavy r) tak, aby filtr měl co největší objem.

2. Plechová výztuha

Z plechu potřebujeme vystřihnout výztuhu ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku. Jeho ramena a menší základna mají délku 20m. Určete délku větší základny b (a výšku lichoběžníku v) tak, aby byl obsah výztuhy co největší.

3. Soutěž tesařské dovednosti

Soutěžící tesaři mají za úkol opracovat kmen stromu ve tvaru válce o poloměru 30cm a udělat z něj trám ve tvaru kvádru. Při opracovávání mají dbát na to, aby nosnost trámu, která je dána vztahem $N = 0{,}15 \cdot sv^2$, byla co největší. Poraďte jim o jakou výšku v a šířku s průřezu trámu se mají snažit.

4. Tunel

Do tunelu ve tvaru půlkružnice o poloměru 3m je vloženo bednění ve tvaru lichoběžníku, jehož spodní základna je průměr půlkružnice. Určete výšku lichoběžníku v (a délku jeho horní základny z) tak, aby byl jeho obsah co největší.

5. Lentilky

Dutá plastová koule na hračky do automatu pro děti má průměr 10cm. Výrobce do ní chce umístit krabičku s lentilkami ve tvaru válce. Určete poloměr r (a výšku h) krabičky tak, aby se do ní vešlo co nejvíce lentilek (tedy aby měla největší objem).

6. Turecký med

Cukrář má kouli tureckého medu o poloměru 50cm a potřebuje z ní vyříznout kvádr (se čtvercovou podstavou). Určete délku podstavy d (a výšku kvádru h) tak, aby vzniklý kvádr byl co největší.

7. Věžička

Ve věžičce tvaru kužele o poloměru podstavy 5m a výšce 20m je potřeba zřídit válcovou místnost. Určete poloměr podstavy místnosti r (a její výšku h) tak, aby místnost byla co nejprostornější.

8. Vzácné plátno

Zloději mají úkryt ve tvaru kužele o poloměru 30cm podstavy a výšce 200cm, a do něj plánují uschovat vzácné plátno stočené do tuby ve tvaru válce. Určete poloměr podstavy válce r (a jeho výšku h) tak, aby povrch válce byl co největší.

9. Balík slámy

Farmář má přístřešek ve tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu o výšce 5m a délce podstavy 11m. Potřebuje v něm uskladnit balík slámy ve tvaru válce. Určete poloměr podstavy válce r (a jeho výšku h) tak, aby balík měl co největší objem.

10. Pionýři

Pionýři mají stan ve tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu se stranou podstavy 5m a výšce 3m. Do stanu potřebují schovat krabici ve tvaru kvádru (se čtvercovou podstavou) s tajným pokladem. Určete délku podstavy r (a jeho výšku h) tak, aby do krabice mohli schovat co největší poklad.