Skalární součin, ortogonalita vektorů

Lineární algebra

lekce 9

Osnova

1. Skalární součin na aritmetických LVP
2. Skalární součin (obecně)
3. Ortogonální matice a transformace

1. Skalární součin na aritmetických LVP

Skalární součin AV

Definice:

Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jsou dva vektory z $\mathbb{R}^n$, pak pod jejich *skalárním součinem* budeme rozumět:*

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \overset{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$

Poznámka:**

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \mathbf{a}^T . \mathbf{b} = \mathbf{b}^T . \mathbf{a}$

Poznámka:

Pro skalární součin vektorů se používají některá další označení:***

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,
- $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ příp. $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle$.

* Tentokrát se opravdu omezíme jen na reálné prostory, v případě komplexních prostorů by se tato definice i následující tvrzení lišily.

** Podle dohody z lekce 3 je $\mathbf{a}$ sloupcový vektor (matice řádu $n \times 1$) a $\mathbf{a}^T$ vektor řádkový (matice $1 \times n$). Tečkou na úrovni řádku značíme maticové násobení.

*** Označení $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ využijeme později pro definici skalárního součinu na obecných LVP, symbol „ ·“ si vyhradíme pro skalární součin AV.

Eukleidovská norma AV

Pozorování:

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$,
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \overset{\text{def}}{=} (0,0, \dots, 0)$.

Definice:

Pod *eukleidovskou normou* aritmetického vektoru $\boldsymbol{a}$ rozumíme:

- $\|\boldsymbol{a}\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^T . \mathbf{a}}$.

Poznámka:

- $\|\alpha \boldsymbol{a}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{a}\|$,
- $\|\boldsymbol{o}\| = 0$,
- eukleidovská norma vektorů kanonické báze je rovna 1 ($\|\boldsymbol{e}_k\| = 1$).

Vlastnosti skalárního součinu AV

Pozorování: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}; \alpha \in \mathbb{R}]$

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$,
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$,
- $(\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$,
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

Poznámka:

Skalární součin není asociativní, výraz $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ není vůbec definován.

Důsledky pozorování:

- $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})$,
- $\boldsymbol{a} \cdot (\alpha \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

Úhel dvou AV

Tvrzení: (Cauchyho – Bunjakovského – Schwartzova nerovnost)

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ platí:

- $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$,

přičemž

- $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \iff$ vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou lineárně závislé (tj. jeden je násobkem druhého).

Důkaz:

- nerovnost
  - $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$: $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{o}| = |0| = 0$, $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{o}\| = \|\boldsymbol{a}\|0 = 0$, tedy $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{o}| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{o}\|$,
  - $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$: $(\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) - 2\alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \alpha^2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) = \left[\alpha = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}\right] = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) - \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b})} \geq 0$, tedy $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$;
- rovnost
  - $\Leftarrow$: nechť např. $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a} \Rightarrow$
    - $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = |\alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})| = |\alpha|\,|(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})| = |\alpha|\|\boldsymbol{a}\|^2$,
    - $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\alpha\boldsymbol{a}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{a}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{a}\|^2$;
  - $\Rightarrow$: $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \Rightarrow$
    - $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$: lineárně závislé,
    - $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$: $\left(\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\right) \cdot \left(\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\right) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, tedy opět lineárně závislé.

Úhel dvou AV

Definice:

Pod *úhlem* dvou aritmetických vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující:

- $\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|}$.

Poznámka:

- $\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|} \in \langle -1, 1 \rangle \wedge \varphi \in \langle 0, \pi \rangle \quad \to \quad \varphi = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|}$.
- Proč kosinus? $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{a}\|} = \arccos \frac{\|\boldsymbol{a}\|^2}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{a}\|} = \arccos 1 = 0$ (dle očekávání).
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \arccos \frac{0}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|} = \frac{\pi}{2} \quad (\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b})$

Definice:

Řekneme, že dva aritmetické vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ jsou *ortogonální* (*kolmé*), právě když $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.
Pokud navíc tyto vektory splňují $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = 1$, nazveme je *ortonormálními*.

Pozorování:

- Nulový vektor z $\mathbb{R}^n$ je ortogonální ke každému vektoru z $\mathbb{R}^n$.
- Vektory kanonické báze na $\mathbb{R}^n$ jsou navzájem ortogonální (navíc splňují $\|\boldsymbol{e}_k\|$, jsou tedy i ortonormální).

Úhel dvou AV

Příklad:

Určete úhel sevřený vektory $\boldsymbol{a} = (1,2,3)$ a $\boldsymbol{b} = (3,2,1)$.

Řešení:

- $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \equiv \alpha = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|}$,
- $\cos \alpha = \frac{(1,2,3) \cdot (3,2,1)}{\|(1,2,3)\| \|(3,2,1)\|} = \frac{1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2} \times \sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = \frac{10}{14}$,
- $\alpha = \arccos \frac{10}{14} \approx 0{,}775 \text{ rad} \approx 44°25'$.

Úhel dvou AV

Příklad:

Nalezněte všechny vektory z $\mathbb{R}^3$ kolmé k vektorům $\boldsymbol{a} = (1,2,3)$ a $\boldsymbol{b} = (3,2,1)$.

Řešení:

- $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$,
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \quad \to x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0,$
  $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \quad \to 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t, \ \ t \in \mathbb{R} \end{array},$
- $\boldsymbol{x} = (1, -2, 1)t \quad \to \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{L}((1, -2, 1))$.

Poznámka:

- $\boldsymbol{a} = (1,2,3)$ a $\boldsymbol{b} = (3,2,1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$,
- srovnejte s postupem při hledání jádra matice (viz lekce 4, obrazovka 15).

Úhel dvou AV

Pozorování:

- Pythagorova věta:
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Longrightarrow \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$,
  - $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$.

Skalární součin AV v obecné bázi

Tvrzení:

Nechť $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ je báze na $\mathbb{R}^n$ a vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ mají v této bázi souřadnice $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ $(\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{a}_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \boldsymbol{a}_i)$ a $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ $(\boldsymbol{y} = \eta_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \eta_n \boldsymbol{a}_n = \sum_{j=1}^n \eta_j \boldsymbol{a}_j)$.

Pak platí:

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}^T . \mathbf{S} . \boldsymbol{\eta}$,

kde

- $s_{ij} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$.

Důkaz:

- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \boldsymbol{a}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \boldsymbol{a}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \underbrace{(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j)}_{s_{ij}} \eta_j$.

Poznámka:

V případě

- $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0$ pro $i \neq j$ a $\|\boldsymbol{a}_i\| = 1$ (*ortonormální báze*, viz následující obrazovka)

platí:

- $\mathbf{S} = \mathbf{I}$,
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i = \boldsymbol{\xi}^T . \boldsymbol{\eta}$.

Ortogonální systém, ortogonální báze

Definice:

Množinu nenulových vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *ortogonálním systémem*, právě když:

- $\forall i, j = 1,2, \dots, m, i \neq j: \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0.$

Pokud navíc tyto vektory ($\forall i = 1,2, \dots, m$) splňují

- $\|\boldsymbol{a}_i\| = 1,$

hovoříme o *systému ortonormálním*.

Tvrzení:

Ortogonální (ortonormální) systém vektorů je tvořen vektory lineárně nezávislými.

Důkaz:

- $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{o} \quad \Rightarrow \quad \forall j = 1,2, \dots, m: \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{a}_i\right) \cdot \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{a}_j = 0 \\ \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{a}_i\right) \cdot \boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j\right) = \alpha_j \left(\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_j\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha_j \underbrace{\left(\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_j\right)}_{\|\boldsymbol{a}_j\|^2 \neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \alpha_j = 0$

Definice:

Bázi na $\mathbb{R}^n$ sestavenou z ortogonálních (ortonormálních) vektorů nazveme *bází ortogonální* (*ortonormální*).

Pozorování:

Kanonická báze na $\mathbb{R}^n$ je bází ortonormální. (Není to ale jediná ortonormální báze na $\mathbb{R}^n$!)

Souřadnice vektoru v ortonormální bázi

Tvrzení:

Nechť $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ je ortonormální báze, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ v této bázi $(\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{a}_i)$. Pak platí:

- $\xi_j = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_j \; (j = 1,2, \dots, n)$.

Důkaz:

- $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{a}_i$,
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{a}_i\right) \cdot \boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j\right) = \left\{\begin{matrix} i \neq j\colon \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0 \\ i = j\colon \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_j = 1 \end{matrix}\right\} = \xi_j$

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Záměr:

Nechť $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ je (obecně neortogonální) systém lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{R}^n$. Hledáme (aspoň jeden) ortogonální (ortonormální) systém $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ splňující:

- $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m) = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m)$.

Postup:

- $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\left[b_1' = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\right]$,
- $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \alpha_1^{(2)} \boldsymbol{b}_1$:
  - $\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1^{(2)} = \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}$,
  - $\boldsymbol{b}_2' \longrightarrow \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|}$, (vektor $\boldsymbol{b}_2$ nemůže být nulový, protože pak by vektory $\boldsymbol{a}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$ byly lineárně závislé; platí i níže pro $\boldsymbol{b}_3$ atd.)
- $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \alpha_1^{(3)} \boldsymbol{b}_1 - \alpha_2^{(3)} \boldsymbol{b}_2$:
  - $\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1^{(3)} = \frac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}$,
  - $\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2^{(3)} = \frac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2}$,
  - $\boldsymbol{b}_3' \longrightarrow \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|}$,
- …

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

- $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k - \alpha_1^{(k)}\boldsymbol{b}_1 - \alpha_2^{(k)}\boldsymbol{b}_2 - \cdots - \alpha_{k-1}^{(k)}\boldsymbol{b}_{k-1}$:
  - $\boldsymbol{b}_k \cdot \boldsymbol{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1^{(k)} = \frac{\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}$,
  - $\boldsymbol{b}_k \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2^{(k)} = \frac{\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2}$,
  - …
  - $\boldsymbol{b}_k \cdot \boldsymbol{b}_{k-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{k-1}^{(k)} = \frac{\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{b}_{k-1}}{\boldsymbol{b}_{k-1} \cdot \boldsymbol{b}_{k-1}}$,
  - $\boldsymbol{b}'_k \longrightarrow \frac{\boldsymbol{b}_k}{\|\boldsymbol{b}_k\|}$,
- …
- $\boldsymbol{b}_m = \ldots$

Poznámka:

Takto získané vektory $\boldsymbol{b}_k$ můžeme průběžně nahrazovat jejich libovolným (nenulovým) násobkem zvoleným tak, aby se numerické výpočty co možná nejvíce zjednodušily.

(Neplatí samozřejmě pro normované vektory $\boldsymbol{b}'_k$.)

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Příklad:

Pomocí G-SO ortogonalizujte (ortonormalizujte) zadané vektory z $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,1)$ a $\boldsymbol{a}_3 = (0,1,0)$.

Řešení:

- $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (1,1,0)$, $\left[\boldsymbol{b}_1' = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right]$,
- $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \alpha_1^{(2)} \boldsymbol{b}_1$, kde $\alpha_1^{(2)} = \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}$:
  - $\alpha_1^{(2)} = \frac{(0,1,1)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)} = \frac{0\times 1+1\times 1+1\times 0}{1\times 1+1\times 1+0\times 0} = \frac{1}{2}$,
  - $\boldsymbol{b}_2 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow (-1,1,2)$, $\left[\boldsymbol{b}_2' = \cdots = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right]$,
- $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \alpha_1^{(3)} \boldsymbol{b}_1 - \alpha_2^{(3)} \boldsymbol{b}_2$, kde $\alpha_1^{(3)} = \frac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}$ a $\alpha_2^{(3)} = \frac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2}$:
  - $\alpha_1^{(3)} = \frac{(0,1,0)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)} = \frac{1}{2}$, $\alpha_2^{(3)} = \frac{(0,1,0)\cdot(-1,1,2)}{(-1,1,2)\cdot(-1,1,2)} = \frac{1}{6}$,
  - $\boldsymbol{b}_3 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{6}(-1,1,2) = \cdots = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \rightarrow (-1,1,-1)$, $\left[\boldsymbol{b}_3' = \cdots = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$,

$\boldsymbol{b}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1,1,2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-1,1,-1)$; $\boldsymbol{b}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\boldsymbol{b}_2' = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\boldsymbol{b}_3' = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Skalární součin (obecně)

Skalární součin

Pozorování:

- Všechna tvrzení o skalárním součinu AV od obrazovky 7 dále jsme formulovali / dokázali bez využití předpokladu, že se jedná o AV (uspořádané n-tice reálných čísel),
- využili jsme jen vlastností skalárního součinu AV shrnutých na obrazovce 6,
- všechna výše dokázaná tvrzení tedy zůstanou v platnosti i v případě obecných LVP, na kterých definujeme skalární součin tak, aby měl vlastnosti skalárního součinu AV.

Definice: (axiomy skalárního součinu)

Nechť $\mathcal{U}$ je (reálný) LVP a $(\ ,\ ): \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ je zobrazení splňující $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathcal{U}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ níže uvedené axiomy:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$,
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$,
- $(\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0, \ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

Pak toto zobrazení nazveme *skalárním součinem* na $\mathcal{U}$ a zobrazení $\|\ \|: \mathcal{U} \to \mathbb{R}_0^+$ definované předpisem

- $\|\boldsymbol{a}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$

nazveme *normou* indukovanou tímto skalárním součinem.

Skalární součin

Pozorování:

- Skalární součin je symetrická bilineární forma*, jejíž indukovaná kvadratická forma je pozitivně definitní.
- A naopak, každá taková bilineární forma definuje na zadaném LVP nějaký skalární součin.

Poznámka:

Všechna tvrzení uvedená výše pro AV zůstávají v platnosti i pro obecné LVP se skalárním součinem splňujícím axiomy z předchozí obrazovky:

- Cauchyho-Bunjakovského-Schwartzova nerovnost, úhel vektorů,
- maticové vyjádření skalárního součinu v obecné bázi,
- definice ortogonálního / ortonormálního systému vektorů, lineární nezávislost nenulových ortogonálních vektorů, definice ortogonální / ortonormální báze,
- Gramova-Schmidtova ortogonalizační procedura.

* Pozor, platí jen na reálných LVP!

Skalární součin

Příklad:

Nechť $\mathcal{P}_n(a,b)$ je LVP všech polynomů definovaných na intervalu (a,b) maximálně stupně n. Pak

- $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b p(x)q(x)\mathrm{d}x$

je skalárním součinem na $\mathcal{P}_n(a,b)$.

Poznámka:

Výše zavedený skalární součin na $\mathcal{P}_n(a,b)$ umožňuje například:

- počítat „úhel“ sevřený dvěma polynomy,
- definovat ortogonální polynomy (na zadaném intervalu),
- provést Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci polynomů,
- definovat normu („délku“) polynomu,
- atd.

Poznámka:

Podobně bychom mohli postupovat i na obecnějších LVP, např. na prostorech všech spojitých funkcí na (a,b):

- $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$

3. Ortogonální matice a transformace

Ortogonální matice

Definice:

Reálnou (regulární) matici $\mathbf{Q}$ (řádu $n \times n$) nazveme *ortogonální*, právě když splňuje:

- $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{T}$.

Pozorování: (původ názvu)

- $\mathbf{Q}^{T}.\mathbf{Q} = \mathbf{I} \;\rightarrow\;$ sloupce matice $\mathbf{Q}$ chápané jako AV jsou vzájemně ortogonální (nuly mimo diagonálu $\mathbf{I}$), mají jednotkovou eukleidovskou normu (jedničky na diagonále $\mathbf{I}$) a navíc tvoří na $\mathbb{R}^{n}$ ortonormální systém (bázi),
- $\mathbf{Q}.\mathbf{Q}^{T} = \mathbf{I} \;\rightarrow\;$ pro řádky matice $\mathbf{Q}$ chápané jako AV platí totéž.

Důsledek:

Determinant ortogonální matice je roven 1, nebo -1.

Důkaz:

- $$\det(\mathbf{Q}^{T}.\mathbf{Q}) = \left\{\begin{matrix} \det \mathbf{I} = 1 \\ \det(\mathbf{Q}^{T})\det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{Q}) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \det(\mathbf{Q})^{2} = 1.$$

Ortogonální matice

Tvrzení:

Nechť $\mathbf{Q}$ je matice řádu $n \times n$ a $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení definované předpisem

- $\boldsymbol{z} = Q(\boldsymbol{x}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{z} = \mathbf{Q}.\mathbf{x}.$

Pak matice $\mathbf{Q}$ je ortogonální, právě když $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí $Q(\boldsymbol{x}) \cdot Q(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

Důkaz:

- $\boldsymbol{u} = Q(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} = Q(\boldsymbol{y}),$
- $\Rightarrow$: $Q(\boldsymbol{x}) \cdot Q(\boldsymbol{y}) = \mathbf{u}^T.\mathbf{v} = (\mathbf{Q}.\mathbf{x})^T.(\mathbf{Q}.\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T.\underbrace{(\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q})}_{\mathbf{I}}.\mathbf{y} = \mathbf{x}^T.\mathbf{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$
- $\Leftarrow$: $Q(\boldsymbol{x}) \cdot Q(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \Rightarrow (\mathbf{Q}.\mathbf{x})^T.(\mathbf{Q}.\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T.\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}^T.(\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q}).\mathbf{y} = \mathbf{x}^T.\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}^T.(\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q} - \mathbf{I}).\mathbf{y} = 0 \; (\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow$ $\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$ *

Důsledek:

- Pro zobrazení z předcházejícího tvrzení platí: $\|Q(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$.
- Lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definované pomocí ortogonální matice zachovává:
  - normu („délku“) vektoru,
  - úhly mezi vektory.

* Viz lekce 7, obrazovka 8. Jak navíc plyne z důkazu uvedeného v této lekci, dokonce by stačilo $\mathbf{x}^T.(\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q} - \mathbf{I}).\mathbf{x} = 0$, tedy aby zobrazení Q „pouze“ zachovávalo eukleidovskou normu vektoru, ne nutně úhel vektory sevřený (ten už pak bude zachovávat automaticky).

Ortogonální transformace

Opakování:

Nechť $\mathcal{U}$ je (konečněrozměrný) LVP a $A: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{U}$ sama na sebe. Pak A nazveme *lineární transformací* na $\mathcal{U}$ (viz též lekce 5).

Definice:

Lineární transformaci $Q: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ na konečněrozměrném prostoru $\mathcal{U}$ se skalárním součinem $(\ ,\ )$ nazveme *ortogonální*, právě když $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí:

- $\big(Q(\boldsymbol{x}), Q(\boldsymbol{y})\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Poznámka:

- Zobrazení $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definované na předchozí obrazovce zadává ortogonální transformaci na $\mathbb{R}^n$,
- tedy každá ortogonální matice řádu $n \times n$ definuje na $\mathbb{R}^n$ ortogonální transformaci.
- A naopak?

Maticová reprezentace ortogonální transformace

Opakování: (viz lekce 5, část 3: *Maticová reprezentace LZ*)

- $\mathcal{U}$ je (konečněrozměrný) LVP a $A: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je lineární transformace na $\mathcal{U}$,
- $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ je báze na $\mathcal{U}$:
  - $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{a}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i$,
  - $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$: $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + u_n\boldsymbol{a}_m = \sum_{i=1}^{n} u_i\boldsymbol{a}_i$,
- $\boldsymbol{u} = A(\boldsymbol{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{A}.\mathbf{x} \qquad \left[A(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{a}_i\right]$.

Tvrzení:

Ortogonální transformaci $Q: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ v ortonormální bázi* $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ reprezentuje ortogonální matice $\mathbf{Q}$.

Důkaz:

- $$\left(Q(\boldsymbol{a}_j), Q(\boldsymbol{a}_k)\right) = \left\{\begin{array}{l} (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ pro } j = k \\ 0 \text{ pro } j \neq k \end{array}\right\} = (\mathbf{I})_{jk} \\ \left(\sum_{i=1}^{n} q_{ij}\boldsymbol{a}_i, \sum_{l=1}^{n} q_{lk}\boldsymbol{a}_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} q_{ij}q_{lk}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_l) = \sum_{l=1}^{n} q_{lj}q_{lk} = (\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q})_{jk} \end{array}\right\} = \mathbf{Q}^T.\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

* Pozor, obecně pro neortonormální bázi neplatí!

SLAR s ortogonální maticí

Pozorování:

- $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je ortogonální matice (řádu $n \times n$, tedy n rovnic pro n neznámých),
- $\mathbf{A}^T.(\mathbf{A}.\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T.\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad (\underbrace{\mathbf{A}^T.\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}).\mathbf{x} = \mathbf{A}^T.\mathbf{b}$,
- $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T.\mathbf{b}$.

Poznámka:

Srovnejte s náročností řešení soustavy s (obecnou) regulární maticí:

- $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{b}$.

Konec lekce 9.