

Ortogonalní projekce

Lineární algebra

lekce 10

Osnova

1. Ortogonální podprostory
2. Ortogonální projekce
3. Ortogonální projekce na aritmetických LVP
4. Přibližné řešení přeúčtených SLAR

1. Ortogonální podprostory

Ortogonalní množiny

Definice:

Nechť \mathcal{M} a \mathcal{N} jsou dvě (neprázdné) podmnožiny LVP \mathcal{U} a $(,)$ je skalární součin na \mathcal{U} . Množiny \mathcal{M} a \mathcal{N} nazveme *ortogonálními* (případně řekneme, že \mathcal{M} je *ortogonální k* \mathcal{N} nebo že \mathcal{N} je *ortogonální k* \mathcal{M}), právě když

- $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{M}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Poznámka:

Množiny \mathcal{M} a \mathcal{N} mohou být např. podprostory \mathcal{U} . Pak hovoříme o *ortogonálních podprostorech*.

Tvrzení:

- Nechť \mathcal{P} a \mathcal{Q} jsou dva ortogonální podprostory \mathcal{U} , pak $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{\mathbf{o}\}$.

Důkaz:

- $\mathbf{o} \in \mathcal{P}, \mathcal{Q}$, platí tedy $\{\mathbf{o}\} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$,
- $\mathbf{u} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \Rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$, tedy žádný další vektor v $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ obsažen není.

- Podprostor \mathcal{P} je ortogonální ke konečnědimenzionálnímu podprostoru \mathcal{Q} , právě když je ortogonální k libovolné množině jeho generátorů (např. bázi).

Důkaz:

- \Rightarrow : \mathcal{P} je ortogonální ke všem vektorům z \mathcal{Q} , speciálně tedy k jeho libovolným generátorům,
- \Leftarrow : $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(\mathbf{u}, \sum_{j=1}^q \omega_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{j=1}^q \omega_j \underbrace{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_j)}_0 = 0$.

Ortogonalní množiny

Příklad:

Nechť \mathbf{A} je matice (obecného řádu $m \times n$), pak*

- $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$,
- příp. $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$

jsou (vzájemně) ortogonální podprostory \mathbb{R}^n příp. \mathbb{R}^m .

Důkaz:

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^R \cdot \mathbf{x} \\ \dots \\ \mathbf{a}_m^R \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$
- $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^T).$

* $\mathcal{R}(\mathbf{A}), \mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ jsou řádkový, sloupcový a nulový prostor matice \mathbf{A} (viz lekce 4, obrazovky 8, 11 a 14).

Ortogonalní doplněk

Definice:

Nechť \mathcal{P} je podprostor LVP \mathcal{U} a $(,)$ je skalární součin na \mathcal{U} . Pak pod *ortogonálním doplňkem* \mathcal{P} v \mathcal{U} rozumíme:

- $\mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{q} \in \mathcal{U} : \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} : (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0 \}$.

Poznámka:

Ortogonalní doplněk podprostoru \mathcal{P} budeme označovat symbolem \mathcal{P}_\perp .

Tvrzení:

Ortogonalní doplněk podprostoru \mathcal{P} na LVP \mathcal{U} je podprostor \mathcal{U} .

Důkaz: ($\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathcal{P}_\perp, \alpha \in \mathbb{R}$)

- $(\mathbf{p}, \mathbf{q} + \mathbf{r}) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) + (\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{q} + \mathbf{r} \in \mathcal{P}_\perp,$
- $(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) = \alpha (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \alpha \times 0 = 0 \Rightarrow \alpha \mathbf{q} \in \mathcal{P}_\perp.$

Ortogonalní doplněk

Věta: (o ortogonálním rozkladu)

Nechť \mathcal{U} je konečnědimenzionální LVP, $(,)$ skalární součin na něm a \mathcal{P} jeho podprostor. Pak

- $\mathcal{U} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}_\perp,$

neboli (viz lekce 3, obrazovka 33)

- $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}: \exists! \mathbf{p} \in \mathcal{P} \text{ a } \exists! \mathbf{q} \in \mathcal{P}_\perp: \mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{q}.$

Důkaz:

- jednoznačnost

- $\mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{p}' + \mathbf{q}' \Rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{p}' (\in \mathcal{P}) = \mathbf{q}' - \mathbf{q} (\in \mathcal{P}_\perp) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{o} \\ \mathbf{q}' - \mathbf{q} = \mathbf{o} \end{cases}$

- existence

- $\dim \mathcal{P} < +\infty$ [proč?],

- nechť $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ je ortonormální báze na \mathcal{P} [umíme z obecné báze „vyrobit“ ortonormální?],

- pak $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}: \mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} - \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{a}_j \in \mathcal{P}_\perp$ [stačí zvolit $\alpha_k = (\mathbf{u}, \mathbf{a}_k)$, pak bude $\mathbf{q} \perp \mathbf{a}_k$, a tedy i $\mathbf{q} \perp \mathcal{P}$]

- $\mathbf{u} = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{a}_j\right)}_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{a}_j\right)}_{\mathbf{q} \in \mathcal{P}_\perp}.$

Ortogonalní doplněk

Tvrzení:

Ortogonalní doplněk ortogonálního doplňku podprostoru \mathcal{P} je na konečnědimenzionálním prostoru \mathcal{U} roven \mathcal{P} :

- $(\mathcal{P}_\perp)_\perp = \mathcal{P}$.

Důkaz:

- $\mathcal{P} \subset (\mathcal{P}_\perp)_\perp$:

- $\mathbf{p} \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathbf{p}$ je kolmý ke všem vektorům z $\mathcal{P}_\perp \Rightarrow \mathbf{p} \in (\mathcal{P}_\perp)_\perp$,

- $(\mathcal{P}_\perp)_\perp \subset \mathcal{P}$:

- $\mathbf{r} \in (\mathcal{P}_\perp)_\perp \subset \mathcal{U}$,

- $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, kde $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ a $\mathbf{q} \in \mathcal{P}_\perp$,

- $\forall \mathbf{s} \in \mathcal{P}_\perp: (\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ neboť } \mathbf{r} \in (\mathcal{P}_\perp)_\perp \\ \underbrace{(\mathbf{s}, \mathbf{p})}_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \mathbf{s} \in \mathcal{P}_\perp} + (\mathbf{s}, \mathbf{q}) = 0 + (\mathbf{s}, \mathbf{q}) = (\mathbf{s}, \mathbf{q}) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \mathbf{s} \in \mathcal{P}_\perp: (\mathbf{s}, \mathbf{q}) = 0 \stackrel{\mathbf{s}=\mathbf{q}}{\implies} \mathbf{q} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{p} \in \mathcal{P}.$

2. Ortogonální projekce

Ortogonalní projekce

Definice:

Nechť \mathcal{P} je podprostor konečnědimenzionálního LVP \mathcal{U} , $(,)$ skalární součin na \mathcal{U} a \mathcal{P}_\perp ortogonální doplněk \mathcal{P} v \mathcal{U} , pak pod *ortogonální projekcí* vektoru $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ na podprostor \mathcal{P} rozumíme vektor $\mathbf{u}_\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ takový, že:

- $\mathbf{u}_{\mathcal{P}_\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{P} \in \mathcal{P}_\perp$.

Poznámka:

- Podle věty o ortogonálním rozkladu (obrazovka 7) ortogonální projekce vektoru (na zadaný podprostor) existuje a je určena jednoznačně.
- Podle tvrzení z obrazovky 8 je $\mathbf{u}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{P}$ ortogonální projekcí vektoru \mathbf{u} na \mathcal{P}_\perp .

Důkaz (druhé odrážky):

- $\mathbf{u}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{P} \in \mathcal{P}_\perp$,
- $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathbf{u} - (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\mathcal{P}) = \mathbf{u}_\mathcal{P} \in \mathcal{P} = (\mathcal{P}_\perp)_\perp$.

Ortogonalní projektor

Definice:

Zobrazení $P: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ ($\dim \mathcal{U} = n$) definované předpisem

- $P(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_{\mathcal{P}}$,

kde $\mathbf{u}_{\mathcal{P}}$ je ortogonalní projekce \mathbf{u} na \mathcal{P} (viz předcházející obrazovka), nazveme *ortogonalním projektorem* na \mathcal{P} .

Tvrzení:

Nechť P je ortogonalní projektor, pak platí

- P je lineární zobrazení (transformace),
- $P^2 \stackrel{\text{def}}{=} P \circ P = P$,
- matice reprezentující P v (libovolné) ortonormální bázi $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ na \mathcal{U} je symetrická, $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$.

Důkaz:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \underbrace{(\mathbf{u}_{\mathcal{P}} + \mathbf{v}_{\mathcal{P}})}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{(\mathbf{u}_{\mathcal{P}^\perp} + \mathbf{v}_{\mathcal{P}^\perp})}_{\in \mathcal{P}^\perp} \xrightarrow[\text{rozkladu}]{\text{jednoznačnost}} P(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}_{\mathcal{P}} + \mathbf{v}_{\mathcal{P}} = P(\mathbf{u}) + P(\mathbf{v})$, obdobně pro $\alpha \mathbf{u}$
- $P^2(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} (P \circ P)(\mathbf{u}) = P(P(\mathbf{u})) = P(\mathbf{u}_{\mathcal{P}}) = [\mathbf{u}_{\mathcal{P}} = \mathbf{u}_{\mathcal{P}} + \mathbf{o}] = \mathbf{u}_{\mathcal{P}} \stackrel{\text{def}}{=} P(\mathbf{u}) \Rightarrow \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}: P^2(\mathbf{u}) = P(\mathbf{u})$,
- $P(\mathbf{a}_j) = \sum_{k=1}^n p_{kj} \mathbf{a}_k$ (lekce 5, obrazovka 20) $\Rightarrow p_{ij} = (\mathbf{a}_i, P(\mathbf{a}_j)) = (P(\mathbf{a}_i), P(\mathbf{a}_j)) = (P(\mathbf{a}_i), \mathbf{a}_j) = (\mathbf{a}_j, P(\mathbf{a}_i)) = p_{ji}$.

3. Ortogonální projekce na aritmetických LVP

Projekce na 1D podprostor (přímku)

Příklad:

Nechť $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$), nalezněte ortogonální projekce vektoru $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ na $\mathcal{P} = \mathcal{L}(\mathbf{a})$ a na \mathcal{P}_\perp .

Řešení:

- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \alpha \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathbf{b} - \alpha \mathbf{a}$,
- $(\mathbf{b} - \alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$,
- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}$.

Poznámka:

V maticovém zápisu máme:

- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \mathbf{a} \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \left(\frac{1}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T \right) \cdot \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T$, $[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T)_{ij} = a_i a_j, \text{ matice } n \times n]$
- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \dots = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T \right) \cdot \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{P}_\perp = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T$.

Projekce na m D podprostor (nadrovinu)

Příklad:

Nechť $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ je soustava (nenulových) vektorů z \mathbb{R}^n , nalezněte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ na $\mathcal{P} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$ a na \mathcal{P}_\perp .

Řešení:

- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_{\mathcal{P}_\perp} = \mathbf{b} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i$, $\forall j = 1, 2, \dots, m: (\mathbf{b} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_j = 0$,
- nechť matice \mathbf{A} (řádu $n \times m$) má ve sloupcích vektory \mathbf{a}_i : $\mathbf{a}_i^S = \mathbf{a}_i$, označme $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, pak výše uvedené podmínky ortogonality můžeme psát ve tvaru $\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{o}$, kde \mathbf{o} je nulový sloupcový vektor (matice $m \times 1$),
- $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$ (normálová rovnice).

Projekce na m D podprostor (nadrovinu)

Poznámka:

- Je-li soustava vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ lineárně závislá, není řešení normálové rovnice* určeno jednoznačně, vektor $\mathbf{b}_{\mathcal{P}}$ a $\mathbf{b}_{\mathcal{P}_{\perp}}$ ale ano**.
- Pokud soustava vektorů lineárně nezávislá je, má normálová rovnice řešení jediné***:

$$\alpha = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \quad [\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T] \\ \mathbf{b}_{\mathcal{P}_{\perp}} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \quad [\mathbf{P}_{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T] \end{array} .$$

Pozorování:

V případě projekce na 1D podprostor:

- \mathbf{A} (matice $n \times 1$) = \mathbf{a} ,
- $\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{a} \cdot \underbrace{(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a})^{-1}}_{\substack{\text{matice } 1 \times 1 \\ \text{číslo}}} \cdot \mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T$ (srovnejte s obrazovkou 13).

* $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \alpha = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$

** Různé lineární kombinace lineárně závislých vektorů mohou reprezentovat stejný vektor.

*** Matice soustavy $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je regulární.

Projekce na mD podprostor (nadrovinu)

Příklad:

Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{b} = (1,2,3)$ na $\mathcal{P} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, kde $\mathbf{a}_1 = (1,1,0)$ a $\mathbf{a}_2 = (1, -1,0)$.

Řešení (pokud si pamatujeme vzorce):

1) matice

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

2a) varianta „normálová rovnice“

$$\bullet (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \frac{3}{2} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix},$$
$$\bullet \mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \frac{3}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(1, -1,0) = (1,2,0) \text{ (interpretace!).}$$

2b) varianta „projektor“

$$\bullet \mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\bullet \mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Projekce na mD podprostor (nadrovinu)

Příklad:

Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{b} = (1,2,3)$ na $\mathcal{P} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, kde $\mathbf{a}_1 = (1,1,0)$ a $\mathbf{a}_2 = (1, -1,0)$.

Řešení (pokud si vzorce nepamatujeme):

- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2$:
$$\begin{cases} (\mathbf{b} - \mathbf{b}_{\mathcal{P}}) \cdot \mathbf{a}_1 = (\mathbf{b} - \alpha_1 \mathbf{a}_1 - \alpha_2 \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \\ (\mathbf{b} - \mathbf{b}_{\mathcal{P}}) \cdot \mathbf{a}_2 = (\mathbf{b} - \alpha_1 \mathbf{a}_1 - \alpha_2 \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \end{cases}$$
- $(\mathbf{b} - \alpha_1 \mathbf{a}_1 - \alpha_2 \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_1 = (1 - \alpha_1 \times 1 - \alpha_2 \times 1, 2 - \alpha_1 \times 1 + \alpha_2 \times 1, 3 - \alpha_1 \times 0 - \alpha_2 \times 0) \cdot (1,1,0) = (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \times 1 + (2 - \alpha_1 + \alpha_2) \times 1 + 3 \times 0 = 3 - 2\alpha_1,$
- $(\mathbf{b} - \alpha_1 \mathbf{a}_1 - \alpha_2 \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_2 = (1 - \alpha_1 \times 1 - \alpha_2 \times 1, 2 - \alpha_1 \times 1 + \alpha_2 \times 1, 3 - \alpha_1 \times 0 - \alpha_2 \times 0) \cdot (1, -1,0) = (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \times 1 + (2 - \alpha_1 + \alpha_2) \times (-1) + 3 \times 0 = -1 - 2\alpha_2,$
- $$\begin{aligned} 3 - 2\alpha_1 &= 0 & \rightarrow & \alpha_1 = \frac{3}{2} \\ -1 - 2\alpha_2 &= 0 & & \alpha_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
- $\mathbf{b}_{\mathcal{P}} = \frac{3}{2} \mathbf{a}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{a}_2 = \frac{3}{2} (1,1,0) - \frac{1}{2} (1, -1,0) = (1,2,0).$

4. Přibližné řešení přeurčených SLAR

Konec lekce 10.