P. Hrušková
pavla.hruskova@vsb.cz

DVOJNÝ INTEGRÁL

ZOPAKOVAT: Základní tabulkové vzorce pro integrování (MA1) + Určitý integrál!

PROSTUDOVAT: skriptum Integrální počet funkcí více proměnných (P. Vodstrčil, J. Bouchala), kapitoly 1.2, 1.3, 1.4.1 (str. 2–17)
+ Rukopis J. Bouchaly

Fubiniova věta (pro dvojný integrál): „NA OBDÉLNÍKU"
(str 6)

$$\iint_M f(x,y)\,dM = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big)\,dy, \quad M = \overbrace{\langle a,b\rangle}^{\text{meze pro } x} \times \overbrace{\langle c,d\rangle}^{\text{meze pro } y}$$

dM [$dx\,dy$]

… mohu zaměnit pořadí za $dy\,dx$ (musím vyměnit i meze!)

PŘ.

$$\iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle -\pi,\pi\rangle} (2x-y+3)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_{-\pi}^{\pi} (2x-y+3)\,dy \Big)\,dx =$$

zintegruji podle y (x je konst.), dosadím meze

$$= \int_0^1 \Big[2xy - \frac{y^2}{2} + 3y \Big]_{y=-\pi}^{y=\pi} dx = \int_0^1 \Big(2\pi x - \frac{\pi^2}{2} + 3\pi - \Big(-2\pi x - \frac{\pi^2}{2} - 3\pi\Big)\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{(4\pi x + 6\pi)\,dx}_{\text{zintegruji podle } x \text{ (obyčejný určitý integrál)}} = \Big[4\pi \frac{x^2}{2} + 6\pi x \Big]_0^1 = 2\pi + 6\pi = \underline{\underline{8\pi}}$$

PŘ.

$$\iint_{\underset{x}{\langle 0,1\rangle}\times\underset{y}{\boxed{\langle 0,e-1\rangle}}} x^y\,dx\,dy \overset{\text{1. způsob:}}{=} \int_0^1 \Big(\int_0^{e-1} x^y\,dy \Big)\,dx = \int_0^1 \Big[\frac{x^y}{\ln x} \Big]_{y=0}^{y=e-1} = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{e-1}-1}{\ln x}\,dx}_{\text{těžké na integrování!}} = \ldots$$

VYMĚNÍM POŘADÍ INTEGRACE

$$\overset{\text{2. způsob:}}{=} \boxed{\int_0^{e-1}} \Big(\int_0^1 x^y\,dx \Big)\,\boxed{dy} = \int_0^{e-1} \Big[\frac{x^{y+1}}{y+1} \Big]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^{e-1} \frac{1^{y+1}=1}{y+1}\,dy =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{subst.: } t = y+1 \\ dt = dy \end{array} \right|$$

$$= \big[\ln|y+1| \big]_0^{e-1} = \underbrace{\ln e}_{=1} - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \underline{\underline{1}}$$

PŘ.

$$\iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} (1-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_0^1 (1-x-y)\,dy \Big)\,dx = \int_0^1 \Big[y - xy - \frac{y^2}{2} \Big]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \Big(1 - x - \frac{1}{2}\Big)\,dx = \Big[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} \Big]_0^1 = \underline{\underline{0}}$$

PŘ.

$$\iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle -3,3\rangle} \frac{xy^2}{x^2+1}\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_{-3}^{3} \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{\text{konst.}} y^2\,dy \Big)\,dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \Big[\frac{y^3}{3} \Big]_{y=-3}^{y=3} dx =$$

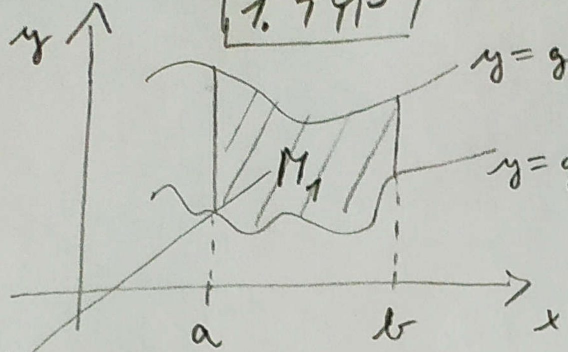
$$\text{subst.: } t = x^2+1, \quad dt = 2x\,dx, \quad x=0 \rightsquigarrow t=1, \quad x=1 \rightsquigarrow t=2$$

$$= \overset{\left[\frac{3^3}{3} - \left(-\frac{3^3}{3}\right)\right]}{18} \cdot \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = 9 \cdot \big[\ln t \big]_1^2 = 9 \cdot (\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0}) =$$

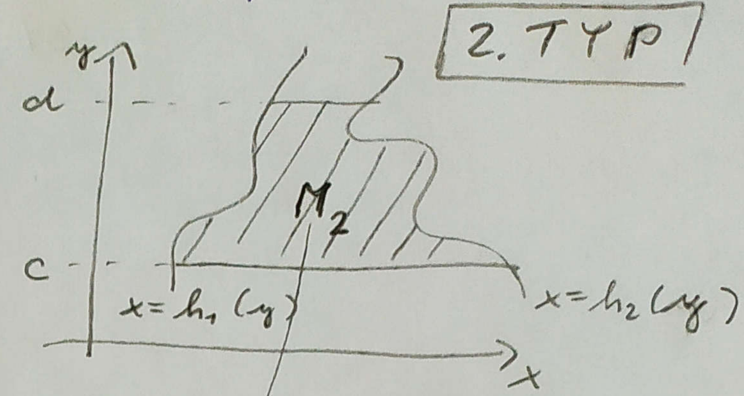
$$= 9 \cdot \ln 2$$

Drojný integrál na měřitelné množině M:

1. TYP



2. TYP



$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b\rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle c, d\rangle \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

[Dva typy měřitelných množin nelze kombinovat v jednom příkladu!]

Fubiniova věta (pro dvojný integrál): „NA OBECNÉ OBLASTI"

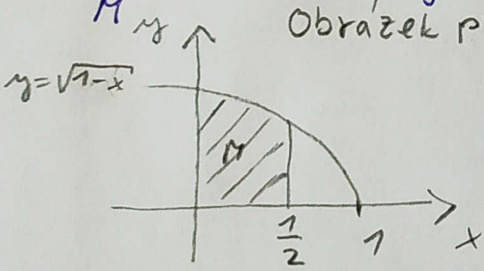
str 13 $\boxed{\Phi}$

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \text{... pro typ } M_1$$

$$= \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \quad \text{... pro typ } M_2$$

PŘ. $\iint_M 2xy\,dx\,dy$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x}\}$

Obrázek pro představu!



1. TYP

$$\iint_M 2xy\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} 2 \cdot x \cdot \underline{y\,dy} \right) dx =$$

ZAPAMATOVAT: „Proměnné meze" (funkce) vždy do vnitřního integrálu!!!

$$= \cancel{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} x \left[\frac{y^2}{\cancel{2}} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\left(\sqrt{1-x}\right)^2 - 0^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

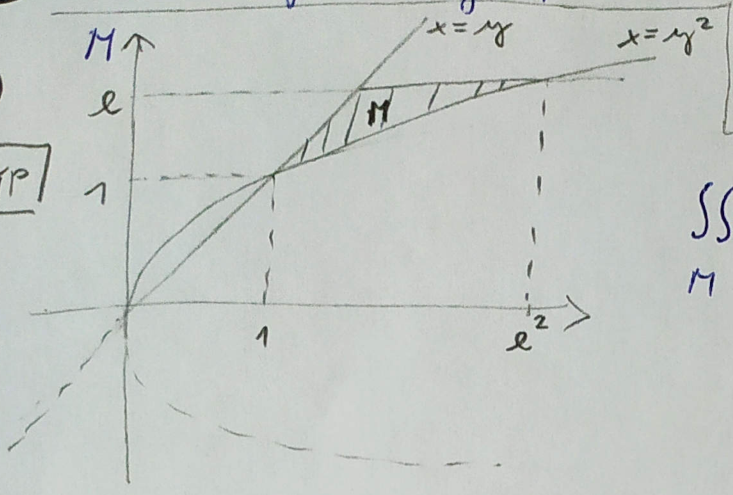
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3-1}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

P. Hrušková

PŘ. $\iint f(x,y)\,dx\,dy$, kde $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$

a)

2. TYP



$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le y\le e,\ y\le x\le y^2\}$

$$\iint_M \frac{1}{xy}\,dx\,dy=\int_1^e\left(\int_y^{y^2}\frac{1}{xy}\right)dx\,dy=$$

$$=\int_1^e\int_y^{y^2}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)dx\,dy=\int_1^e\frac{1}{y}\left[\ln|x|\right]_{x=y}^{x=y^2}dy$$

$$=\int_1^e\frac{1}{y}\left(\underbrace{\ln y^{2}}_{2\cdot\ln y}-\ln y\right)dy=$$

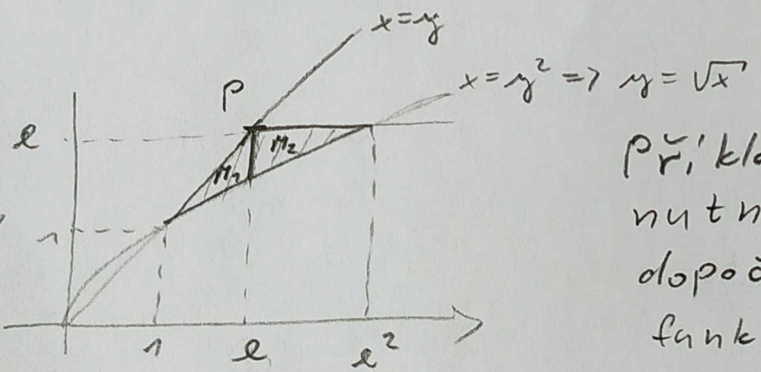
$$=\int_1^e\frac{1}{y}\cdot\ln y\,dy=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

subst.: $t=\ln y$ $\quad y=1\rightsquigarrow t=0$

$dt=\frac{1}{y}\,dy$ $\quad y=e\rightsquigarrow t=1$

b)

1. TYP



Příklad možno řešit jako 1. TYP, nutno rozdělit na dvě množiny M_1, M_2, dopočítat průsečíky a použít inverzní funkce ($x=h(y) \Rightarrow g(x)=y$)

M_1: $x\in\langle 1,e\rangle$, $\sqrt{x}\le y\le x$

M_2: $x\in\langle e,e^2\rangle$, $\sqrt{x}\le y\le e$

$$\iint_M\frac{1}{xy}\,dx\,dy=\iint_{M_1}\frac{1}{xy}\,dx\,dy+\iint_{M_2}\frac{1}{xy}\,dx\,dy=$$

konstanta vůči y, mohu vytknout

$$=\int_1^e\frac{1}{x}\left(\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{y}\,dy\right)dx+\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(\int_{\sqrt{x}}^{e}\frac{1}{y}\,dy\right)dx=$$

$$=\int_1^e\frac{1}{x}\left[\ln|y|\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=x}dx+\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left[\ln|y|\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=e}=$$

$$=\int_1^e\frac{1}{x}\left(\ln x-\underbrace{\ln\sqrt{x}}_{\ln x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln x}\right)dx+\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(\underbrace{\ln e}_{1}-\ln\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^e\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx+\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)dx=\dots=\frac{1}{2}$$

[Pracnější než postup a), vždy lépe zvolit lehčí postup :-)]

DVOJNÝ INTEGRÁL

Substituce do polárních souřadnic

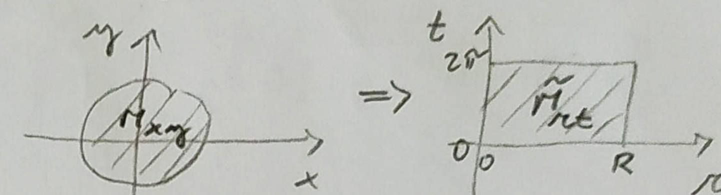
PROSTUDOVAT: striptum ⊕, kap. 1.4.3 (str. 20-24)

Substituce do polárních souřadnic:

$$\left\|\begin{array}{l} x = r\cdot\cos t \\ y = r\cdot\sin t \\ |J| = r \end{array}\right\| \qquad \begin{array}{l} r \geq 0 \\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}$$

↑ Jakobián (matice parc. derivací)

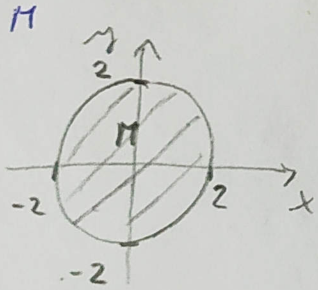
Slouží pro transformaci množiny M na „hezčí" $\tilde{M}$



Potom
$$\iint_{M_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{M_{rt}} f(\underbrace{g_1(r,t)}_{r\cdot\cos t}, \underbrace{g_2(r,t)}_{r\cdot\sin t})\cdot \underbrace{|J(r,t)|}_{r}\,dr\,dt$$

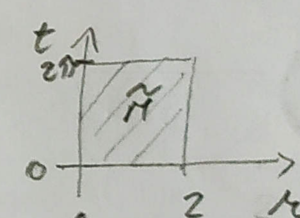
PŘ. $\iint_M \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \overbrace{x^2+y^2 \leq 4}^{\text{rovnice kružnice}}\}$

$R^2 \Rightarrow R = 2$!



subst.:
$$\boxed{\begin{array}{ll} x = r\cdot\cos t & r \in \langle 0, 2\rangle \\ y = r\cdot\sin t & t \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ |J| = r & \end{array}}$$

$\rightsquigarrow$



POZOR: Substituci $x = \dots$, $y = \dots$ musíme dosadit i do integrálu!

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(r\cdot\cos t)^2 + (r\cdot\sin t)^2} = \sqrt{r^2\cdot(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1})} = \sqrt{r^2} = r$$

[vždy kladné!]

$$\iint_M \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=r}\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r\cdot \overset{|J|!}{r}\,dt\right)dr = \int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r^2\cdot 1\,dt\right)dr =$$

$$= \int_0^2 r^2\cdot [t]_{t=0}^{t=2\pi}\,dr = \int_0^2 r^2\cdot 2\pi\,dr = 2\pi\int_0^2 r^2\,dr =$$

$$= 2\pi\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3}$$

Pozn.: Kdybychom chtěli řešit integrál přes M bez substituce, vypadal by takto:

$$\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4+x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx$$

$\sqrt{4+x^2}$ → horní půlkružnice

$-\sqrt{4-x^2}$ → spodní půlkružnice

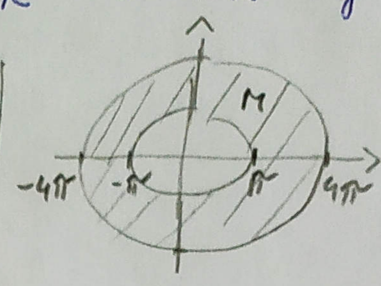
... a tento řešit rozhodně nechceme :-)

P. Hrušková

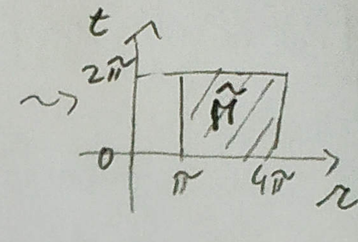
Příklady na různě zadanou oblast M:

Př. $\iint_M \sin(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq (4\pi)^2\}$

subst.:
$$\boxed{\begin{array}{ll} x = r\cdot\cos t & r \in \langle \pi, 4\pi \rangle \\ y = r\cdot\sin t & t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ |J| = r & \end{array}}$$



$\rightsquigarrow$



$$\iint_M \sin \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=r \text{ ... viz předchozí příklad}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_\pi^{4\pi} \sin r \cdot \overset{|J|}{\overset{\shortparallel}{r}}\,dr\right)dt =$$

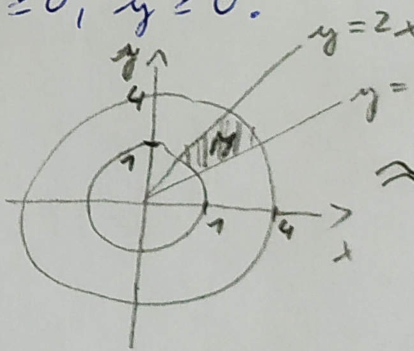
Per partes:
$u' = \sin r$ $\quad v = r$
$u = -\cos r$ $\quad v' = 1$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\left[-r\cdot\cos r\right]_\pi^{4\pi} + \int_\pi^{4\pi} \cos r \cdot 1\,dr\right)dt =$$

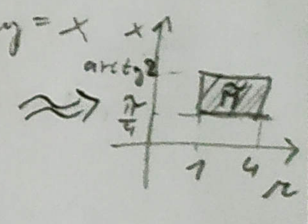
$$= \int_0^{2\pi}\left((-4\pi - \pi) + \underbrace{\left[\sin r\right]_{r=\pi}^{r=4\pi}}_{=0}\right)dt = -5\pi\int_0^{2\pi} 1\,dt = -5\pi\cdot(2\pi - 0) = \underline{\underline{-10\pi^2}}$$

Př. $\iint_M (x^2+y^2)\,dx\,dy$, M je ohraničena křivkami $\overset{(1)}{x^2+y^2=1}$, $\overset{(2)}{x^2+y^2=4}$, $\overset{(3)}{y=x}$, $\overset{(4)}{y=2x}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

subst.:
$$\boxed{\begin{array}{ll} x = r\cdot\cos t & r \in \langle \overset{(1)}{1}, \overset{(2)}{2} \rangle \\ y = r\cdot\sin t & t \in \langle \underset{(3)}{\tfrac{\pi}{4}}, \underset{(4)}{\operatorname{arctg} 2} \rangle \\ |J| = r & \end{array}}$$



$\rightsquigarrow$



Meze pro r, t zjistíme dosazením do podmínek (1), (2), (3), (4):

(1): $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{r = 1}}$

(2): obdobně $\Rightarrow \underline{\underline{r = 2}}$

(3): $y = x$

$\cancel{r}\cdot\sin t = \cancel{r}\cdot\cos t \;\Big|\cdot \frac{1}{\cos t} \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} t = 1 \Rightarrow \underline{\underline{t = \frac{\pi}{4}}}$

(4): $y = 2x$

$\cancel{r}\sin t = 2\cdot\cancel{r}\cdot\cos t \;\Big|\cdot\frac{1}{\cos t} \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} t = 1 \Rightarrow \underline{\underline{t = \operatorname{arctg} 2}}$

$$\iint_M \underbrace{(x^2+y^2)}_{=r^2}\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2} r^2\cdot r\,dt\right)dr = \int_1^2 r^3\cdot\left[t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2}\,dr =$$

$$= \int_1^2 r^3\left(\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{4}\right)dr = \left(\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = \left(\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\overbrace{\left(4 - \frac{1}{4}\right)}^{\frac{15}{4}}$$