P. Hrušková
pavla.hruskova@vsb.cz

# LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH



**PŘ.** Naleznete všechny lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy(6-x-y)$
$= 6xy - x^2y - xy^2$

[Pozn.: $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ lok. ex. jen ve stacionárních bodech]

1.) $f'_x = 6y - 2xy - y^2 = 0$
$f'_y = 6x - x^2 - 2xy = 0$
} soustava 2 rovnic o 2 neznámých (*)

$y(6-2x-y) = 0 \Rightarrow y = 0$ nebo $y = 6-2x$ ... dosadíme do 2. rovnice
$x(6-2y-x) = 0$

$y=0$: $\Rightarrow x(6-x) = 0$; $x = 0$ nebo $x = 6$; $S_1 = [0,0]$, $S_2 = [6,0]$

$y = 6-2x$: $\Rightarrow x(6-12+4x-x) = 0$; $x = 0$ nebo $x = 2$; $S_3 = [0, 6-2\cdot 0] = [0,6]$, $S_4 = [2, 6-2\cdot 2] = [2,2]$

2.) Nalezli jsme 4 stacionární body:
$S_1 = [0,0]$, $S_2 = [6,0]$, $S_3 = [0,6]$, $S_4 = [2,2]$

[Pozn.: Pozor na správnou kombinaci $x,y$! Lze udělat zkoušku – dosadit body $S_1 - S_4$ do soustavy (*)]

3.) Zjistíme, o jaký extrém se jedná:

$$d^2f(x,y): \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y & 6-2x-2y \\ 6-2x-2y & -2x \end{bmatrix}$$
... matice druhých derivací [m. kvadratické formy $d^2f(x,y)$]

dosadíme $x=0$, $y=0$

$S_1[0,0]$: $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0\cdot 0 - 6\cdot 6 = -36$ $\Rightarrow d^2f(0,0)$ indefinitní
[Věta 6.3 (Sylvestrovo krit.), str. 28 ve skriptech J. Bouchaly]

$S_2[6,0]$: $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0\cdot 12 - (-6)\cdot(-6) = -36$ $\Rightarrow d^2f(6,0)$ indefinitní

$S_3[0,6]$: $\begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = -12$, $\Delta_2 = -36$ $\Rightarrow d^2f(0,6)$ indefinitní

$S_4[2,2]$: $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = -4$, $\Delta_2 = (-4)\cdot(-4) - (-2)\cdot(-2) = 12$ $\Rightarrow d^2f(2,2)$ je negativně definitní

$\Rightarrow$ V bodech $S_1, S_2, S_3$ nemá funkce $f$ extrém (tzv. sedlové body),
v bodě $S_4 = [2,2]$ má funkce $f$ ostré lokální maximum.

[Dle věty 6.2 (str. 27) ve skriptech J. Bouchaly]

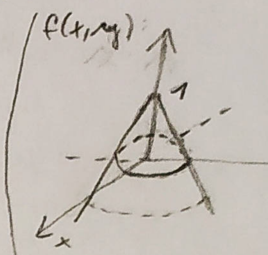
P. Hrušková



**Př.** Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$:
$(D_f = \mathbb{R}^2)$

1.) $\left.\begin{aligned} f'_x &= \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f'_y &= \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{aligned}\right\}$ nemá řešení, neboť $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$, tzn. $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ Funkce f nemá stacionární body




rotační kužel

2.) Podezřelý bod $B = [0,0]$:

$f(0,0) = 1$

$\forall (x,y) \neq (0,0): \ f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} < 1 = f(0,0)$

$\Rightarrow$ dle definice je v bodě (0,0) ostré lokální maximum
[Def. 6.1 (str. 26) ve skriptech J. Bouchaly]

**Př.** Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$:
$(D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge y = 0)$

1.) $f'_x = y - \frac{50}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{50}{x^2}$

$f'_y = x - \frac{20}{y^2} = 0 \Rightarrow x - \frac{20}{\frac{2500}{x^4}} = 0$

$x - \frac{1}{125} x^4 = 0$

$x\left(1 - \frac{1}{125} x^3\right) = 0$

$x = 0$ ... nepatří do $D_{f'}$

$\frac{x^3}{125} = 1$

$x^3 = 125$

$x = 5, \ y = \frac{50}{5^2} = 2$

2.) Stacionární bod $S = [5,2]$

3.) $d^2 f(x,y): \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{bmatrix}$

$S = [5,2]: \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{4}{5} \\ \Delta_2 &= \frac{4}{5} \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 3 \end{aligned}\right\}$ $d^2 f(5,2)$ je pozitivně definitní

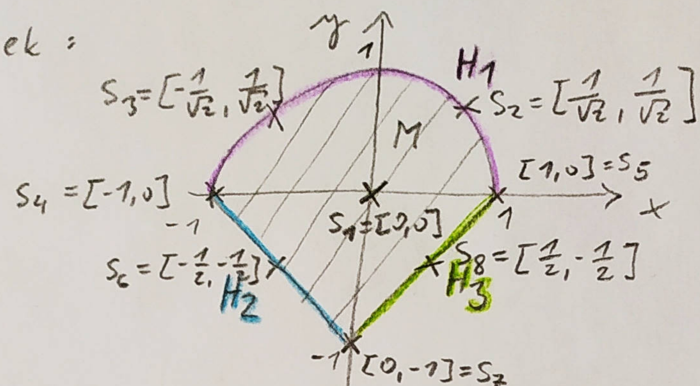
$\Rightarrow$ Funkce f má v bodě $S = [5,2]$ ostré lokální minimum.

# GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

**PŘ.** Nalezněte všechny globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ (*) na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq |x| - 1\}$:

[ $M$ je kompaktní $\wedge$ $f$ je spoj. na $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ ex. globální min. i max. ]
[ Věta 6.4 (Weierstrassova), str. 31, ve skriptech J. Bouchaly ]

1.) obrázek:




$y \geq |x| - 1 \quad \begin{cases} y \geq x - 1, & x \geq 0 \\ y \geq -x - 1, & x < 0 \end{cases}$

[ Pozn. $S_1 - S_8$ doplňujeme v průběhu výpočtu níže ]

2.) Podezřelé body uvnitř $M$ (stacionární body):

$f'_x = 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$

$f'_y = 2y - x = 0$

$2(2x) - x = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 2 \cdot 0 = 0$

$S_1 = [0, 0]$

3.) Body na hranici $M$:

$x^2 + y^2 \leq 1$

$\Downarrow$

**$H_1$:** $y = \sqrt{1-x^2}$ (♡), $x \in \langle -1, 1\rangle$ (△) ... dosadíme $y$ do $f(x,y)$ (*)

$h_1(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - x\sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 - x\sqrt{1-x^2}$

$= 1 - x\sqrt{1-x^2}$

Nyní hledáme stacionární body na $h_1(x)$ (funkce 1 proměnné!):

$h_1'(x) = -1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \dfrac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad | \cdot \sqrt{1-x^2}$

$-(1-x^2) + x^2 = 0$

$2x^2 = 1$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt2}$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt2} \in \langle -1, 1\rangle$ (△)

$\Downarrow$ dosadíme do (♡)

$y_1 = \sqrt{1 - (\frac{1}{\sqrt2})^2} = \frac{1}{\sqrt2}$ $\Big\}$ $S_2 = [\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}]$

$x_2 = -\frac{1}{\sqrt2} \in \langle -1, 1\rangle$ (△) ✓

$\Downarrow$ (♡)

$y_2 = \sqrt{1 - (\frac{1}{\sqrt2})^2} = \frac{1}{\sqrt2}$ $\Big\}$ $S_3 = [-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}]$

Do „seznamu" podezřelých bodů automaticky zařadíme krajní body $H_1$ (jsou to body nespojitosti):

$S_4 = [-1, 0]$, $S_5 = [1, 0]$

[ Buď z obrázku nebo výpočtem – krajní body (△) dosadíme do (♡)

$H_2$: $y = -x-1$ $(\circ)$, $x \in \langle -1, 0 \rangle$

$h_2(x) = f(x, -x-1) = x^2 + (-x-1)^2 - x(-x-1) = x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + x =$
$= 3x^2 + 3x + 1$, $x \in \langle -1, 0 \rangle$

$h_2'(x) = 6x + 3 = 0$

$x = -\frac{1}{2} \in \langle -1, 0 \rangle$ ✓
⇓ dosadíme do $(\circ)$
$y = -(-\frac{1}{2}) - 1 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_6 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$

Přidáme koncové body: $[-1, 0]$, $[0, -1] = S_7$
už je v seznamu

$H_3$: $y = x - 1$ $(\nabla)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$

$h_3(x) = f(x, x-1) = x^2 + (x-1)^2 - x(x-1) = x^2 + x^2 - 2x + 1 - x^2 + x =$
$= x^2 - x + 1$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$

$h_3'(x) = 2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2} \in \langle 0, 1 \rangle$ ✓
⇓ dosadíme do $(\nabla)$
$y = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_8 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$

[Pozn.: Kdyby vyšel např. bod $x=2$, který neleží v $H_3$ ($x \notin \langle 0, 1 \rangle$), nezařadíme jej na seznam!]

Krajní body $[1, 0]$, $[0, -1]$ ... již jsou na seznamu.

4.) Analýza podezřelých bodů:

| Bod | $f(x,y)$ | |
|---|---|---|
| $S_1 = [0, 0]$ | $f(0,0) = 0$ | ... Funkce f nabývá globálního minima na M v bodě $S_1 = [0, 0]$. |
| $S_2 = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ | $\frac{1}{2}$ | |
| $S_3 = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ | $\frac{3}{2}$ | ... Funkce f nabývá globálního maxima na M v bodě $S_3 = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. |
| $S_4 = [-1, 0]$ | $1$ | |
| $S_5 = [1, 0]$ | $1$ | |
| $S_6 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ | $\frac{1}{4}$ | |
| $S_7 = [0, -1]$ | $1$ | |
| $S_8 = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ | $\frac{3}{4}$ | |