**Pavla Hrušková**
pavla.hruskova@vsb.cz

# DERIVACE VE SMĚRU



PŘ. Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = xy^2$ v bodě $c = (3,2)$ ve směru $u = \frac{(3,-4)}{\|(3,-4)\|}$:

1.) Ověření $\|u\| = 1$: $u = \frac{(3,-4)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = 1 \checkmark$$

2.) $f'_x(x,y) = y^2 \qquad f'_x(3,2) = 4$

$f'_y(x,y) = 2xy \qquad f'_y(3,2) = 12$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f_c = (4, 12)$

$$\boxed{\operatorname{grad} f_c = (f'_x(c), f'_y(c))}$$

3.) $\boxed{\frac{df}{du}(c) = \operatorname{grad} f_c \cdot u} = (4,12)\cdot\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \frac{4\cdot 3}{5} + \frac{12\cdot(-4)}{5} =$

$$= \frac{12-48}{5} = -\frac{36}{5}$$

PŘ. Rozhodněte, ve kterém orientovaném směru má funkce $f(x,y) = 3x^2y - xy$ v bodě $c = (1,0)$ maximální derivaci a vypočtěte ji.

1.) $f'_x(x,y) = 6xy - y \qquad f'_x(1,0) = 0$

$f'_y(x,y) = 3x^2 - x \qquad f'_y(1,0) = 2$

$\operatorname{grad} f_c = (0,2)$

2.) $\frac{df}{du}(c)$ je <u>maximální</u> ve směru $\boxed{u = \frac{\operatorname{grad} f_c}{\|\operatorname{grad} f_c\|}}$:

$$u = \frac{(0,2)}{\|(0,2)\|} = \frac{(0,2)}{\sqrt{0^2+2^2}} = \frac{(0,2)}{2} = (0,1)$$

$\frac{df}{du}(c) = (0,2)\cdot(0,1) = 2 = \|\operatorname{grad} f_c\|$ ... pro „maximální" směr

---

Pozn.: $\frac{df}{du}(c) \to$ je <u>minimální</u> ve směru $\boxed{u = -\frac{\operatorname{grad} f_c}{\|\operatorname{grad} f_c\|}}$ a činí $-\|\operatorname{grad} f_c\|$

$\downarrow$ je <u>nulová</u> pro u takové, že $\boxed{(\operatorname{grad} f_c, u) = 0 \wedge \|u\| = 1}$

(V našem příkladě platí pro $u = (1,0)$ ... rozmyslet!)

# DIFERENCIÁL FUNKCE

PŘ. Vypočítejte diferenciál funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $c = (1, 1)$:

1.) $f'_x(x,y) = 2x \qquad f'_x(1,1) = 2$

$f'_y(x,y) = 2y \qquad f'_y(1,1) = 2$

2.) $\boxed{df_c(h) = f'_x(c)\cdot h_1 + f'_y(c)\cdot h_2} = 2\cdot h_1 + 2\cdot h_2$

PŘ. a) Vypočítejte diferenciál funkce $f(x,y) = \frac{x}{y}$ v bodě $c = (4,2)$

1.) $f'_x(x,y) = \frac{1}{y} \qquad f'_x(4,2) = \frac{1}{2}$

$f'_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} \qquad f'_y(4,2) = -1$

2.) $df_c(h) = f'_x(c)\cdot h_1 + f'_y(c)\cdot h_2 = \underbrace{\frac{1}{2}h_1 - h_2}_{*}$

b) S pomocí diferenciálu z předchozího příkladu (ad a)) $*$ vypočtěte přibližně $\frac{4{,}1}{1{,}95}$: $\Rightarrow$ [odpovídá funkci $\frac{x}{y}$ pro $x = 4{,}1$, $y = 1{,}95$]

1.) $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = \frac{x}{y} \\ c = (4,2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(4,2) = \frac{4}{2} = 2$

2.) $c = (4,2)$; $c + h = (4{,}1;\ 1{,}95) \Rightarrow h = (0{,}1;\ -0{,}05)$

↳ je „blízko" bodu

3.) $\underline{f(c+h) \doteq f(c) + df_c(h)}$ ... v předchozím příkladu jsme napočítali pro $c = (4,2)$

$f(4{,}1;\ 1{,}95) \doteq 2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}1 - (-0{,}05)\right)}_{*} = 2{,}1$

# DIFERENCIÁLY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

• „Kuchařka":

$$\boxed{d^m f_c(h) = \text{„}\Big(\underline{\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\Big)^m f(c)\text{"}}$$

(pro funkci dvou prom.)

• Pro funkci 2 proměnných $f(x,y)$:

<u>Diferenciál 2. řádu:</u> $d^2 f_c(h) = \text{„}\left(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2\right)^2 f(c)\text{"}$

$$\boxed{d^2 f_c(h) = f''_{xx}(c)\cdot h_1^2 + 2 f''_{xy}(c)\cdot h_1 h_2 + f''_{yy}(c)\cdot h_2^2}$$

<u>Dif. 3. řádu:</u> $d^3 f_c(h) = \text{„}\left(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2\right)^2 f(c)\text{"}$

$$\boxed{d^3 f_c(h) = f'''_{xxx}(c)\cdot h_1^3 + 3\cdot f'''_{xxy}(c)\, h_1^2 h_2 + 3 f'''_{xyy}(c)\, h_1 h_2^2 + f'''_{yyy}(c)\, h_2^3}$$

PŘ. Vypočtěte diferenciál a) 2. řádu b) 3. řádu funkce $f(x,y) = \frac{x}{y}$ v bodě $c = (4,2)$:

a) 1.) $f'_x(x,y) = \frac{1}{y}$ $\qquad f''_{xx}(x,y) = 0 \qquad f''_{xx}(4,2) = 0$

$f'_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} \qquad f''_{xy}(x,y) = -\frac{1}{y^2} \qquad f''_{xy}(4,2) = -\frac{1}{4}$

$f''_{yy}(x,y) = -\frac{2x}{y^3} \qquad f''_{yy}(4,2) = 1$

2.) $d^2 f_c(h) = f''_{xx}(c)\cdot h_1^2 + 2 f''_{xy}(c)\cdot h_1 h_2 + f''_{yy}(c)\cdot h_2^2 =$

$= 0\cdot h_1^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) h_1 h_2 + 1\cdot h_2^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{2} h_1 h_2 + h_2^2}}$ (**)

b) $f'''_{xxx}(x,y) = 0 \qquad f'''_{xxx}(4,2) = 0$

$f'''_{xxy}(x,y) = 0 \qquad f'''_{xxy}(4,2) = 0$

$f'''_{xyy}(x,y) = \frac{2}{y^3} \qquad f'''_{xyy}(4,2) = \frac{1}{4}$

$f'''_{yyy}(x,y) = \frac{6x}{y^4} \qquad f'''_{yyy}(4,2) = \frac{3}{2}$

$d^3 f_c(h) = 0\cdot h_1^3 + 3\cdot 0\cdot h_1^2 h_2 + 3\cdot\frac{1}{4} h_1 h_2^2 + \frac{3}{2} h_2^3 =$

$= \underline{\underline{\frac{3}{4} h_1 h_2^2 + \frac{3}{2} h_2^3}}$

# TAYLORŮV POLYNOM



PŘ. a) Vypočítejte Taylorův polynom 2. řádu funkce $f(x,y)=\frac{x}{y}$ v bodě $c=(4,2)$:

$$\boxed{T_2(c+h) = f(c) + \frac{1}{1!}\,df_c(h) + \frac{1}{2!}\,d^2f_c(h)}$$

1.) $f(c) = \frac{4}{2} = 2$

2.) Diferenciály 1. řádu viz (*) a 2. řádu viz (**)

$df_c(h) = \frac{1}{2}h_1 - h_2$ $\qquad$ $d^2f_c(h) = -\frac{1}{2}h_1h_2 + h_2^2$

$$T_2(c+h) = 2 + \left(\frac{1}{2}h_1 - h_2\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}h_1h_2 + h_2^2\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}h_1 - h_2 - \frac{1}{4}h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2$$

b) S použitím Taylorova polynomu (2. řádu) určete přibližně hodnotu $\frac{4{,}1}{1{,}95}$:

$\underline{f(c+h) \doteq T_2(c+h)}$

$c=(4,2)$ je „blízko" bodu $(4{,}1;\ 1{,}95) = c+h \Rightarrow h = (0{,}1;\ -0{,}05)$

$$f(c+h) \doteq 2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}1 - (-0{,}05) + \frac{1}{4}\cdot 0{,}1\cdot(-0{,}05) + \frac{1}{2}(0{,}05)^2 = 2{,}1025$$

(viz příklady na diferenciál) $\qquad$ [srovnejte s přesnou hodnotou 2,1025641...]