

TESTOVÁNÍ PARAMETRICKÝCH HYPOTÉZ



10. cvičení

Statistická hypotéza

- ❖ Možné cíle výzkumu:
 - ❖ srovnání účinnosti různých metod
 - ❖ srovnání výsledků různých skupin
- ⇒ tzn. prokázání rozdílu mezi parametry náhodných veličin
 - ❖ mortalita je u laparoskopických operací nižší než u operací konvenčních
 - ❖ průměrné výsledky srovnávacích testů závisí na typu absolvované střední školy

Statistická hypotéza = předpoklad (tvrzení) o základním souboru (populaci)

Zakládá se na předchozí zkušenosti, na rozboru dosavadních znalostí nebo na pouhé domněnce

Typy statistických hypotéz

- ❖ **Parametrické hypotézy** - hypotézy o parametrech rozdělení populace (nejčastěji normálního rozdělení)
 - ❖ Hypotézy o parametru jedné populace (o střední hodnotě, mediánu, rozptylu, relativní četnosti...)
 - ❖ Hypotézy o parametrech dvou populací (srovnávací testy)
 - ❖ Hypotézy o parametrech více než dvou populací (ANOVA)

- ❖ **Neparametrické hypotézy** - hypotézy o jiných vlastnostech populace (typ rozdělení, závislost proměnných...)

Příklady statistických hypotéz

Parametrické hypotézy zapisujeme jako

- ❖ rovnosti (popř. nerovnosti) mezi testovaným parametrem a jeho předpokládanou hodnotou:
 - ❖ střední hodnota obsahu cholesterolu v krvi je u české populace 4,7 mmol/l, tj. $\mu = 4,7$ mmol/l
 - ❖ preference jisté politické strany klesly pod 20%, tj. $\pi < 20\%$
- ❖ rovnosti (resp. nerovnosti) mezi testovanými parametry:
 - ❖ průměrná cena výrobku se v krajích I, II, III neliší
tj. $\mu_I = \mu_{II} = \mu_{III}$
 - ❖ preference politické strany A jsou nižší než preference politické strany B, tj. $\pi_A < \pi_B$

Neparametrické hypotézy:

- ❖ výběrový soubor $x_1, x_2, \dots, x_n$ je výběrem z normálního rozdělení
- ❖ barva očí a barva vlasů u mužů jsou nezávislé znaky

Zdroje statistických hypotéz

- ❖ Hypotéza je založena na předchozí zkušenosti
- ❖ Hypotéza vychází z teorie, kterou je třeba doložit
- ❖ Hypotéza vychází z požadavku na kvalitu produktu
- ❖ Hypotéza je pouhým dohadem založeným na náhodném pozorování

Hypotézy

Nulová hypotéza – ozn. H_0

- ❖ takové tvrzení o populaci, které je bráno jak předpoklad při testování
- ❖ představuje rovnovážný stav a bývá vyjádřena rovností „=“ mezi sledovaným parametrem θ a jeho očekávanou hodnotou θ_0

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

❖ Alternativní hypotéza – ozn. H_A (H_1)

- ❖ představuje porušení rovnovážného stavu a zapisujeme ji tedy jedním ze tří možných zápisů nerovnosti ($\neq, <, >$)

jednoduchá
alternativní
hypotéza

$$H_A : \theta = \theta_1,$$

$$H_A : \theta < \theta_0,$$

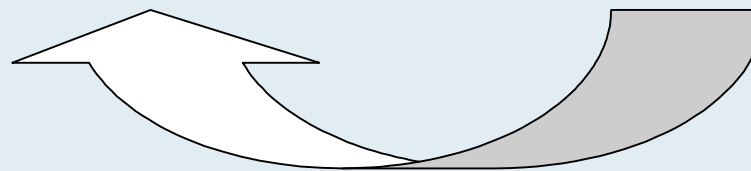
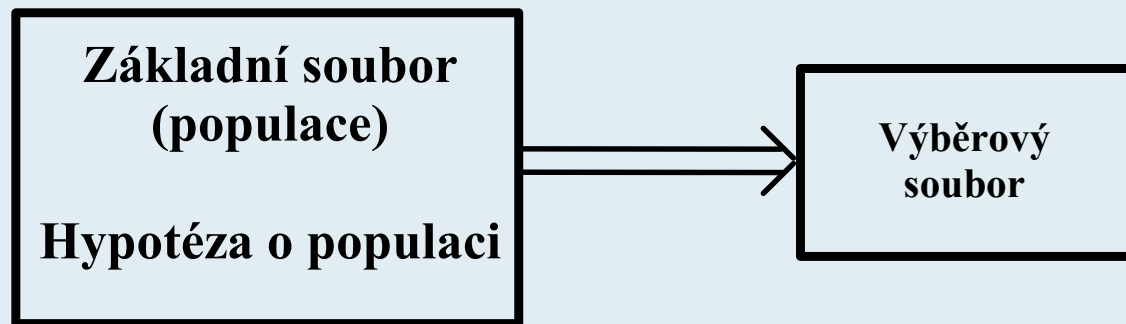
$$H_A : \theta \neq \theta_0,$$

$$H_A : \theta > \theta_0.$$

složená
alternativní
hypotéza

Testování statistických hypotéz

= Ověřování správnosti statistických hypotéz pomocí výsledků získaných náhodným výběrem.



Jsou data konzistentní s hypotézou o populaci ?

Testování statistických hypotéz

= **Rozhodovací proces**, v němž proti sobě stojí dvě tvrzení - nulová a alternativní hypotéza.

Nulovou hypotézu H_0 považujeme za pravdivou až do okamžiku, kdy nás informace získané z výběrového souboru přesvědčí o opaku (analogie s presumcí neviny v soudnictví).

Možné závěry testu statistické hypotézy:

- ❖ Zamítáme hypotézu H_0 ve prospěch hypotézy H_A
- ❖ Nezamítáme hypotézu H_0

Testování statistických hypotéz

Obor hodnot testovaného parametru se dělí na dvě disjunktní množiny:

- ❖ obor přijetí V – nezamítáme H_0
- ❖ kritický obor W – zamítáme H_0

Testová statistika – výběrová charakteristika $T(\mathbf{X})$, která má vztah k nulové hypotéze a jejíž rozdělení za předpokladu platnosti nulové hypotézy známe.

- ❖ kritický obor W lze potom popsat pomocí kritického oboru W^* testové statistiky $T(\mathbf{X})$,

Chyby při testování hypotéz

: Nevyhnutelná součást testování

Rozhodnutí

Skutečnost		Nezamítáme H_0	Zamítáme H_0
	Platí H_0	Správné rozhodnutí Pravděpodobnost: $1 - \alpha$	Chyba I. druhu Pravděpodobnost: α
	Platí H_A	Chyba II. druhu Pravděpodobnost: β	Správné rozhodnutí Pravděpodobnost: $1 - \beta$

Chyby při testování hypotéz

❖ Chyba I. druhu

- ❖ nulová hypotéza platí, ale my ji zamítneme
- ❖ maximální přípustná pravděpodobnost chyby I. druhu (hladina významnosti α) se volí ještě před pořízením výběrového souboru)

❖ Chyba II. druhu

- ❖ nulová hypotéza neplatí, ale my ji nezamítneme (nepoznáme, že neplatí)
- ❖ síla testu závisí na zvolené testové metodě (zejména na skutečném rozdělení dat)

Pravděpodobnosti α , β rozhodují o kvalitě testu.

Podívejte se na flash animaci Chyba I. a II. druhu

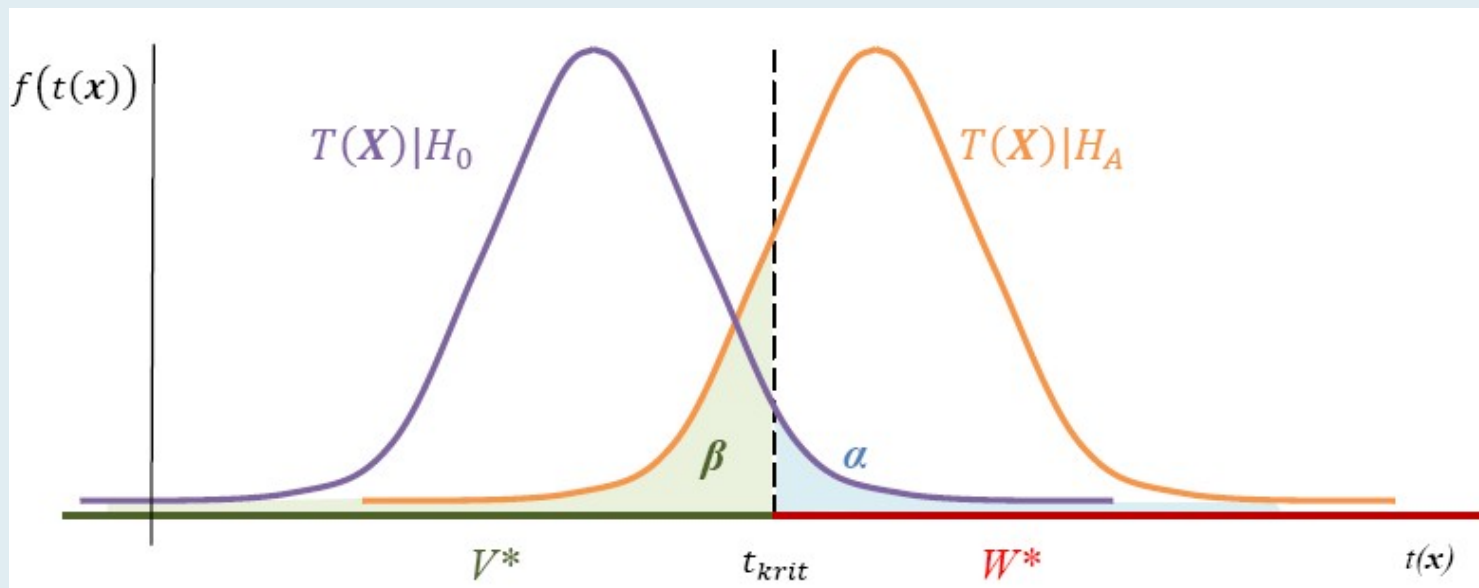
Chyby při testování hypotéz

- ❖ Je-li test hypotézy $H_0: \theta = \theta_0$ oproti alternativní hypotéze $H_A: \theta = \theta_1$ založený na testové statistice $T(\mathbf{X})$ s kritickým oborem W^* , pak:

$$P(T(\mathbf{X}) \in W^* | H_0) = \alpha$$

$$P(T(\mathbf{X}) \in V^* | H_A) = \beta$$

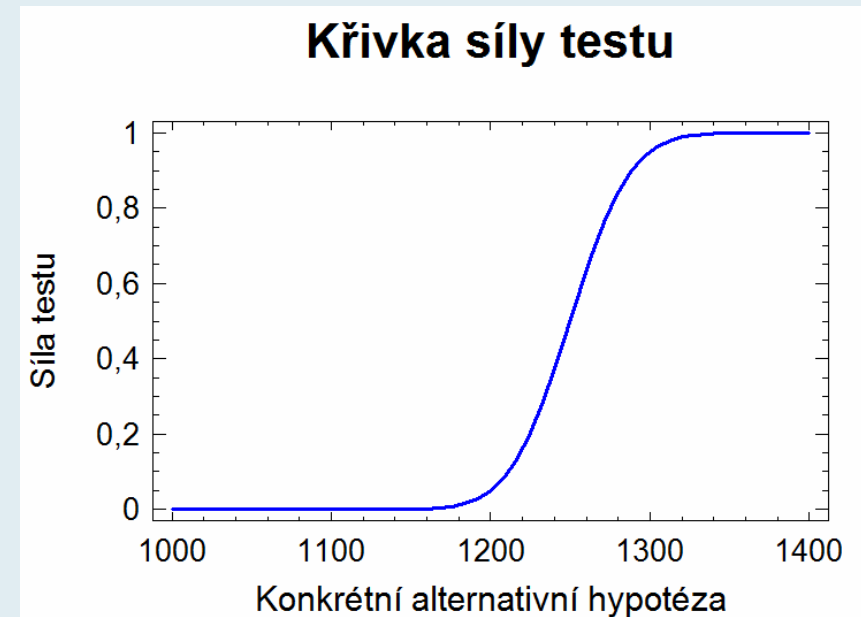
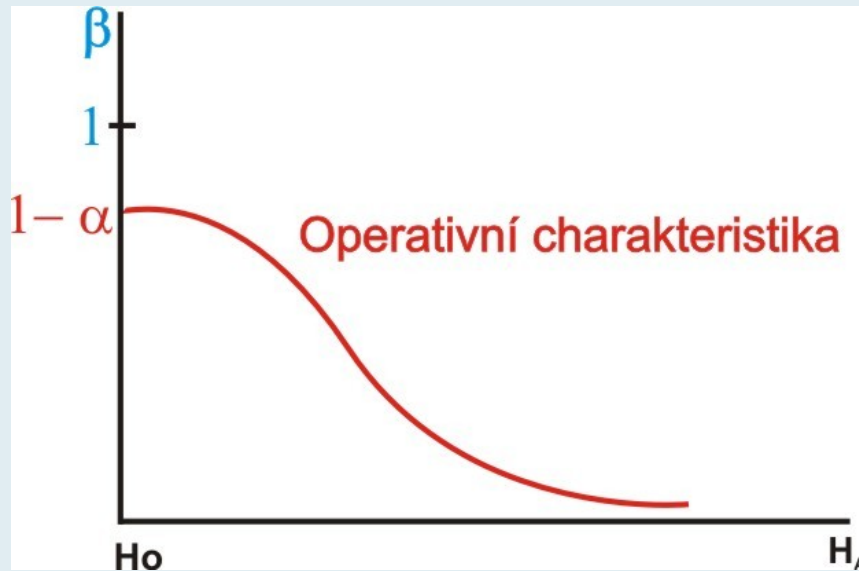
$$P(T(\mathbf{X}) \in W^* | H_A) = 1 - \beta$$



Demonstrace pravděpodobností chyb I. a II. druhu

Grafický zápis chyby II. druhu

- ❖ Operativní charakteristika = závislost chyby II. druhu (β) na konkrétní hodnotě alternativní hypotézy
- ❖ Křivka síly testu = závislost síly testu ($1 - \beta$) na přesné specifikaci alternativní hypotézy



Podívejte se na flash animaci Operační charakteristika

Snížení pravděpodobnosti chyb

- ❖ Chybu II. druhu β snižujeme volbou vhodného testu (pokud máme možnost výběru) popřípadě zvětšením rozsahu výběrového souboru, což je jediný způsob jak snížit pravděpodobnost chyby II. druhu , aniž bychom tím zvýšili pravděpodobnost chyby I. druhu α .

Přístupy k testování hypotéz

- ❖ Testování pomocí intervalových odhadů
- ❖ Klasický test
- ❖ Čistý test významnosti - (testování pomocí p-value)

Testování pomocí intervalových odhadů

Lze použít pouze pro testování parametrických hypotéz
(umíme nalézt pouze intervalové odhady normálního rozdělení)

Postup:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy
2. Nalezení příslušného intervalového odhadu
3. Ověření toho, zda testovaná hodnota parametru leží v nalezeném intervalovém odhadu
4. Formulace závěru testu

Klasický test

Postup:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy
2. Volba testové statistiky $T(\mathbf{X})$ (výběrové charakteristiky, jejíž rozdělení závisí na testovaném parametru), musíme znát rozdělení $T(\mathbf{X})$ při platnosti nulové hypotézy(nulové rozdělení)
3. Ověření předpokladů testu.
4. Sestrojení kritického oboru W^* testové statistiky $T(\mathbf{X})$ na základě stanovené hladiny významnosti α
5. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X})$, ozn. x_{OBS} na základě konkrétní realizace výběru
6. Formulace závěru testu:
 - ❖ $x_{OBS} \in W^* \Rightarrow$ zamítáme nulovou hypotézu ve prospěch alternativní hypotézy
 - ❖ $x_{OBS} \notin W^* \Rightarrow$ nezamítáme nulovou hypotézu

Konstrukce kritického oboru - W^*

$$P(T(\mathbf{X}) \in W^* | H_0) = \alpha$$

1. Alternativní hypotéza ve tvaru „<“ (ve prospěch alternativy svědčí nízké hodnoty testové statistiky)

$$W^* < T_\alpha$$

2. Alternativní hypotéza ve tvaru „>“ (ve prospěch alternativy svědčí vysoké hodnoty testové statistiky), pak je kritický obor vymezen jako:

$$W^* > T_{1-\alpha}$$

3. Alternativní hypotéza ve tvaru „≠“ (ve prospěch alternativy svědčí extrémně nízké nebo extrémně vysoké hodnoty testové statistiky) – POZOR! Lze použít pouze při symetrickém nulovém rozdělení!!!!

$$(W^* < T_{\alpha/2}) \text{ nebo } (W^* > T_{1-\alpha/2})$$

1. V pivovaru došlo k opravě plnicí linky. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ ověřte, zda se oprava zdařila, tj., zda linka plní do láhví pivo o objemu 500ml. Výsledky u vybraných vzorků (v mililitrech):

495,2	496,8	502,1	498,5	501	503	500,7
501,5	501,8	499,1	500,9	502,2	501,7	500,4
500,2	501,1	499,9	500,2	501,1	500,8	499,3

Předpokládejme, že výběr pochází z normálního rozdělení.

Řešení:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy:

$$H_0 : \mu = 500$$

Alternativní hypotézu určíme tak, aby korespondovala s naším výběrem => průměrný objem piva v láhvi:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{21} X_i}{n} = \frac{495,2 + \dots + 499,3}{10} \cong 500,375 \Rightarrow H_A: \mu > 500$$

2. Volba testové statistiky:

$$T(\mathbf{X}) = Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n} \rightarrow t_{20}$$

↑ testová statistika
 ↑ nulové rozdělení

3. Ověření předpokladů testu:

Nulové rozdělení platí pouze v případě, že $\mathbf{X}$ je náhodný výběr z populace mající normální rozdělení!!! V tomto případě je ověření předpokladu rovnou v zadání.

Řešení:

4. Konstrukce kritického oboru:

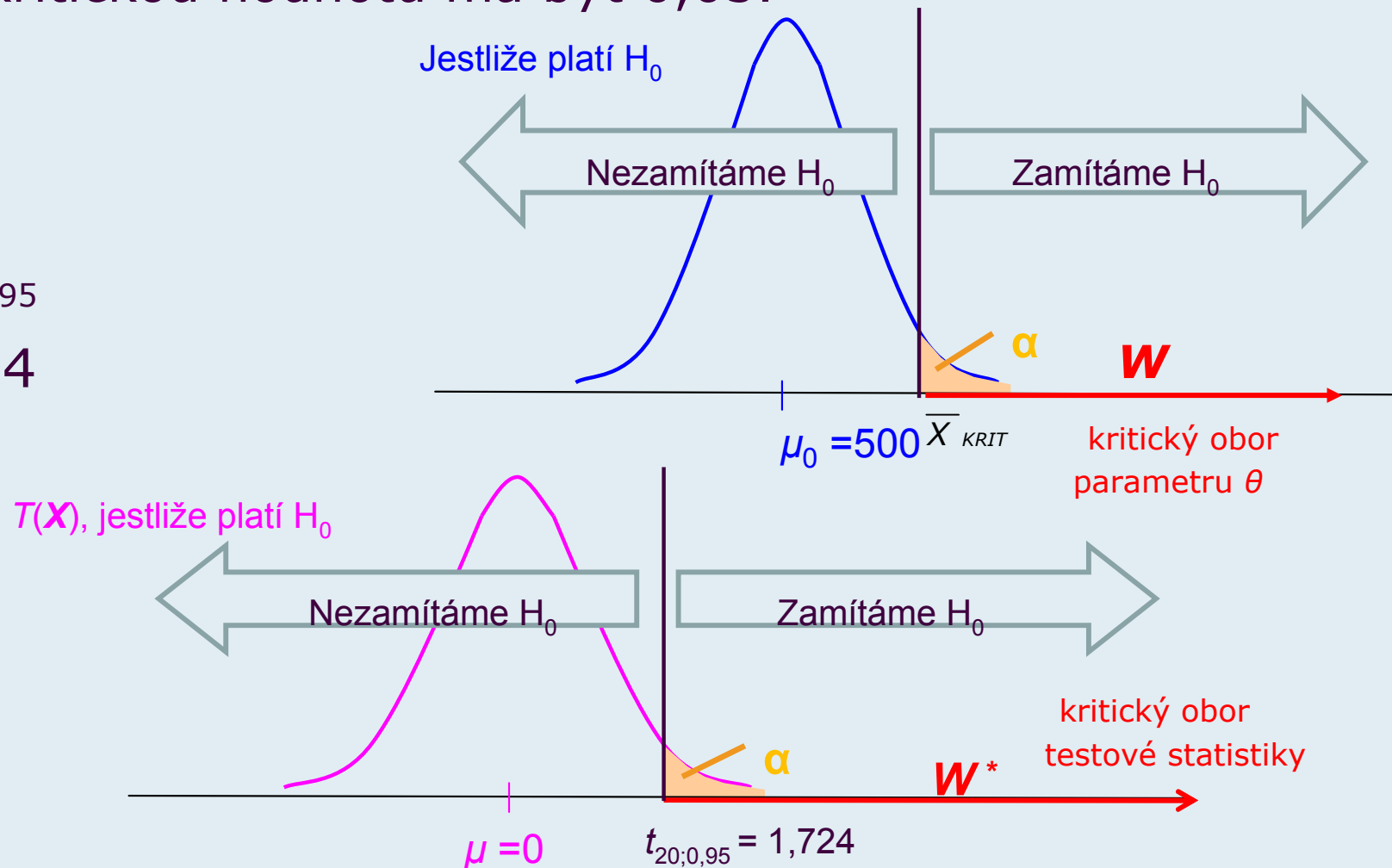
Pravděpodobnost, že průměrná výška zkoumaného vzorku překročí kritickou hodnotu má být 0,05.

$$W^* > T_{1-\alpha}$$

$$W^* > T_{0,95}$$

$$W^* > t_{20;0,95}$$

$$W^* > 1,724$$



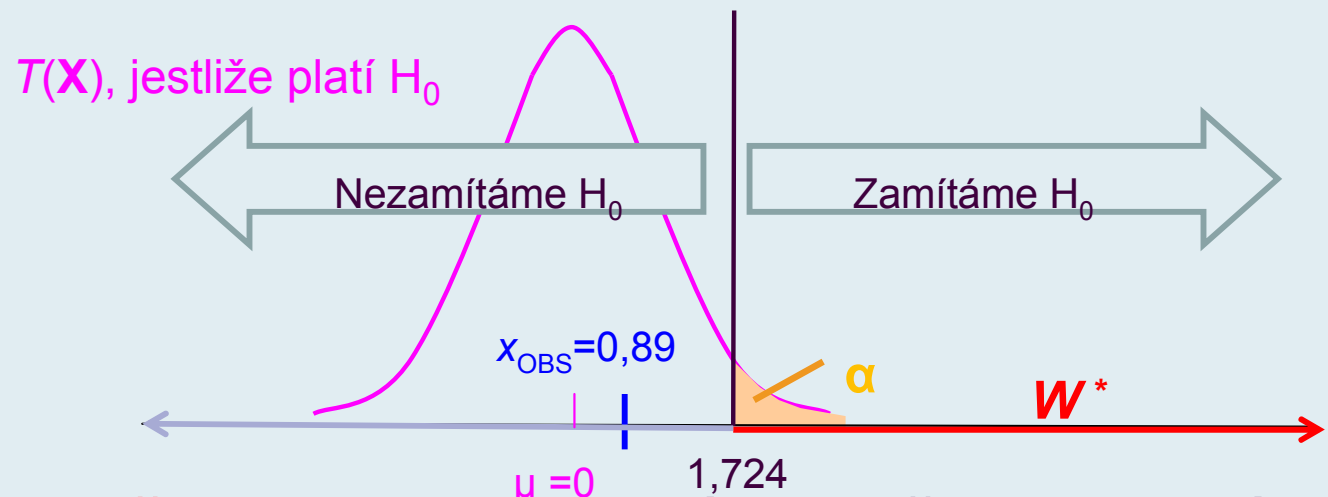
Řešení:

5. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky:

$$\bar{x} = 500,357 \text{ hod.}, \quad \mu = 500 \text{ hod}, \quad s = 1,82 \text{ hod.}, \quad n = 21$$

$$x_{OBS} = Z_{H_0} = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{500,357 - 500}{1,82} \cdot \sqrt{21} = 0,89$$

6. Rozhodnutí:



Nezamítáme H_0 ve prospěch H_A , tj. s 95% ní pravděpodobností lze tvrdit, že se oprava zdařila a linka plní do láhví pivo o objemu 500 ml.

Čistý test významnosti

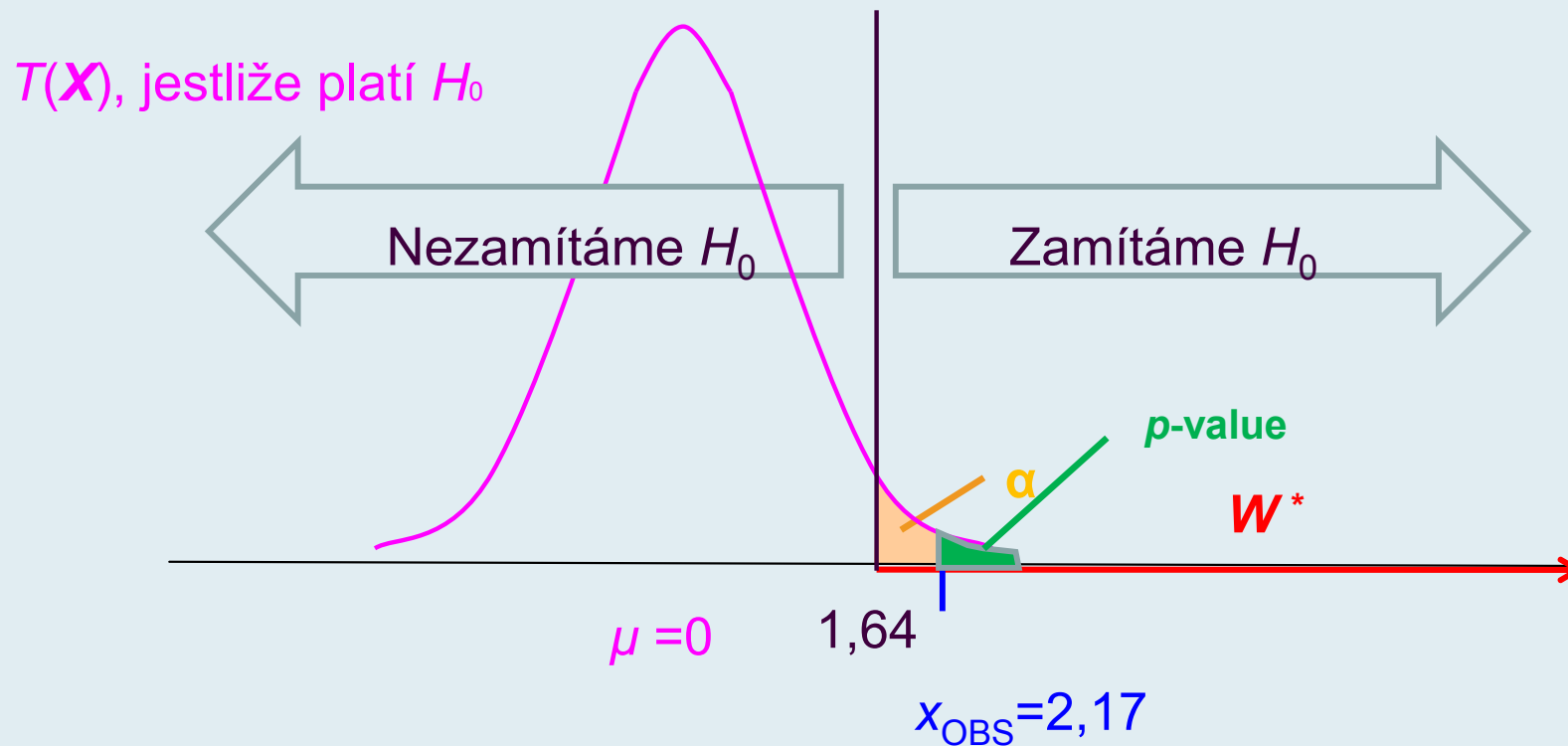
Oproti klasickému testu nepotřebujeme při čistém testu významnosti hladinu významnosti jako vstupní údaj

Postup:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy
2. Volba testové statistiky (testového kritéria) $T(\mathbf{X})$, musíme znát rozdělení při platnosti nulové hypotézy(nulové rozdělení)
3. Ověření předpokladů testu.
4. Výpočet pozorované hodnoty x_{OBS} testové statistiky $T(\mathbf{X})$
5. Výpočet p -value
6. Rozhodnutí na základě p -value

p -value

p -value = pravděpodobnost, že testová statistika bude alespoň tak „extrémní“ jako pozorovaná hodnota.



Určení p -value

1. Alternativní hypotéza ve tvaru „<“ (ve prospěch alternativy svědčí nízké hodnoty testové statistiky)

$$p\text{-value} = F_0(x_{\text{OBS}})$$

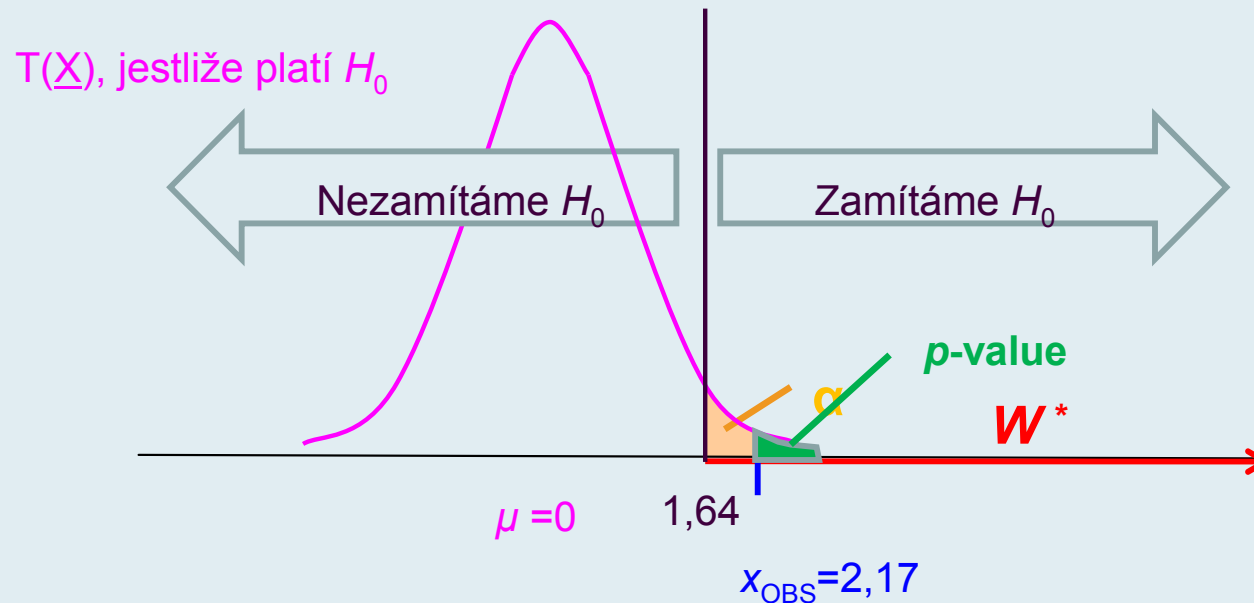
2. Alternativní hypotéza ve tvaru „>“ (ve prospěch alternativy svědčí vysoké hodnoty testové statistiky), pak je kritický obor vymezen jako:

$$p\text{-value} = 1 - F_0(x_{\text{OBS}})$$

3. Alternativní hypotéza ve tvaru „≠“ (ve prospěch alternativy svědčí extrémně nízké nebo extrémně vysoké hodnoty testové statistiky) – **POZOR! Lze použít pouze při symetrickém nulovém rozdělení!!!!**

$$p\text{-value} = 2 \cdot \min\{F_0(x_{\text{OBS}}) ; 1 - F_0(x_{\text{OBS}})\}$$

Rozhodování pomocí p -value



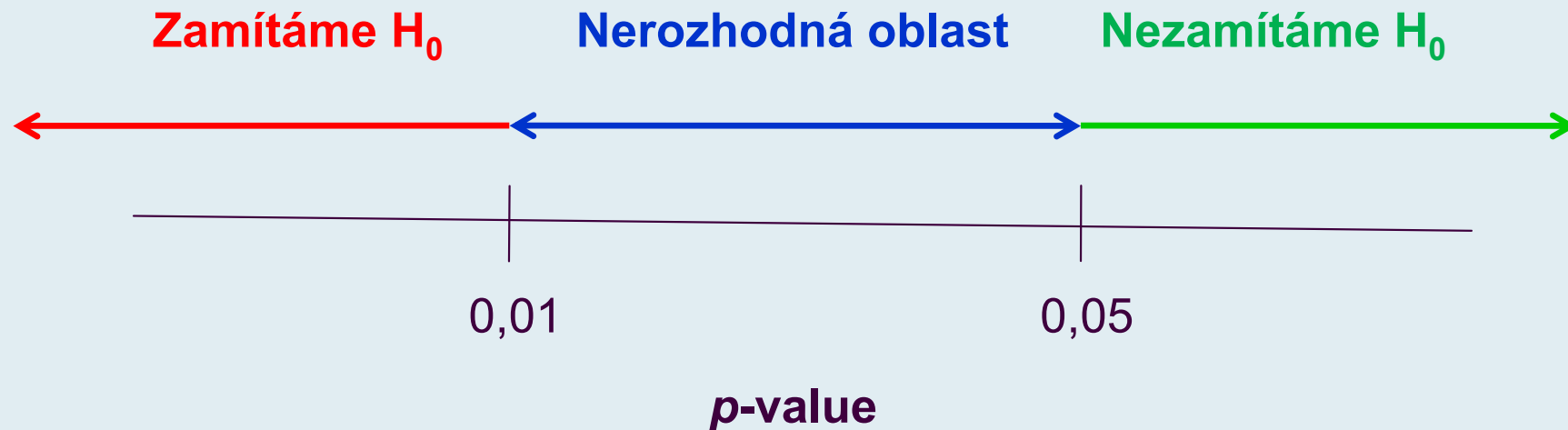
$p\text{-value} < \text{hladina významnosti } \alpha$	$\Rightarrow$	zamítáme H_0
$p\text{-value} > \text{hladina významnosti } \alpha$	$\Rightarrow$	nezamítáme H_0

❖ p -value je nejvyšší hladina významnosti na níž nezamítáme nulovou hypotézu.

❖ p -value je nejnižší hladina významnosti na níž zamítáme nulovou hypotézu.

Rozhodování pomocí p -value

❖ Na klasických hladinách významnosti:



Jednovýběrové testy

- testy o střední hodnotě, rozptylu, relativní četnosti, mediánu

Test hypotézy o střední hodnotě = z test

Známe rozptyl σ^2

Předpoklady testu: parametrický test (normalita)

Testová statistika:

$$T(\mathbf{X}) = Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

Test hypotézy o střední hodnotě = t test

Neznáme rozptyl σ^2

Předpoklady testu: parametrický test (normalita)

Testová statistika:

$$T(\mathbf{X}) = T_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n} \rightarrow t_{n-1}$$

Nenormální data => neparametrický test, nejčastěji mediánový testu nebo jednovýběrový Wilcoxonův test.

2. Inteligenční kvocient (IQ) popisuje inteligenci jednotlivce v poměru k ostatní populaci, přičemž za střední hodnotu se považuje IQ 100 bodů. Je známo, že IQ má normální rozdělení. Při testu inteligence, kterého se zúčastnilo 10 náhodně vybraných studentů posledního ročníku výběrové školy ASNEM, byly naměřeny následující hodnoty IQ.

65 98 103 77 93 102 102 113 80 94

Ověřte čistým testem významnosti hypotézu, že na škole ASNEM je střední hodnota IQ studentů závěrečného ročníku podprůměrná.

Řešení:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy:

$$H_0: \mu = 100$$

Průměrné IQ 10 testovaných studentů je:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{n} = \frac{65 + 98 + \dots + 94}{10} \cong 92,7 \Rightarrow H_A: \mu < 100$$

2. Volba testové statistiky:

Hypotéza o střední hodnotě, neznáme rozptyl:

$$T(\mathbf{X}) = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n} \rightarrow t_9$$

3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X}) - x_{\text{OBS}}$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(65 - 92,7)^2 + \dots + (94 - 92,7)^2}{10-1}} \cong 14,5$$

Řešení:

$$X_{OBS} = T(\mathbf{X})|_{H_0} = \frac{92,7 - 100}{14,5} \sqrt{10} = -1,59$$

4. Výpočet p -value

Z tvaru alternativní hypotézy $\Rightarrow p\text{-value} = F(x_{OBS})$

kde $F_0(x)$ je distribuční funkce studentova rozdělení s 9 stupni volnosti

$$p - value = F_0(-1,59) = 1 - F_0(1,59) = 0,073$$

5. Rozhodnutí na základě p -value

p -value je větší než 0,05. Na hladině významnosti 0,05 **nezamítáme nulovou hypotézu**, nelze tedy tvrdit, že střední hodnota IQ studentů závěrečného ročníku školy ASNEM je podprůměrná.

Jinak řečeno, rozdíl mezi předpokládanou střední hodnotou IQ a pozorovaným průměrným IQ je statisticky nevýznamný.

Test hypotézy o rozptylu

Předpoklady testu: parametrický test (normalita)

Testová statistika:

$$T(\mathbf{X}) = \chi = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi_{n-1}^2$$

Poznámka: Při čistém testu významnosti **nelze** volit oboustrannou alternativní hypotézu. (rozdělení chí-kvadrát není symetrické)

3. Při analýze diferenciací mezd ve velkém podniku bylo zjištěno, že průměrná měsíční mzda činila 9.386,-Kč a směrodatná odchylka mezd 1.562,- Kč. Po rozsáhlých organizačních změnách bylo nutné rychle posoudit, zda došlo ke změnám v diferenciaci mezd. Náhodně bylo vybráno 30 pracovníků a byla zjištěna směrodatná odchylka mezd 1.708,-Kč. Je možné tvrdit, že organizační změny prohloubily diferenciaci mezd?

Řešení:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy:

Výběr ukazuje na to, že směrodatná odchylka by mohla být vyšší než 1562 ($1708 > 1562$)

$$H_0: \sigma = 1562$$

$$H_A: \sigma = 1708$$

Převédeme problém na test o hypotéze rozptylu =>

$$H_0: \sigma^2 = 1562^2$$

$$H_A: \sigma^2 = 1708^2$$

2. Volba testové statistiky:

Hypotéza o rozptylu:

$$T(\mathbf{X}) = \chi = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi_{29}^2$$

Řešení:

3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X}) - x_{OBS}$

$$x_{OBS} = T(\mathbf{X})|_{H_0} = \frac{29 \cdot 1708^2}{1562^2} = 34,7$$

4. Výpočet p -value

Z tvaru alternativní hypotézy $\Rightarrow p\text{-value} = 1 - F(x_{OBS})$

kde $F_0(x)$ je distribuční funkce chí-kvadrát rozdělení s 29 stupni volnosti

$$p - value = 1 - F_0(34,7) = 1 - 0,785 = 0,215$$

5. Rozhodnutí na základě p -value

p -value je větší než 0,05. Na hladině významnosti 0,05 **nezamítáme nulovou hypotézu**, tj. lze tvrdit, že diference mezd se nezvýšila.

Test hypotézy o relativní četnosti

Předpoklady testu: $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$

Testová statistika:

$$T(\mathbf{X}) = P_1 = \frac{p - \pi}{\sqrt{\pi(1 - \pi)}} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

4. Při volbách do poslanecké sněmovny v červnu 2006 dosáhla ČSSD podpory 30%. Agentura STAT udává, že při průzkumu v prosinci 2006 (1600 respondentů) zjistili pouze 25% podporu této strany. Lze z těchto výsledků usuzovat na klesající podporu ČSSD? Ověřte čistým testem významnosti.

Řešení:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy:

Výběr ukazuje na to, že relativní četnost (podpora ČSSD) by mohla být nižší než 0,3 ($0,25 < 0,3$)

$$H_0: \pi = 0,3$$

$$H_A: \pi < 0,3$$

2. Volba testové statistiky:

Hypotéza o relativní četnosti:

$$T(\mathbf{X}) = P_1 = \frac{p - \pi}{\sqrt{\pi(1 - \pi)}} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X}) - x_{OBS}$:

$$x_{OBS} = T(\mathbf{X})|_{H_0} = \frac{0,25 - 0,3}{\sqrt{0,3 \cdot (1 - 0,3)}} \cdot \sqrt{1600} = -4,4$$

Řešení:

4. Výpočet p -value

Z tvaru alternativní hypotézy $\Rightarrow p\text{-value} = F(x_{\text{OBS}})$

kde $F_0(x)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

$$p\text{-value} = \Phi(-4,4) = 1 - \Phi(4,4) = 0,000005$$

5. Rozhodnutí na základě p -value

$p\text{-value} < 0,01$.

Na hladině významnosti 0,01 zamítáme nulovou hypotézu,
tzn. lze tvrdit, že pokles podpory ČSSD je statisticky významný.

Test hypotézy o mediánu – Sign rank test

=Wilcoxonův test

Předpoklady testu:---

Testová statistika:

$$T(\mathbf{X}) = W = \frac{\overline{r^*}}{s_{r^*}} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

Poznámka:

$$y_i = |x_i - x_{0,5_0}| \leftarrow \text{medián při platnosti nulové hypotézy}$$

$$r_i = \text{rank}(y_i)$$

$$r_i^* = r_i \cdot \text{sgn}(x_i - x_{0,5_0})$$

Test hypotézy o mediánu – Znaménkový test

Předpoklady testu:---

Testová statistika:

$$T(\mathbf{X}) = Y \rightarrow Bi(n; 0,5)$$

Poznámka:

Y ... počet pozorování v náhodném
výběru o rozsahu n , které
překročí hypotetický medián

5. Byly naměřeny následující hodnoty IQ (výsledky testu intelligence) pro 10 vybraných účastníků inteligenčního testu (účastníky byli studenti posledního ročníku základní školy):

65 98 103 77 93 102 102 113 80 94

Ověřte čistým testem významnosti hypotézu, že medián IQ studentů závěrečného ročníku ZŠ je roven 100.

Řešení:

$$\tilde{x} = \frac{94 + 98}{2} = 96$$

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy je stejná pro oba testy:

Výběr ukazuje na to, že medián IQ by mohl být nižší než 100

$$H_0: x_{0,5} = 100$$

$$H_A: x_{0,5} < 100$$

Znaménkový test:

2. Volba testové statistiky:

$$T(\mathbf{X}) = Y \rightarrow Bi(n; 0,5) \quad Y \dots \text{počet pozorování v náhodném výběru o rozsahu } n, \text{ které překročí hypotetický medián}$$

3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X}) - x_{\text{OBS}}$:

$$T(\mathbf{X}) = 4$$

Ve výběru jsou 4 hodnoty vyšší než 100.

Řešení:

4. Výpočet p -value

Z tvaru alternativní hypotézy $\Rightarrow p\text{-value} = F(x_{\text{OBS}})$

kde $F_0(x)$ je distribuční funkce binomického rozdělení

$Y \rightarrow Bi(10;0,5)$

$$p\text{-value} = F_0(4) = P(Y < 4) = 0,172$$

5. Rozhodnutí na základě p -value

$p\text{-value} > 0,05$.

Na hladině významnosti 0,05 **nezamítáme nulovou hypotézu**, tzn. lze tvrdit, že IQ studentů má medián 100.

Wilcoxonův test:

2. Volba testové statistiky:

$$T(\mathbf{X}) = W = \frac{\overline{r^*}}{S_{r^*}} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

Řešení:

3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X}) - X_{\text{OBS}}$:

IQ	Seřazené IQ	$y_i = x_i - x_{0,5_0} $	$r_i = \text{rank}(y_i)$	$r_i^* = r_i \cdot \text{sgn}(x_i - x_{0,5_0})$
65	65	35	10	-10
98	77	23	9	-9
103	80	20	8	-8
77	93	7	6	-6
93	94	6	5	-5
102	98	2	2	-2
102	102	2	2	2
113	102	2	2	2
80	103	3	4	4
94	113	13	7	7

Řešení:

3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X}) - X_{OBS}$:

$$\bar{r}^* = \frac{\sum_{i=1}^{10} r^*}{10} = -2,5 \quad s_{r^*} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (r^* - \bar{r}^*)^2}{9}} = 6,0$$

$$X_{OBS} = \frac{-2,5}{6,0} \cdot \sqrt{10} = -1,32$$

4. Výpočet p -value

Z tvaru alternativní hypotézy $\Rightarrow p\text{-value} = F(x_{OBS})$

kde $F_0(x)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

$$p\text{-value} = \Phi(-1,32) = 0,093$$

5. Rozhodnutí na základě p -value

$p\text{-value} > 0,05$.

Na hladině významnosti 0,05 **nezamítáme nulovou hypotézu**, tzn. lze tvrdit, že IQ studentů má medián 100.

Dvouvýběrové testy

- testy o rozdílu středních hodnot, rozptylů, relativních četností a mediánů

Test o shodě dvou rozptylů

Předpoklady testu: nezávislé výběry z norm. populací

Testová statistika:

$$T(\mathbf{X}) = F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \rightarrow F(m, n)$$

Poznámka: Při čistém testu významnosti **nelze** použít oboustrannou alternativu (Fisher-Snedecorovo rozdělení není symetrické)

Testy o shodě dvou středních hodnot

Známe σ_1, σ_2

Předpoklady testu: nezávislé výběry z norm. populací

Testové kritérium:

$$T(\mathbf{X}) = Z_2 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0;1)$$

Testy o shodě dvou středních hodnot

Nenáme σ_1, σ_2 ,
ale lze předpokládat, že jsou shodné

Předpoklady testu: nezávislé výběry z norm. populací

Testové kritérium:

$$T(\mathbf{X}) = T_2 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow t_{n_1+n_2-2}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

6. Tabáková firma TAB prohlašuje, že jejich cigarety mají nižší obsah nikotinu než cigarety NIK. Pro ověření tohoto prohlášení bylo náhodně vybráno z produkce TAB 20 krabiček cigaret (po 20-ti kusech) a v nich bylo zjištěno $(42,6 \pm 3,7)$ mg nikotinu (v jediné cigaretě). Ve 25-ti krabičkách cigaret NIK (po 20-ti kusech) bylo zjištěno $(48,9 \pm 4,3)$ mg nikotinu na cigaretu. Ověřte tvrzení firmy TAB čistým testem významnosti.

Řešení:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy, výběry ukazují na to, že obsah nikotinu v cigaretách TAB je nižší než obsah nikotinu v cigaretách NIK:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad (\mu_1 - \mu_2 = 0)$$

$$H_A: \mu_1 < \mu_2 \quad (\mu_1 - \mu_2 < 0)$$

2. Volba testové statistiky:

$$T(\mathbf{X}) = T_2 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow t_{n_1+n_2-2} \quad s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X}) - x_{OBS}$:
Pokud je nulová hypotéza platná, platí, že $\mu_1 - \mu_2 = 0$:

$$s_p = \sqrt{\frac{(399)(3,7)^2 + (499)(4,3)^2}{400 + 500 - 2}} = 4,0 \quad x_{OBS} = \frac{(42,6 - 48,9) - (0)}{4 \cdot \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{500}}} = -23,2$$

Řešení:

4. Výpočet p -value

Z tvaru alternativní hypotézy $\Rightarrow p\text{-value} = F(x_{\text{OBS}})$

kde $F_0(x)$ je distribuční funkce studentova rozdělení s 898 stupni volnosti

$$p\text{-value} = F_0(-23,2) \cong 0$$

5. Rozhodnutí na základě p -value

$p\text{-value} < 0,01$.

Na hladině významnosti 0,01 **zamítáme nulovou hypotézu**, tzn. tvrzení firmy TAB lze považovat za pravdivé.

Test o shodě dvou relativních četností

Předpoklady testu: nezávislé výběry z populací

$$n_1 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1) > 9$$

$$n_2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) > 9$$

Testová statistika:

$$T(\mathbf{X}) = P_2 = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{p \cdot (1 - p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \rightarrow N(0;1)$$

$$p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

7. Byly testovány magnetofony od dvou výrobců – SONIE a PHILL. SONIE prohlašuje, že jejich magnetofony mají nižší procento reklamací. Pro ověření tohoto prohlášení bylo dotazováno několik prodejců magnetofonů a bylo zjištěno, že ze 150 prodaných magnetofonů firmy SONIE bylo v průběhu záruční doby reklamováno 5 výrobků a ze 220 prodaných magnetofonů PHILL bylo v záruční době reklamováno 9 výrobků. Otestujte pravdivost prohlášení firmy SONIE čistým testem významnosti.

Řešení:

Vstupní data:

firma SONIE

$$x_1=5$$

$$n_1=150$$

$$p_1= 5/150=0,033$$

firma PHILL

$$x_2=9$$

$$n_2=220$$

$$p_2= 9/220=0,041$$

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy, výběry ukazují na to, že procento reklamovaných výrobků firmy SONIE je nižší než procento reklamovaných výrobků firmy PHILL:

$$H_0: \pi_1 = \pi_2 \quad (\pi_1 - \pi_2 = 0)$$

$$H_A: \pi_1 < \pi_2 \quad (\pi_1 - \pi < 0)$$

2. Volba testové statistiky:

$$T(\mathbf{X}) = P_2 = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{p \cdot (1 - p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \rightarrow N(0;1) \quad p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

Řešení:

3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X}) - X_{OBS}$:

Pokud je nulová hypotéza platná, platí, že $\pi_1 - \pi_2 = 0$:

$$p = \frac{5 + 9}{150 + 220} = 0,038 \quad X_{OBS} = \frac{(0,033 - 0,041) - (0)}{\sqrt{0,038 \cdot (1 - 0,038) \cdot \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{220}\right)}} = -0,40$$

4. Výpočet p -value

Z tvaru alternativní hypotézy $\Rightarrow p\text{-value} = F(x_{OBS})$

kde $F_0(x)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

$$p - value = \Phi(-0,4) = 0,345$$

5. Rozhodnutí na základě p -value

$p\text{-value} > 0,05$.

Na hladině významnosti 0,05 **nezamítáme nulovou hypotézu**, tzn. tvrzení firmy SONIE není oprávněné.

Test o shodě dvou mediánů

= Mann-Whitneyův test

Předpoklady testu: nezávisle výběry z populací

Testová statistika:

$$T(\mathbf{X}) = W_2 = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{s_r \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow N(0; 1)$$

$$s_r = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_{r_1}^2 + (n_2 - 1)s_{r_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

8. Máme dvě skupiny studentů. První (kontrolní), v níž jsou studenti vyučováni tradičními metodami, a druhá, v níž jsou studenti vyučováni experimentálními metodami. V následujících tabulkách je uvedeno bodové hodnocení vybraných studentů u zkoušky. Na základě srovnání mediánu rozhodněte, zda studenti vyučovaní experimentálními metodami dosahují lepších výsledků než studenti s klasickým vyučováním.

Výběr z první skupiny (klasická výuka):

60 49 52 68 68 45 57 52 13 40 33 30 28 30 48

Výběr z druhé skupiny (experimentální výuka):

38 18 68 84 72 48 36 92 6 54

Řešení:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy:

$$H_0: x_{0,5_1} = x_{0,5_2} \quad (x_{0,5_1} - x_{0,5_2} = 0)$$

$$H_A: x_{0,5_1} \neq x_{0,5_2} \quad (x_{0,5_1} - x_{0,5_2} \neq 0) \quad (\tilde{x}_1 = 48; \tilde{x}_2 = 51)$$

2. Volba testové statistiky:

$$T(\mathbf{X}) = W_2 = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{s_r \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow N(0;1) \quad s_r = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_{r_1}^2 + (n_2 - 1)s_{r_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\mathbf{X}) - x_{\text{OBS}}$:

x_i	60	49	52	68	68	45	57	52	13	40	33	30	28	30	48
r_{i1}	19	14	15,5	21	21	11	18	15,5	2	10	7	5,5	4	5,5	12,5

x_i	38	18	68	84	72	48	36	92	6	54
r_{i2}	9	3	21	24	23	12,5	8	25	1	17

Řešení:

$$\bar{r}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} r_{i_1}}{n_1} = 12,1$$

$$s_{r1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (r_{i_1} - \bar{r}_1)^2}{n_1 - 1}} = 6,3$$

$$\bar{r}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} r_{i_2}}{n_2} = 14,4$$

$$s_{r2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_2} (r_{i_2} - \bar{r}_2)^2}{n_2 - 1}} = 7,4$$

$$s_r = \sqrt{\frac{14(6,3)^2 + 9(8,9)^2}{15 + 10 - 2}} = 7,4$$

$$x_{\text{OBS}} = \frac{12,1 - 14,4}{7,4 \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{10}}} = -0,76$$

4. Výpočet p -value

Z tvaru alternativní hypotézy $\Rightarrow p\text{-value} = F(x_{\text{OBS}})$

kde $F_0(x)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

$$p\text{-value} = 2 \cdot \min\{F_0(-0,76); 1 - F_0(-0,76)\} = 2 \cdot 0,224 = 0,448$$

5. Rozhodnutí na základě p -value

$p\text{-value} > 0,05$. Na hladině významnosti 0,05 **nezamítáme nulovou hypotézu** nebyl potvrzen vliv typu výuky na výsledky studentů u zkoušky.

Párové testy

- dvouvýběrové testy určené pro závislé populace

Párové testy

- ❖ Vytvoříme jednu datovou hodnotu pro každý měřený objekt - touto hodnotou bude rozdíl získaných dvou pozorování pro daný i -tý měřený objekt.
- ❖ Dané rozdíly pak mohou být použity pro jednovýběrové testy o tom, zda sledovaný parametr je nula.

Test

Doplňte:

a) Statistická hypotéza je výrok o

.....

b) Rozhodovací proces, který používáme k učinění závěrů o rozdělení náhodné veličiny na základě výběrového souboru a hypotéz se nazývá

.....

c) Při testování hypotéz se rozhodujeme mezi
..... a hypotézou.

Doplňte:

- a) Statistická hypotéza je výrok o
rozdělení náhodné veličiny.....
- b) Rozhodovací proces, který používáme k učinění
závěrů o rozdělení náhodné veličiny na základě
výběrového souboru a hypotéz se nazývá
testování hypotéz.....
- c) Při testování hypotéz se rozhodujeme mezi
nulovou..... a alternativní..... hypotézou.

Doplňte:

- d) Obor hodnot testové statistiky (testového kritéria) lze rozdělit na dvě disjunktní množiny nazývané a
- e) Kritický obor se stanovuje tak, aby pravděpodobnost, že hodnota testové statistiky padne do kritického oboru byla v případě platnosti nulové hypotézy rovna
.....
- f) Pravděpodobnost chyby I. druhu i chyby II. druhu lze snížit, zvýšíme-li

Doplňte:

- d) Obor hodnot testové statistiky (testového kritéria) lze rozdělit na dvě disjunktní množiny nazývané **kritický obor** a **obor přijetí**
- e) Kritický obor se stanovuje tak, aby pravděpodobnost, že hodnota testové statistiky padne do kritického oboru byla v případě platnosti nulové hypotézy rovna **pravděpodobnosti chyby I. druhu, tj. α**
- f) Pravděpodobnost chyby I. druhu i chyby II. druhu lze snížit, zvýšíme-li **rozsah výběru**

Doplňte:

- g) Graf závislosti pravděpodobnosti chyby II. druhu β na konkrétní specifikaci alternativní hypotézy je nazýván
- h) Přístup k testování hypotéz, který je založen na rozhodování pomocí kritického oboru bývá nazýván
- i) Přístup k testování hypotéz, který je založen na rozhodování pomocí p -hodnoty bývá nazýván

Doplňte:

- g) Graf závislosti pravděpodobnosti chyby II. druhu β na konkrétní specifikaci alternativní hypotézy je nazýván operativní charakteristika
- h) Přístup k testování hypotéz, který je založen na rozhodování pomocí kritického oboru bývá nazýván klasický test
- i) Přístup k testování hypotéz, který je založen na rozhodování pomocí p -hodnoty bývá nazýván čistý test významnosti

Doplňte:

- j) Při testování hypotéz je možno učinit dvě rozhodnutí - nebo
.....
- j) Je-li p -hodnota = 0,03 , pak nulovou hypotézu se spolehlivostí 0,95.

Doplňte:

- j) Při testování hypotéz je možno učinit dvě rozhodnutí - **zamítáme nulovou hypotézu** nebo **nezamítáme nulovou hypotézu**
- j) Je-li p -hodnota = 0,03 , pak **zamítáme** nulovou hypotézu se spolehlivostí 0,95.