

SPOJITÉ ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI



7. cvičení

Intenzita poruch

- ❖ **Funkce modelující dobu do výskytu události**
životnost, dobu do poruchy, dobu do relapsu (návratu onemocnění), apod.
- ❖ používáme spolu s distribuční funkcí a hustotou pravděpodobnosti.
- ❖ Někdy označována jako hazardní funkce, angl. „hazard function“.
- ❖ Pro nezápornou náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením popsaným distribuční funkcí $F(t)$ definujeme pro $F(t) \neq 1$ (tj. $F(t) < 1$) **intenzitu poruch** $\lambda(t)$ jako

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}; \quad F(t) < 1, \quad t > 0$$

Intenzita poruch

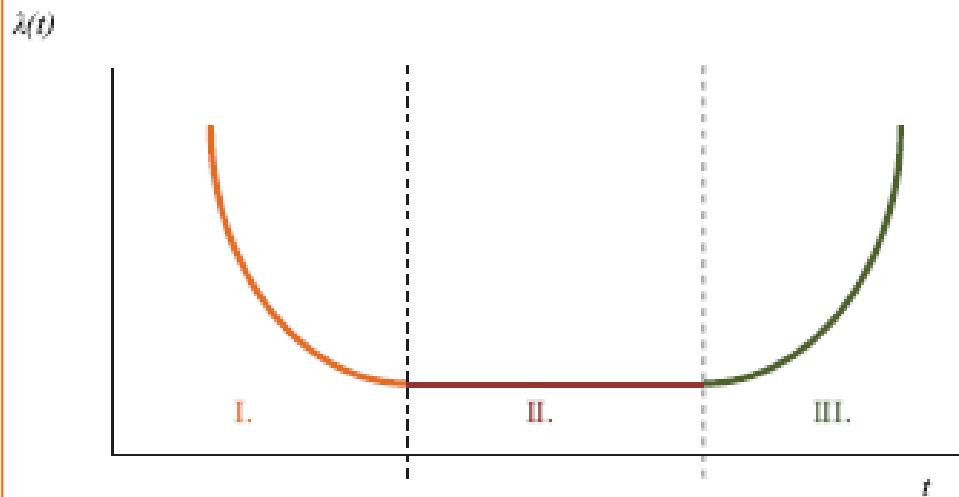
- ❖ Pokud představuje náhodná veličina X dobu do poruchy nějakého zařízení, pak pravděpodobnost, že jestli do času t nedošlo k žádné poruše, tak k ní dojde v následujícím krátkém úseku délky Δt , je přibližně $\lambda(t) \cdot \Delta t$:

$$P(t < X \leq t + \Delta t \mid X > t) \approx \frac{f(t)}{1 - F(t)} \cdot \Delta t = \lambda(t) \cdot \Delta t$$

- ❖ Intenzita poruch má pro většinu výrobků z technické praxe charakteristický tvar vanové křivky (angl. „bath tube“). Dělí se na tři úseky (I, II, III).
- ❖ Intenzitu poruch modelujeme v jednotlivých úsecích pomocí různých rozdělání.

Model intenzity poruch

V prvním úseku křivka intenzity poruch klesá. Odpovídající časový interval se nazývá **období časných poruch** (období záběhu, období počátečního provozu, období osvojování nebo období dětských nemocí podle analogie s úmrtnostní křivkou člověka). Příčinou zvýšené intenzity poruch v tomto období jsou poruchy v důsledku výrobních vad, nesprávné montáže, chyb při návrhu, nebo při výrobě apod.



Ve druhém úseku dochází k běžnému využívání zaběhnutého výrobku, k poruchám dochází většinou z vnějších příčin, nedochází k opotřebení, které by změnilo funkční vlastnosti výrobku. Intenzita poruch je v tomto období přibližně konstantní. Příslušný časový interval se nazývá období normálního užití, nebo **období stabilního života**.

Ve třetím úseku procesy stárnutí a opotřebení mění funkční vlastnosti výrobku, projevují se nastrádané otřesy výrobku z období II, trhliny materiálu a intenzita poruch vzrůstá. Příslušný časový interval se nazývá **období poruch v důsledku stárnutí a opotřebení**.

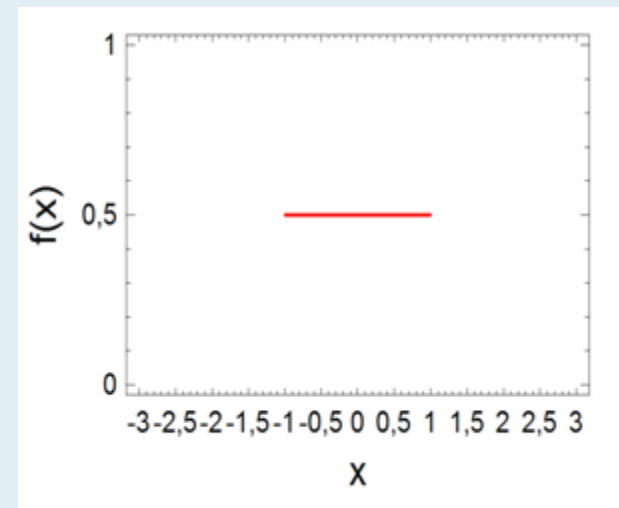
Rovnoměrné rozdělení

- ❖ Hustota pravděpodobnosti je **konstantní** na intervalu $(a; b)$ a všude jinde je **nulová**.

$X \dots NV$ s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(a; b)$
 $X \rightarrow R(a; b)$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in \langle a; b \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

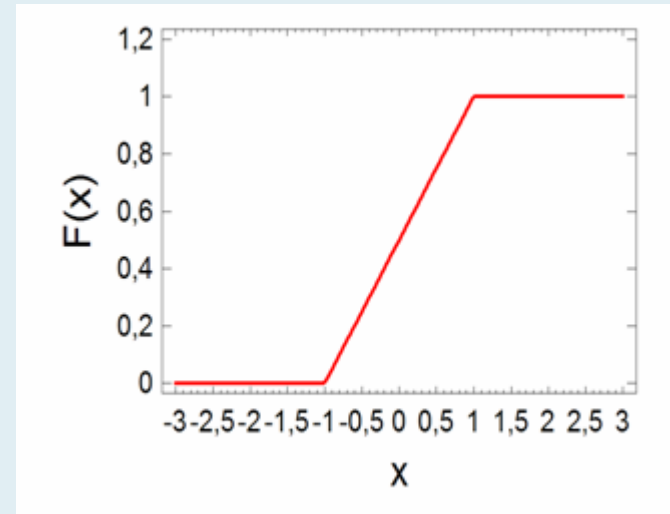


Graf hustoty pravděpodobnosti NV s rovnoměrným rozdělením na $(-1; 1)$

Rovnoměrné rozdělení

Distribuční funkce:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; a) \\ \frac{x - a}{b - a} & x \in \langle a; b \rangle \\ 1 & x \in (b; \infty) \end{cases}$$



Graf distribuční funkce NV s rovnoměrným rozdělením na $(-1; 1)$

Střední hodnota a rozptyl:

$$EX = \frac{a + b}{2} \quad DX = \frac{(a - b)^2}{12}$$

Poissonův proces

- ❖ V určitém časovém intervalu se s konstantní střední rychlostí výskytu λ objevují události, které jsou na sobě nezávislé.
- ❖ Např.: dopravní nehody na Martinovské křižovatce během jedné hodiny, příchody zákazníků do supermarketu mezi 15:00 h a 16:00 h, poruchy elektronického systému během dvou let, atd.
- ❖ Rozdělení založena na Poissonově procesu:
 - ❖ Exponenciální
 - ❖ Erlangovo
 - ❖ Weibullovo

Exponenciální rozdělení

- ❖ Používá se k popisu **doby do výskytu první** události, popř. **doby mezi** událostmi

X ... doba do výskytu 1. události v Poissonově procesu

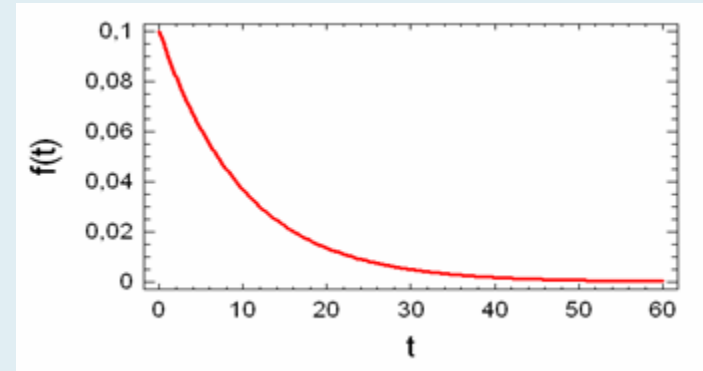
$$X \rightarrow \text{Exp}(\lambda) \quad (\lambda > 0)$$

- ❖ Souvisí s Poissonovým rozdělením, které popisuje **počet** výskytu událostí v časovém intervalu.
- ❖ Např. počet dopravních nehod na Martinovské křižovatce za určitý časový interval se popisuje Poissonovým rozdělením, zatímco dobu od jedné nehody do druhé lze popsat rozdělením exponenciálním.
- ❖ Obě rozdělení se uplatňují v teorii spolehlivosti, nebo v teorii hromadné obsluhy.

Exponenciální rozdělení

- ❖ Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}; \quad t > 0; \lambda > 0$$



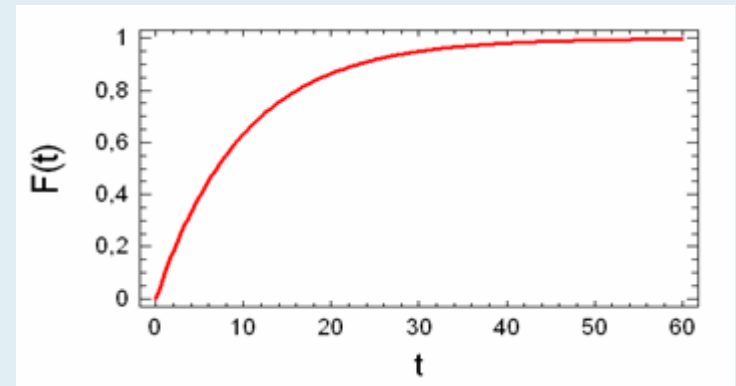
Graf hustoty pravděpodobnosti NV s exponenciálním rozdělením

- ❖ Distribuční funkce:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad t > 0; \lambda > 0$$

- ❖ Střední hodnota a rozptyl:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$



Graf distribuční funkce NV s exponenciálním rozdělením

Exponenciální rozdělení

- ❖ Intenzita poruch:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}; \quad F(t) < 1, \text{ tj. } t > 0$$

$$\lambda(t) = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \lambda = \frac{1}{EX}$$

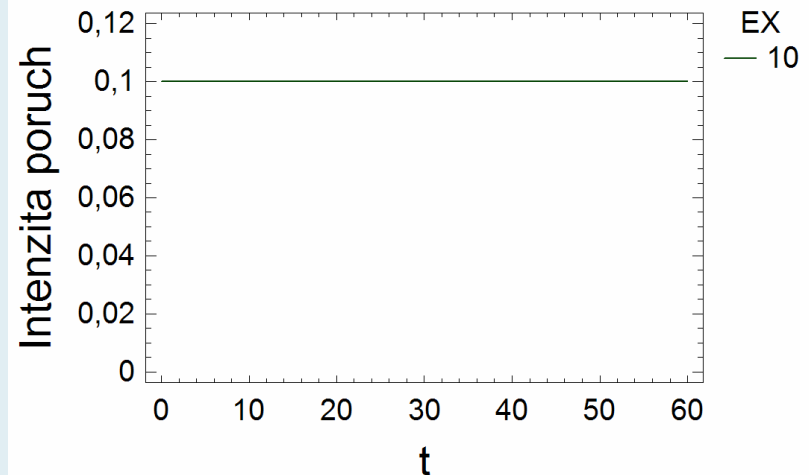
- ❖ Intenzita poruch není závislá na délce předcházejícího provozu sledovaného systému.

- ❖ Exponenciální rozdělení = **rozdělení bez paměti**

$$P(X > (t_1 + t_2) | X > t_1) = P(X > t_2); \quad t_1, t_2 \geq 0$$

- ❖ Exponenciální rozdělení popisuje dobře rozdělení doby života systémů, u kterých dochází k poruše ze zcela náhodných příčin a nikoliv v důsledku opotřebení (mechanické opotřebení, únava materiálu apod.), tj. u systému nacházejících se v **období stabilního života**.

Intenzita poruch exponenciálního rozdělení



1. Doba čekání hosta na pivo je v restauraci U Lva průměrně 5 minut. Určete:
 - a) hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny, která je dána dobou čekání na pivo,
 - b) pravděpodobnost, že budeme čekat na pivo déle než 12 minut,
 - c) dobu čekání, během které bude zákazník obsloužen s pravděpodobností 90 %.

Řešení:

a)

X ... doba čekání na pivo (doba do výskytu první události) má exponenciální rozdělení.

$$X \rightarrow \text{Exp}(\lambda)$$

Určíme parametr λ :

Ze zadání $\Rightarrow$ Doba čekání ... průměrně 5 min

$$E(X) = 5 \text{ min} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{5} \text{ min}^{-1}$$

$$X \rightarrow \text{Exp}(0,2)$$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = 0,2 \cdot e^{-0,2 \cdot t}; \quad t > 0$$

Řešení:

b)

X ... doba čekání na pivo, $X \rightarrow \text{Exp}(0,2)$

$P(X > 12) = ?$

$$P(X > 12) = 1 - P(X < 12) = 1 - F(12) = 1 - (1 - e^{-0,2 \cdot 12}) = e^{-2,4} = 0,0907$$

Pravděpodobnost, že budeme čekat na pivo déle než 12 minut je 9,1 %.

Řešení:

c)
 X ... doba čekání na pivo, $X \rightarrow \text{Exp}(0,2)$

Doba T , během které bude zákazník obsloužen s
 pravděpodobností 90 % : $P(X < T) = 0,9$:

$$F(T) = 0,9$$

$$1 - e^{-\lambda T} = 0,9$$

$$0,1 = e^{-\lambda T}$$

logaritmuje

$$\ln(0,1) = \ln(e^{-\lambda T})$$

$$\ln(0,1) = -\lambda T$$

$$T = -\frac{\ln(0,1)}{\lambda}$$

$$T = -5 \cdot \ln(0,1)$$

$$T \cong \underline{\underline{11,5 \text{ min}}}$$

Doba, během které bude zákazník obsloužen s pravděpodobností
 90 % je 11 minut a 30 sekund.

2. Určete medián a 10%-ní kvantil náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 10 s.

Řešení:

$$X \rightarrow \text{Exp}(\lambda)$$

Určíme parametr λ :

$$E(X) = 10 \text{ s} \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,1 \text{ s}^{-1} \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Pro kvantily spojité náhodné veličiny platí: $F(x_p) = p$.

Určíme obecný vztah pro 100p% ní kvantil exponenciální NV:

$$F(x_p) = p$$

$$1 - e^{-\lambda x_p} = p$$

$$1 - p = e^{-\lambda x_p}$$

$$\ln(1 - p) = \ln(e^{-\lambda x_p})$$

$$\ln(1 - p) = -\lambda x_p$$

$$x_p = -\frac{\ln(1 - p)}{\lambda}$$

$$\underline{\underline{x_{0,5}}} = -\frac{\ln(1 - 0,5)}{0,1} \cong \underline{\underline{6,93}}$$

$$\underline{\underline{x_{0,1}}} = -\frac{\ln(1 - 0,1)}{0,1} \cong \underline{\underline{1,05}}$$

Erlangovo rozdělení

X ... doba do výskytu k . události v Poissonově procesu

$$X_k \rightarrow \text{Erlang}(k; \lambda) \quad (\lambda > 0)$$

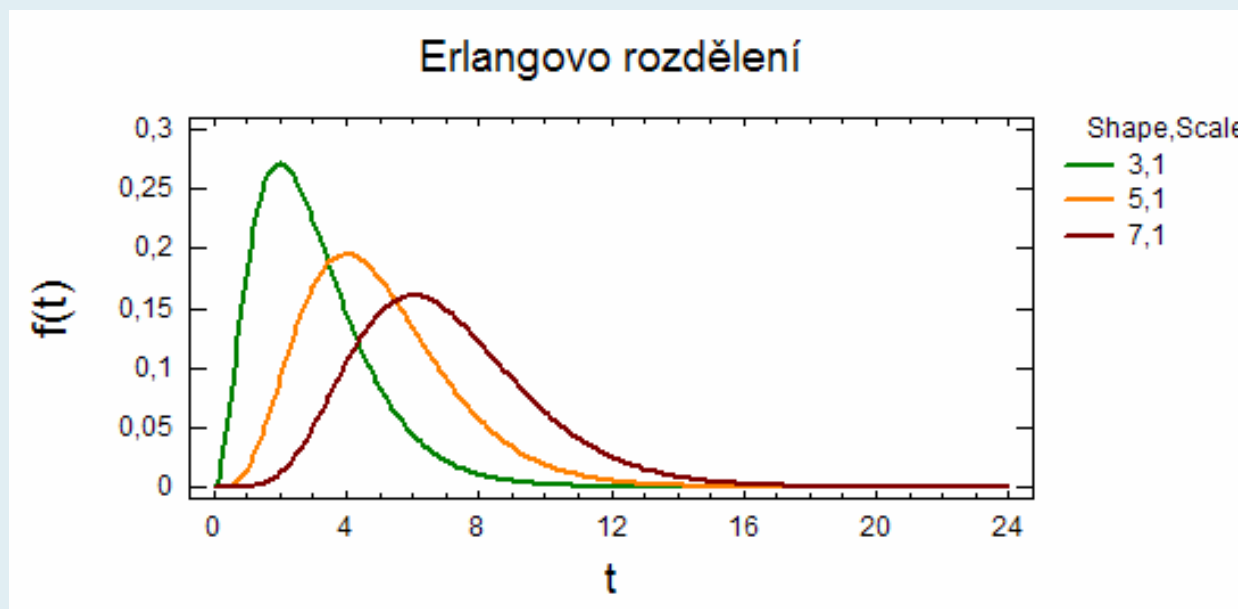
Hustota pravděpodobnosti:
$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}; \quad t > 0$$

Distribuční funkce:
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Intenzita poruch:
$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{(k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-j)! (\lambda t)^j}}$$

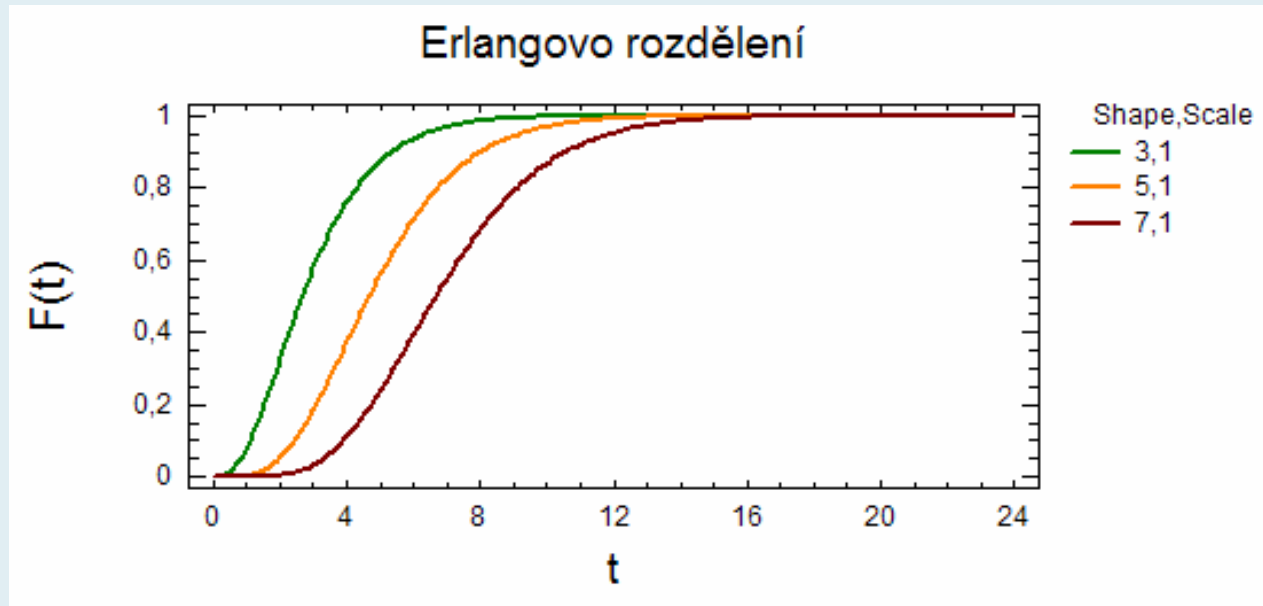
Střední hodnota a rozptyl:
$$E(X_k) = \frac{k}{\lambda} \quad D(X_k) = \frac{k}{\lambda^2}$$

Erlangovo rozdělení



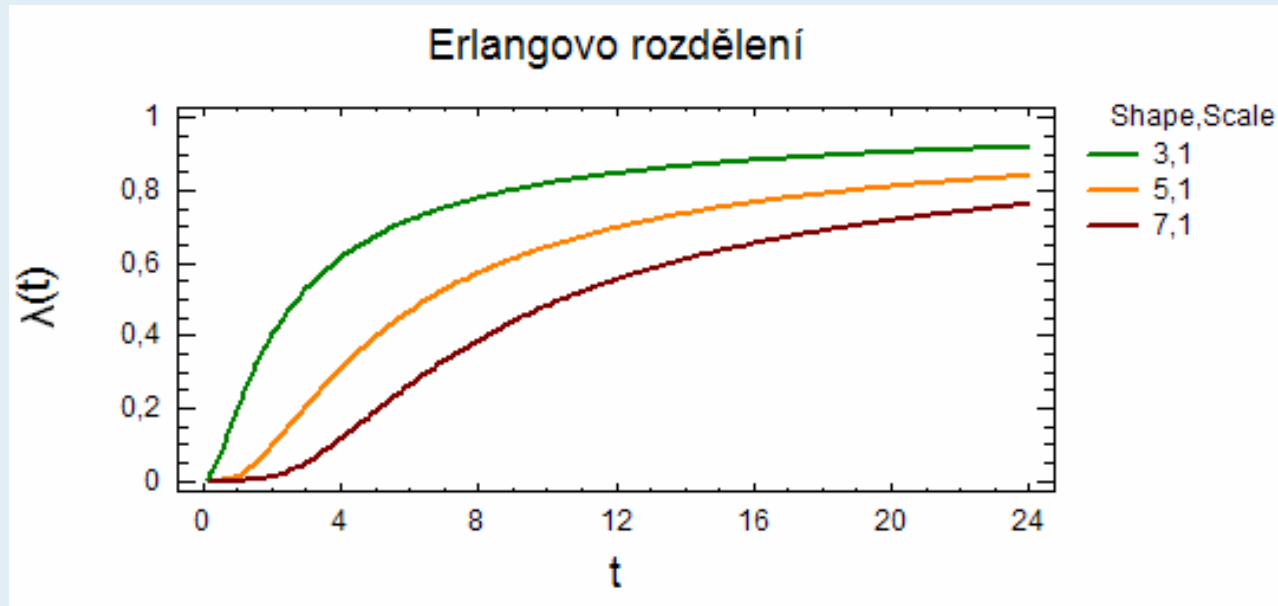
Vliv změny parametru tvaru (k) na hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny s Erlangovým rozdělením

Erlangovo rozdělení



Vliv změny parametru tvaru (k) na distribuční funkci náhodné veličiny s Erlangovým rozdělením

Erlangovo rozdělení



Vliv změny parametru tvaru (k) na intenzitu poruch náhodné veličiny s Erlangovým rozdělením

Intenzita poruch $\lambda(t)$ je v případě Erlangova rozdělení rostoucí funkce, a proto je toto rozdělení vhodné pro **modelování procesu stárnutí**.

Weibullovo rozdělení

X ... doba do poruchy (doba bezporuchovosti)

$$X \rightarrow W(\Theta; \beta)$$

- ❖ Je mnohem flexibilnější než exponenciální rozdělení (to umožňuje modelovat systémy pouze v období stabilního života), umožňuje modelovat dobu do výskytu události i u systémů, které jsou **v období časných poruch** nebo v **období stárnutí** (tj. tam kde se projevuje mechanické opotřebení nebo únava materiálu).
- ❖ Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \frac{\beta}{\Theta} \cdot \left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}; \quad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$$

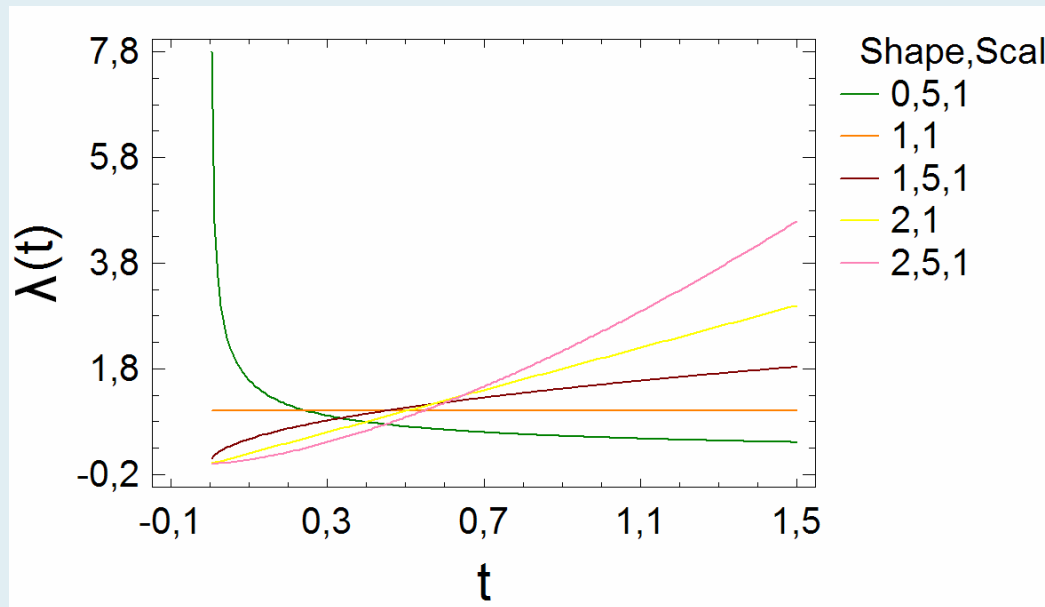
Weibullovo rozdělení

❖ Distribuční funkce:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}; \quad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$$

❖ Intenzita poruch:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\Theta} \cdot \left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1}; \quad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$$



Vliv změny parametru tvaru β na intenzitu poruch náhodné veličiny s Weibullovým rozdělením

3. Weibullovo rozdělení s kvadraticky rostoucí intenzitou poruch a parametrem měřítka $\Theta = 50$ modeluje životnost elektronické součástky.
- a) Jaká je intenzita poruch systému po deseti hodinách funkce?
 - b) Jaká je pravděpodobnost, že elektronická součástka vydrží funkční více než 90 hodin?

Řešení:

Ze zadání: intenzita poruch je kvadraticky rostoucí funkce.
Obecný tvar intenzity poruch: $\text{konstanta} \cdot t^{(\beta-1)=2} \Rightarrow \beta = 3$

$$X \rightarrow W(\Theta = 50; \beta = 3)$$

a) $\lambda(10)=?$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\Theta} \cdot \left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda(10) = \frac{3}{50} \cdot \left(\frac{10}{50}\right)^{3-1} = \frac{300}{50^3} = 0,0024}}$$

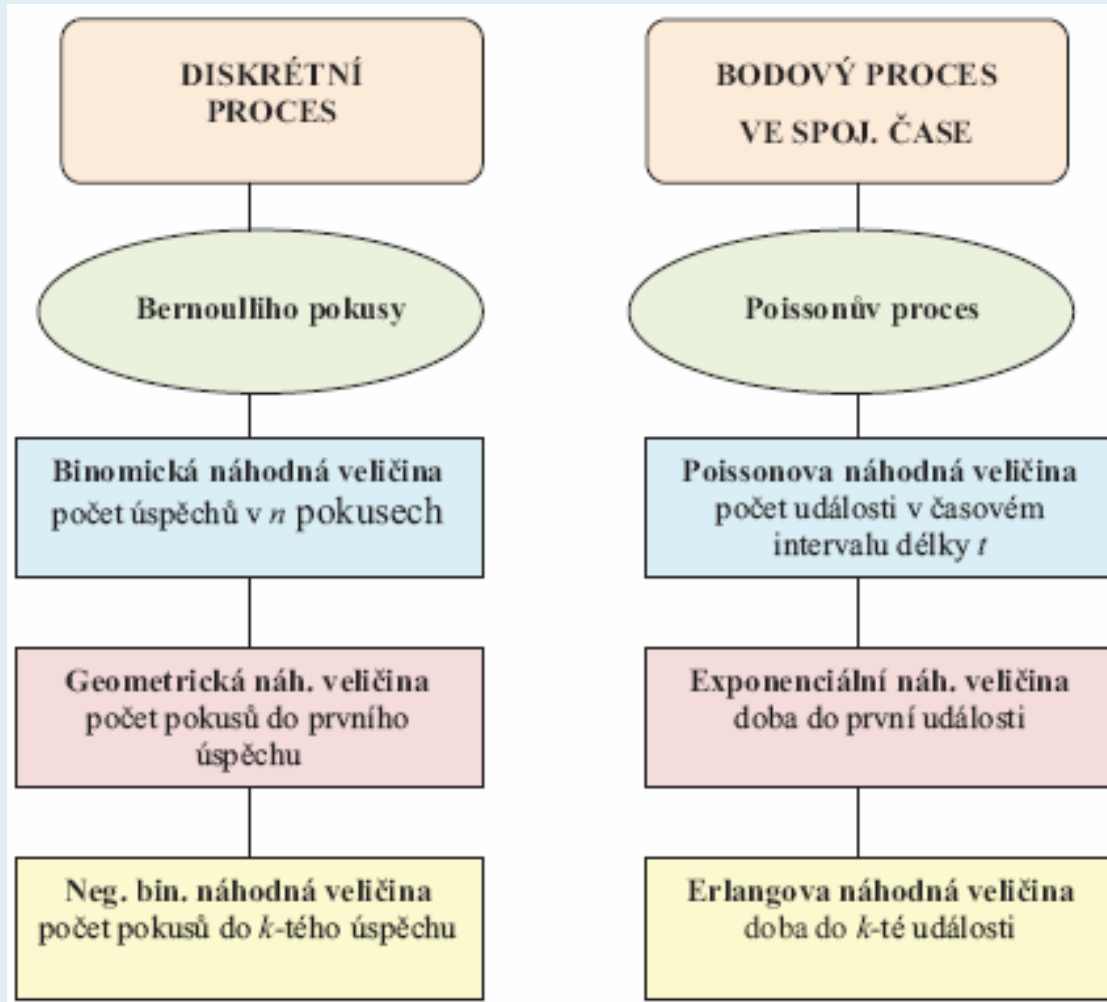
Intenzita poruch dané součástky je po 10 hodinách provozu 0,0024. Tj. pokud byla součástka po 10 hodin bezporuchová, pak pravděpodobnost, že v následujícím velmi krátkém časovém intervalu Δt dojde k poruše, je $0,0024 \cdot \Delta t$.

b) $P(X > 90)=?$

$$\begin{aligned} P(X > 90) &= 1 - P(X < 90) = 1 - F(90) = \\ &= 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{90}{50}\right)^3} \right] = e^{-\left(\frac{90}{50}\right)^3} = \underline{\underline{0,029}} \end{aligned}$$

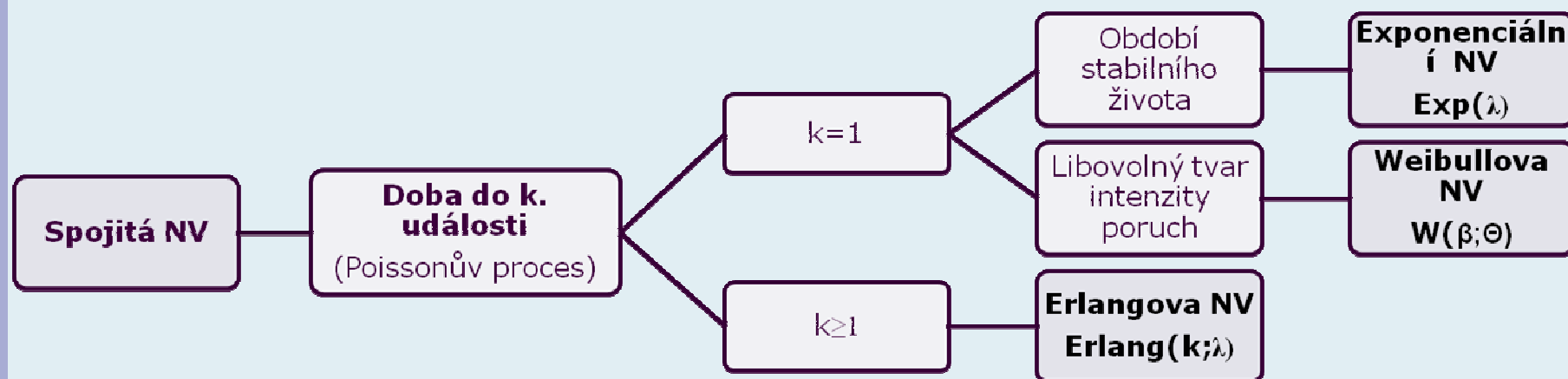
Pravděpodobnost, že součástka bude prvních 90 hodin bezporuchová je 2,9 %.

Souvislost mezi rozděleními



Mezi rozděleními založenými na Bernoulliho pokusech a na Poissonově procesu lze najít logickou souvislost

Výběr spojitého rozdělení NV



Normální rozdělení

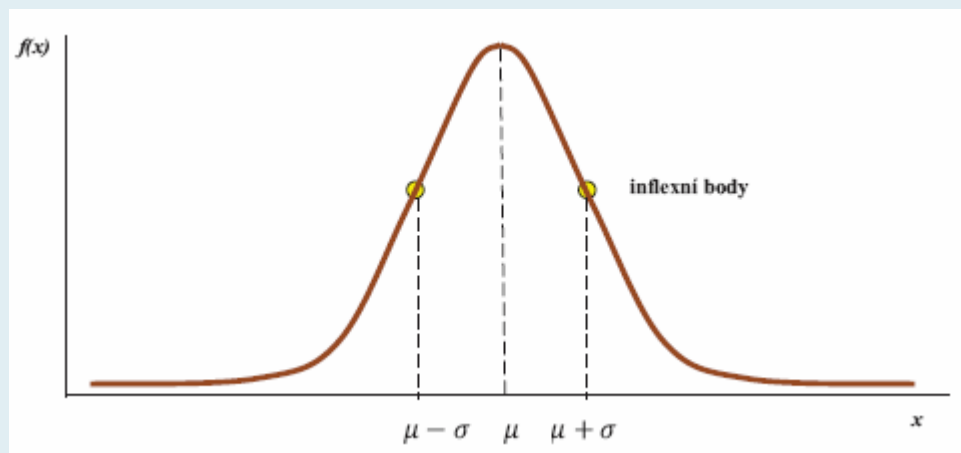
- ❖ Je vhodným pravděpodobnostním modelem tehdy, působí-li na kolísání náhodné veličiny velký počet nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů.
- ❖ Popisuje chování velkého množství náhodných jevů v technice, ekonomii i v přírodních vědách.
- ❖ Za určitých podmínek lze pomocí něj aproximovat řadu jiných spojitých i nespojitých rozdělení.

$$X \rightarrow N(\mu; \sigma^2)$$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < X < \infty$$



Normální rozdělení

Distribuční funkce:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dt$$

Střední hodnota a rozptyl: $E(X) = \mu$ $D(X) = \sigma^2$

Protože distribuční funkci normálního rozdělení nelze analyticky vypočítat, využívá se možnosti vyjádřit distribuční funkci normální NV pomocí distribuční funkce normované náhodné veličiny, tj. normální náhodné veličiny s parametry $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Distribuční funkce normované náhodné veličiny byla v mnoha bodech určena pomocí numerických metod a následně tabelována.

Normované normální rozdělení

$$Z \rightarrow N(0;1)$$

Hustota pravděpodobnosti:

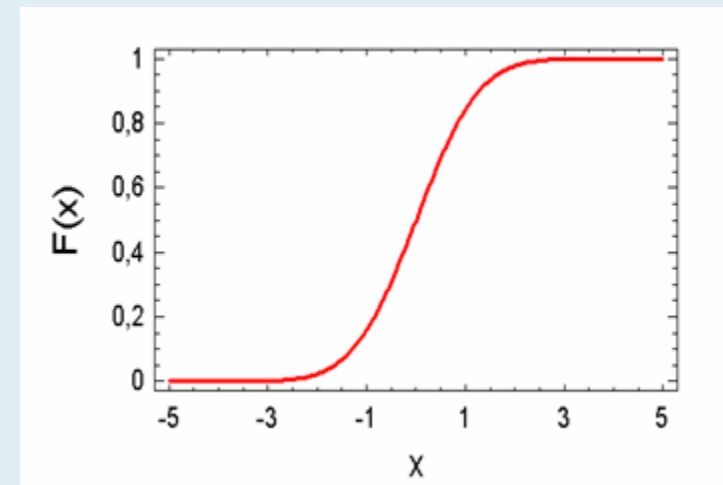
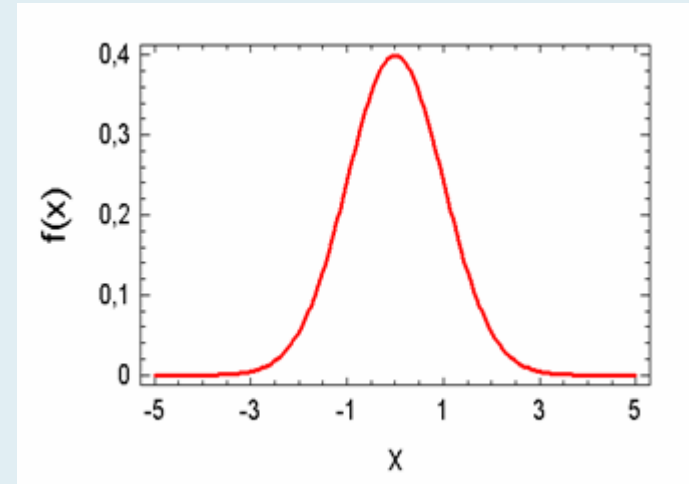
$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}; \quad -\infty < z < \infty$$

Distribuční funkce:

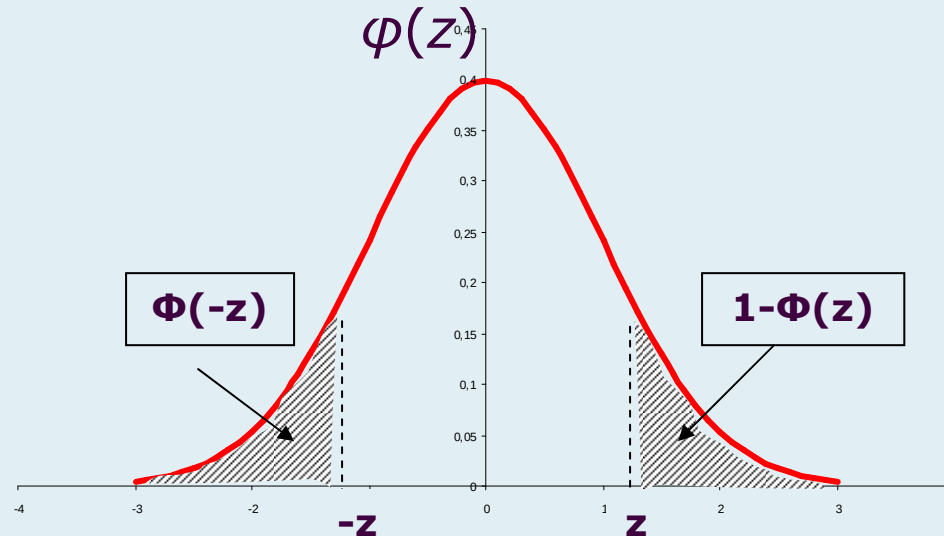
$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Střední hodnota a rozptyl:

$$E(Z) = 0 \quad D(Z) = 1$$



Normované normální rozdělení



$\Phi(z)$... tabelováno; $0 < z < \infty$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z); \quad -\infty < z < \infty$$

$$\phi(z) = \phi(-z); \quad -\infty < z < \infty$$

$$z_p = -z_{1-p}; \quad -\infty < z < \infty$$

4. Určete:

a) $\Phi(0,54)$

b) $\Phi(-2,42)$

c) $z_{0,75}$

d) $z_{0,25}$

Řešení:

$$X \rightarrow \Phi(0;1)$$

a) $\Phi(0,54) = ?$

Příslušnou distribuční funkci nalezneme v Tabulce 1:

V prvním sloupci je uveden argument distribuční funkce s přesností na jedno desetinné místo (0,5), identifikátor druhého sloupce udává druhé desetinné místo argumentu (4).

186

Spojité rozdělení pravděpodobnosti

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Theta(x)$ pro $x > 0$

$$\Theta(-x) = 1 - \Theta(x)$$

<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839

$$\Phi(0,54) = \underline{\underline{0,705}}$$

Řešení:

$$X \rightarrow \Phi(0;1)$$

b) $\Phi(-2,42) = ?$

Pro nalezení distribuční funkce záporného argumentu musíme použít převodní vztah:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z); \quad -\infty < z < \infty$$

$$\Phi(-2,42) = 1 - \Phi(2,42)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998

$$\Phi(-2,42) = 1 - 0,992$$

$$\Phi(-2,42) = \underline{\underline{0,008}}$$

Řešení:

$$X \rightarrow \Phi(0;1)$$

c) $z_{0,75} = ?$

Pro určení $100p\%$ -ního kvantilu zkusíme najít p v jádru tabulky a určit pro ně příslušnou hodnotu z_p :

$$\Phi(z_p) = p$$

$$\Phi(z_{0,75}) = 0,75$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839

$$z_{0,75} \cong \underline{\underline{0,67}}$$

Řešení:

$$X \rightarrow \Phi(0;1)$$

d) $z_{0,25} = ?$

V Tabulce 1 nalezneme hodnoty (50 až 100)%-ních kvantilů. Pro nalezení (0 až 50)%-ních kvantilů musíme použít převodní vztah mezi kvantily:

$$Z_p = -Z_{1-p}; \quad -\infty < Z < \infty$$

$$Z_{0,25} = -Z_{1-0,25} = -Z_{0,75}$$

$$Z_{0,25} \cong \underline{\underline{-0,67}}$$

Standardizace normálního rozdělení

Nechť

$$X \rightarrow N(\mu; \sigma^2),$$

potom definujeme náhodnou veličinu Z:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Náhodná veličina Z má normované normální rozdělení

$$Z \rightarrow N(0; 1),$$

Mezi distribuční funkcí normální náhodné veličiny X a distribuční funkcí normovanou normální náhodnou veličinou Z platí převodní vztah:

$$F(X) = \Phi\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$$

5. Délka výrobku v *mm* má $N(68,3; 0,04)$.

Určete:

a) pravděpodobnost, že délka náhodně odebraného výrobku bude mezi 68 a 69 *mm*,

b) $x_{0,75}$,

c) $x_{0,30}$.

Vysvětlete praktický význam nalezených informací.

Řešení:

$$X \rightarrow N(68,3;0,04)$$

$$a) P(68 < X < 69) = F(69) - F(68)$$

Distribuční funkci normální náhodné veličiny určíme pomocí standardizace:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} F(69) - F(68) &= \Phi\left(\frac{69 - 68,3}{\sqrt{0,04}}\right) - \Phi\left(\frac{68 - 68,3}{\sqrt{0,04}}\right) = \\ &= \Phi(3,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(3,5) - (1 - \Phi(1,5)) = \\ &= 1 - (1 - 0,933) = \underline{\underline{0,933}} \quad \text{viz. Tabulka 1} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že délka náhodně odebraného výrobku bude mezi 68 a 69 *mm* je 93,3 %.

Řešení:

$$X \rightarrow N(68,3;0,04)$$

b) $x_{0,75} = ?$

$$F(x_{0,75}) = 0,75$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,75} - 68,3}{\sqrt{0,04}}\right) = 0,75$$

$$\frac{x_{0,75} - 68,3}{0,2} = 0,674 \quad \text{viz. Tabulka 1}$$

$$x_{0,75} = 0,2 \cdot 0,674 + 68,3 = \underline{\underline{68,435}}$$

Horní kvartil udává hodnotu náhodné veličiny, která nebude překročena s pravděpodobností 75%.

Tzn., že s pravděpodobností 75% nepřekročí délka náhodně vybraného výrobku 68,44 mm.

Řešení:

$$X \rightarrow N(68,3;0,04)$$

$$c) x_{0,30} = ?$$

$$F(x_{0,30}) = 0,30$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,30} - 68,3}{\sqrt{0,04}}\right) = 0,30$$

$$1 - \Phi\left(\frac{x_{0,30} - 68,3}{0,2}\right) = 1 - 0,30$$

$$\Phi\left(-\frac{x_{0,30} - 68,3}{0,2}\right) = 0,70$$

$$-\frac{x_{0,30} - 68,3}{0,2} = 0,525$$

$$x_{0,30} = -0,2 \cdot 0,525 + 68,3 = \underline{\underline{68,195}}$$

30% kvantil udává hodnotu náhodné veličiny, která nebude překročena s pravděpodobností 30%.

Tzn., že u 30% náhodně vybraných výrobků bude délka menší než 68,20 mm.

Pravidlo 6σ

- ❖ Máme-li data pocházející z normálního rozdělení o parametrech μ , σ , pak téměř všechna (99,8% z nich) leží v intervalu $(\mu \pm 3\sigma)$.
- ❖ Je jedním ze základních principů, na nichž stojí kontrola kvality a jakosti.
- ❖ Spojitost s odlehlým pozorováním (jedno z kritérií: odlehlé pozorování je takové, které je od střední hodnoty vzdálené o více než trojnásobek směrodatné odchylky).

6. Stanovme pravděpodobnost, že náhodná veličina X mající rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$ nabude hodnoty z intervalu $(\mu - k \cdot \sigma; \mu + k \cdot \sigma)$ pro dané kladné k .

Řešení:

pro $k > 0$:

$$\begin{aligned} P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma) &= F(\mu + k \cdot \sigma) - F(\mu - k \cdot \sigma) = \\ &= \Phi\left(\frac{\mu + k \cdot \sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - k \cdot \sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(k) - \Phi(-k) = \\ &= \Phi(k) - [1 - \Phi(k)] = 2 \cdot \Phi(k) - 1 \end{aligned}$$

k	$P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma)$
1	0,683
1,64	0,900
1,96	0,950
2,58	0,990
3	0,998

7. Firma získá z každého prodaného výrobku 100,-Kč. Za výměnu během záruční lhůty zaplatí 300,-Kč. Životnost výrobku v letech má normální rozdělení $N(3;1)$. Jakou záruční dobu v měsících má firma stanovit, aby střední (průměrný) zisk byl alespoň 60,- Kč/výrobek?

Řešení:

X ... počet reklamovaných výrobků (z jednoho prodaného)

Y ... zisk z jednoho prodaného výrobku

Z ... životnost výrobku

T_Z ... záruční doba

X má alternativní rozdělení, jehož parametr p je roven pravděpodobnosti, že dojde k reklamaci výrobku během záruční doby: $X \rightarrow A(p)$

$$p = P(Z < T_Z)$$

Zisk z jednoho výrobku (Y) je dán jako:

$$Y = 100 - 300 \cdot X \quad , \text{ proto } E(Y) = 100 - 300 \cdot E(X)$$

$$E(X) = p = P(Z < T_Z), \text{ kde } Z \rightarrow N(3; 1)$$

$$E(X) = F(T_Z) = \Phi\left(\frac{T_Z - 3}{1}\right) = \Phi(T_Z - 3)$$

Řešení:

Řešíme nerovnici: aby střední (průměrný) zisk byl alespoň 60,-
Kč/výrobek

$$E(Y) \geq 60$$

$$100 - 300 \cdot E(X) \geq 60$$

$$100 - 300 \cdot \Phi(T_Z - 3) \geq 60$$

$$\Phi(T_Z - 3) \leq \frac{4}{30}$$

$$\Phi(T_Z - 3) \leq 0,133$$

Řešení této nerovnice nelze najít v tabulkách, proto nerovnici upravíme:

$$1 - \Phi(T_Z - 3) \geq 1 - 0,133$$

$$\Phi(-(T_Z - 3)) \geq 0,867 \quad \text{viz. Tabulka 1}$$

$$-(T_Z - 3) \geq 1,11$$

$$T_Z \leq 1,89 \quad \text{let} \quad (= 22,68 \text{ měsíců})$$

Firma by měla stanovit záruční dobu na 22 měsíců.

Test

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:
 - a) Intenzita poruch (hazardní funkce) je neklesající funkce.
 - b) Exponenciální rozdělení používáme k modelování životnosti výrobku nacházejících se v období stárnutí.
 - c) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Erlangova rozdělení.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- a) ~~Intenzita poruch (hazardní funkce) je neklesající funkce.~~ V období časných poruch je intenzita poruch klesající
- b) Exponenciální rozdělení používáme k modelování životnosti výrobku nacházejících se v období stárnutí.
- c) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Erlangova rozdělení.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- ~~a)~~ Intenzita poruch (hazardní funkce) je neklesající funkce. **V období časných poruch je intenzita poruch klesající.**
- ~~b)~~ Exponenciální rozdělení používáme k modelování životnosti výrobku nacházejících se v období stárnutí.**V období stabilního života.**
- c) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Erlangova rozdělení.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- ☒ a) Intenzita poruch (hazardní funkce) je neklesající funkce. V období časných poruch je intenzita poruch klesající.
- ☒ b) Exponenciální rozdělení používáme k modelování životnosti výrobku nacházejících se v období stárnutí. V období stabilního života.
- ☒ c) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Erlangova rozdělení. $Exp(\lambda) = Erlang(k=1, \lambda)$

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- d) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Weibullova rozdělení.
- e) Weibullovo rozdělení lze použít k modelování životnosti výrobků nacházejících se v libovolném období života.
- f) Normální rozdělení má právě jeden parametr.
- g) Hustota pravděpodobnosti normální náhodné veličiny je sudá funkce.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- ✓d) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Weibullova rozdělení. $Exp(\lambda) = W(\beta=1, \Theta=1/\lambda)$
- e) Weibullovo rozdělení lze použít k modelování životnosti výrobků nacházejících se v libovolném období života.
- f) Normální rozdělení má právě jeden parametr.
- g) Hustota pravděpodobnosti normální náhodné veličiny je sudá funkce.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- ✓d) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Weibullova rozdělení. $Exp(\lambda) = W(\beta=1, \Theta=1/\lambda)$
- ✓e) Weibullovo rozdělení lze použít k modelování životnosti výrobků nacházejících se v libovolném období života.
- f) Normální rozdělení má právě jeden parametr.
- g) Hustota pravděpodobnosti normální náhodné veličiny je sudá funkce.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- ✓d) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Weibullova rozdělení. $Exp(\lambda) = W(\beta=1, \Theta=1/\lambda)$
- ✓e) Weibullovo rozdělení lze použít k modelování životnosti výrobků nacházejících se v libovolném období života.
- ✗f) Normální rozdělení má právě jeden parametr.
Dva parametry – střední hodnotu μ a rozptyl σ^2 .
- g) Hustota pravděpodobnosti normální náhodné veličiny je sudá funkce.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- ✓d) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Weibullova rozdělení. $Exp(\lambda) = W(\beta=1, \Theta=1/\lambda)$
- ✓e) Weibullovo rozdělení lze použít k modelování životnosti výrobků nacházejících se v libovolném období života.
- ✗f) Normální rozdělení má právě jeden parametr.
Dva parametry – střední hodnotu μ a rozptyl σ^2 .
- ✗g) Hustota pravděpodobnosti normální náhodné veličiny je sudá funkce.
Platí pouze pro hustotu pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- h) Distribuční funkce normální náhodné veličiny je tabelována.
- i) Má-li náhodná veličina normální rozdělení, pak (střední hodnota = medián = modus).
- j) Má-li náhodná veličina normální rozdělení se střední hodnotou μ a sm. odchylkou σ , pak přibližně 5% hodnot náhodné veličiny leží mimo interval $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- ~~h)~~ Distribuční funkce normální náhodné veličiny je tabelována. Platí pouze pro hustotu pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení.
- i) Má-li náhodná veličina normální rozdělení, pak (střední hodnota = medián = modus).
- j) Má-li náhodná veličina normální rozdělení se střední hodnotou μ a sm. odchylkou σ , pak přibližně 5% hodnot náhodné veličiny leží mimo interval $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

-  ~~h)~~ Distribuční funkce normální náhodné veličiny je tabelována. Platí pouze pro hustotu pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení.
-  i) Má-li náhodná veličina normální rozdělení, pak (střední hodnota = medián = modus).
- j) Má-li náhodná veličina normální rozdělení se střední hodnotou μ a sm. odchylkou σ , pak přibližně 5% hodnot náhodné veličiny leží mimo interval $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- ~~h)~~ Distribuční funkce normální náhodné veličiny je tabelována. Platí pouze pro hustotu pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení.
- i) Má-li náhodná veličina normální rozdělení, pak (střední hodnota = medián = modus).
- ~~j)~~ Má-li náhodná veličina normální rozdělení se střední hodnotou μ a sm. odchylkou σ , pak přibližně 5% hodnot náhodné veličiny leží mimo interval $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$.

Mimo interval $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$ leží 0,2% hodnot NV.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- k) Logaritmicko-normální náhodná veličina má zápornou šikmost.
- l) Necht' má náhodná veličina X normální rozdělení a náhodná veličina $Y = \ln X$. Náhodná veličina Y má logaritmicko-normální rozdělení.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

~~X)~~ Logaritmicko-normální náhodná veličina má zápornou šikmost. **Kladnou.**

I) Necht' má náhodná veličina X normální rozdělení a náhodná veličina $Y = \ln X$. Náhodná veličina Y má logaritmicko-normální rozdělení.

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

- ~~X~~) Logaritmicko-normální náhodná veličina má zápornou šikmost. **Kladnou.**
- ~~X~~) Necht' má náhodná veličina X normální rozdělení a náhodná veličina $Y = \ln X$. Náhodná veličina Y má logaritmicko-normální rozdělení.

Má-li náhodná veličina X logaritmicko-normální rozdělení a náhodná veličina $Y = \ln X$, pak náhodná veličina Y má normální rozdělení.

2. Doplňte:

- a) Intenzitu poruch lze použít k popisu
spojitých náhodných veličin.
- b) Exponenciální rozdělení používáme k modelování
životnosti výrobku nacházejících se v období
.
- c) Pro modelování životnosti výrobku, který má
lineárně rostoucí intenzitu poruch lze použít
Weibullovo rozdělení s parametrem tvaru
 $\beta =$

2. Doplňte:

- a) Intenzitu poruch lze použít k popisu **nezáporných** spojitých náhodných veličin.
- b) Exponenciální rozdělení používáme k modelování životnosti výrobku nacházejících se v období
.....
- c) Pro modelování životnosti výrobku, který má lineárně rostoucí intenzitu poruch lze použít Weibullovo rozdělení s parametrem tvaru
 $\beta = \dots\dots\dots$

2. Doplňte:

- a) Intenzitu poruch lze použít k popisu **nezáporných** spojitých náhodných veličin.
- b) Exponenciální rozdělení používáme k modelování životnosti výrobku nacházejících se v období **stabilního života**
- c) Pro modelování životnosti výrobku, který má lineárně rostoucí intenzitu poruch lze použít Weibullovo rozdělení s parametrem tvaru $\beta =$

2. Doplňte:

- a) Intenzitu poruch lze použít k popisu **nezáporných** spojitých náhodných veličin.
- b) Exponenciální rozdělení používáme k modelování životnosti výrobku nacházejících se v období **stabilního života**
- c) Pro modelování životnosti výrobku, který má lineárně rostoucí intenzitu poruch lze použít Weibullovo rozdělení s parametrem tvaru $\beta = 2$

2. Doplňte:

- d) Gaussova křivka je grafem
. normálního rozdělení.
- e) Identifikace odlehlých pozorování pomocí z-souřadnice je založena na pravidle
.
- f) Logaritmicko-normální NV má
šikmost.

2. Doplňte:

- d) Gaussova křivka je grafem **hustoty pravděpodobnosti** normálního rozdělení.
- e) Identifikace odlehlých pozorování pomocí z-souřadnice je založena na pravidle
.....
- f) Logaritmicko-normální NV má
šikmost.

2. Doplňte:

- d) Gaussova křivka je grafem **hustoty pravděpodobnosti** normálního rozdělení.
- e) Identifikace odlehlých pozorování pomocí z-souřadnice je založena na pravidle **6σ**
- f) Logaritmicko-normální NV má šikmost.

2. Doplňte:

- d) Gaussova křivka je grafem **hustoty pravděpodobnosti** normálního rozdělení.
- e) Identifikace odlehlých pozorování pomocí z-souřadnice je založena na pravidle **6σ**
- f) Logaritmicko-normální NV má **kladnou** šikmost.