

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

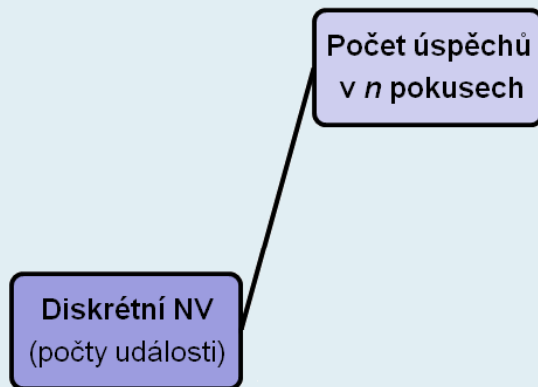


5. cvičení

Rozdělení pravděpodobnosti NV

- ❖ **Rozdělení náhodné veličiny** X je předpis, kterým definujeme pravděpodobnost jevu, jež lze touto náhodnou veličinou popsat.
- ❖ U diskrétní náhodné veličiny je tímto předpisem (rozdělením) většinou pravděpodobnostní funkce. (popř. distribuční funkce)

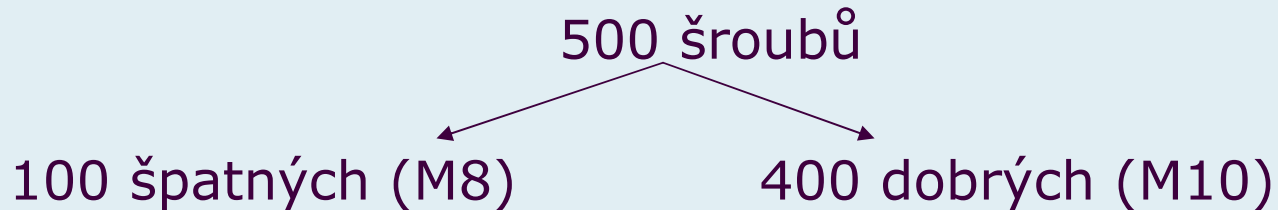
Hledáme počet úspěchů v n pokusech, jestliže pokus má 2 možné výsledky.



1. Ke 400 šroubům M10 bylo omylem přimícháno 100 šroubů M8. Pro montáž přístroje potřebuje pracovník 4 šrouby rozměru M10. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými 5 šrouby budou právě 4 s požadovanými vlastnostmi?

Řešení:

X ... počet dobrých šroubů M10 mezi 5 vybranými



Počet všech možností: vybíráme 5 šroubů z 500 (bez ohledu na pořadí) $\Rightarrow C(500,5)$

Počet příznivých možností: mezi vybranými 5 šrouby mají být 4 šrouby typu M10, tj. vybíráme 4 šrouby M10 ze 400 a zároveň 1 (5-4) M8 ze 100: $C(400,4) \cdot C(100,1)$

$$P(X = 4) = \frac{C(400,4) \cdot C(100,1)}{C(500,5)} = \frac{\binom{400}{4} \cdot \binom{100}{1}}{\binom{500}{5}} = 0,412 \Rightarrow \underline{\underline{41,2\%}}$$

Hypergeometrické rozdělení

X ... počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n z N prvků

Základní soubor:

rozsah N

prvky:

s vlastností – M

bez vlastnosti – $N-M$

Označení: $X \rightarrow H(N;M;n)$

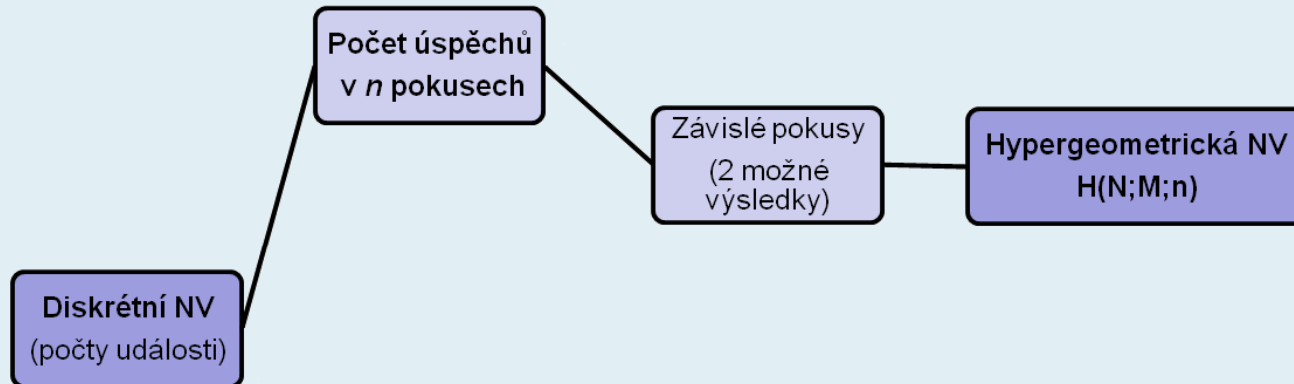
Pravděpodobnostní funkce hypergeometrické náhodné veličiny je dána:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Hypergeometrické rozdělení

- ❖ Popisuje počet úspěchů v n **závislých** pokusech.
- ❖ Je základním pravděpodobnostním rozdělením při výběru bez vracení.
- ❖ Hraje významnou roli při statistické kontrole jakosti v případech, kdy zkoumáme jakost malého počtu výrobků, nebo když kontrola má ráz destrukční zkoušky (tj. výrobek je při zkoušce zničen).
- ❖ Lze využít k modelování:
 - ❖ počtu vadných výrobku mezi 10 vybranými z dodávky 30 výrobku, mezi nimiž bylo 7 vadných,
 - ❖ počtu dívek v náhodně vybrané skupině 4 dětí ze třídy, v níž je 6 chlapců a 8 dívek,
 - ❖ počtu cibulí červených tulipánů v balíčku 10 cibulí vybraných ze směsi, která obsahuje 20 cibulí žlutých a 20 cibulí červených tulipánů, apod.

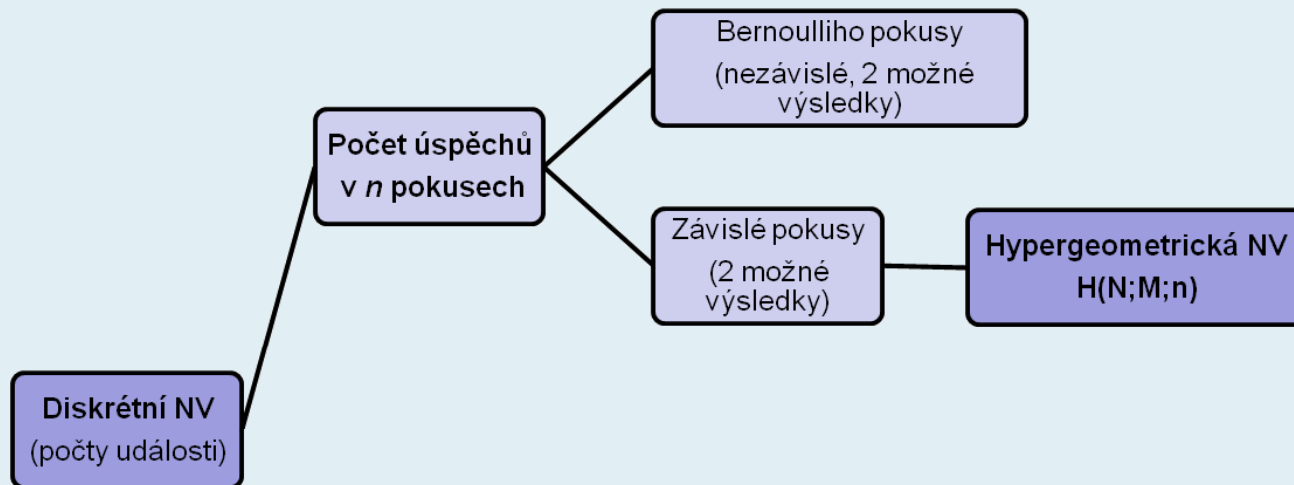
Hypergeometrické rozdělení



Bernoulliho pokusy

- ❖ Posloupnost **nezávislých** pokusů (tj. takových pokusů, kdy úspěch v libovolné skupině pokusu neovlivňuje pravděpodobnost úspěchu v pokusu, který do této skupiny nepatří), kde úspěch může nastat s pravděpodobností p a nenastat s pravděpodobností $(1-p)$.
- ❖ Pravděpodobnost úspěchu p v jednotlivých Bernoulliho pokusech je konstantní.

Bernoulliho pokusy



2. Student VŠB Petr má potíže s ranním vstáváním. Proto někdy zaspí a nestihne přednášku, která začíná již v 9 hodin. Pravděpodobnost, že zaspí, je 0,3. V semestru je 12 přednášek - tzn. 12 nezávislých pokusů dorazit na přednášku včas. Nalezněte pravděpodobnost, že Petr nestihne přednášku v důsledku zaspání
- a) právě třikrát,
 - b) méně než třikrát,
 - c) více než třikrát.

Řešení:

a) právě třikrát

X ... počet nestihnutých přednášek v důsledku zaspání

p ... pravděpodobnost zaspání

V jakém pořadí může Petr třikrát zaspát během 12 přednášek?

Např. z,z,z,n,n,n,n,n,n,n,n,n => jaká je pravděpodobnost, že se tak stane?

Předpokládáme že jsou tyto jevy nezávislé

$$P(z \cap z \cap z \cap n \cap n \cap n \cap n \cap n \cap n \cap n \cap n \cap n) = p \cdot p \cdot p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) = p^3 \cdot (1-p)^9 = 0,3^3 \cdot (1-0,3)^9 = 0,3^3 \cdot 0,7^9$$

Kolik je pořadí, jak může Petr třikrát z 12 přednášek zaspát?

$$P^*(3,9) = \frac{12!}{3!9!} = \binom{12}{3} \Rightarrow P(X = 3) = \binom{12}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^9 = \underline{\underline{0,24}}$$

Pravděpodobnost, že Petr zaspí právě třikrát z 12 přednášek je 24 %.

Binomické rozdělení

X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech

Označení: $X \rightarrow Bi(n;p)$

Pravděpodobnostní funkce binomické náhodné veličiny je dána:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Řešení:

b) méně než třikrát

X ... počet nestihnutých přednášek v důsledku zaspání

$$X \rightarrow Bi(12; 0,3)$$

$k < 3$, tj. $k = 0; 1; 2$

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \sum_{k=0}^2 \binom{12}{k} \cdot (0,3)^k \cdot (0,7)^{12-k} = \\ &= \underline{\underline{0,253}} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že Petr zaspí méně než třikrát z 12 přednášek je 25,3 %.

Řešení:

c) více než třikrát

X ... počet nestihnutých přednášek v důsledku zaspání
 $X \rightarrow Bi(12; 0,3)$

$k > 3$, tj. $k = 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12$

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= P(X = 4) + P(X = 5) + \dots + P(X = 12) = \\ &= \sum_{k=4}^{12} \binom{12}{k} \cdot (0,49)^k \cdot (0,51)^{12-k} = \underline{\underline{0,507}} \end{aligned}$$

Nebo přes opačný jev:

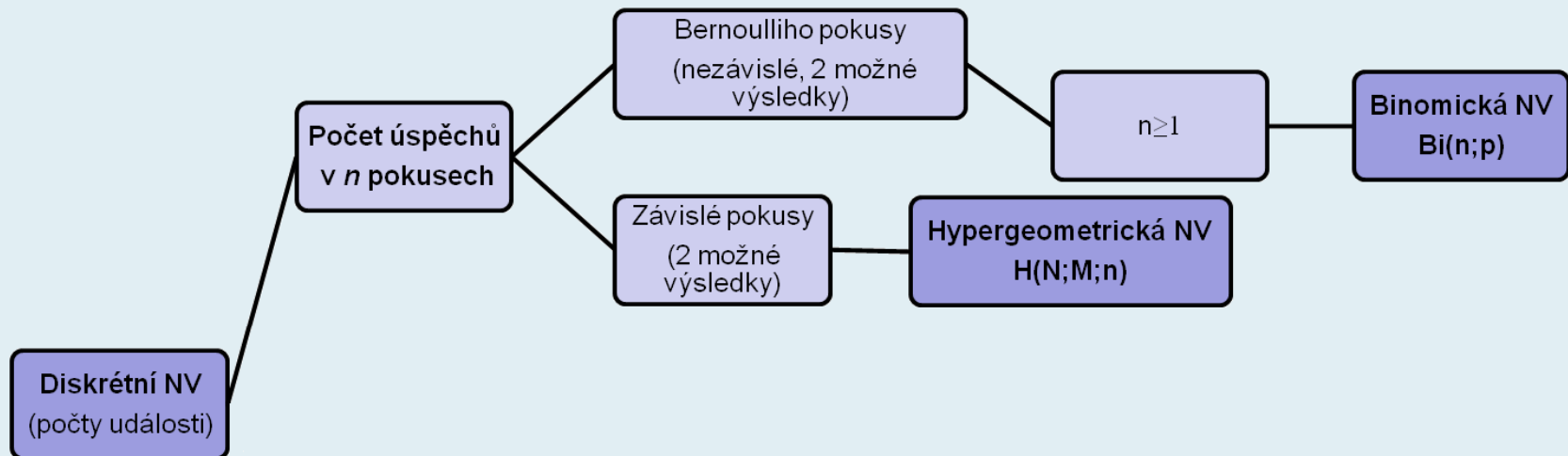
$$P(X > 3) = 1 - P(X < 3) - P(X = 3) = 1 - 0,253 - 0,24 = \underline{\underline{0,507}}$$

Pravděpodobnost, že Petr zaspí více než třikrát z 12 přednášek je 50,7 %.

Binomické rozdělení

- ❖ Popisuje počet úspěchů v n **nezávislých** (Bernoulliho) pokusech.
- ❖ Lze využít k modelování:
 - ❖ počet chlapců mezi 10 000 novorozenci,
 - ❖ počet vadných výrobků mezi 30 testovanými,
 - ❖ počet nevzrostlých rostlin ze 100 zasazených cibulek, apod.

Binomické rozdělení



Alternativní rozdělení

- ❖ Speciální případ binomické náhodné veličiny pro $n = 1$.

X ... počet úspěchů v jednom pokusu

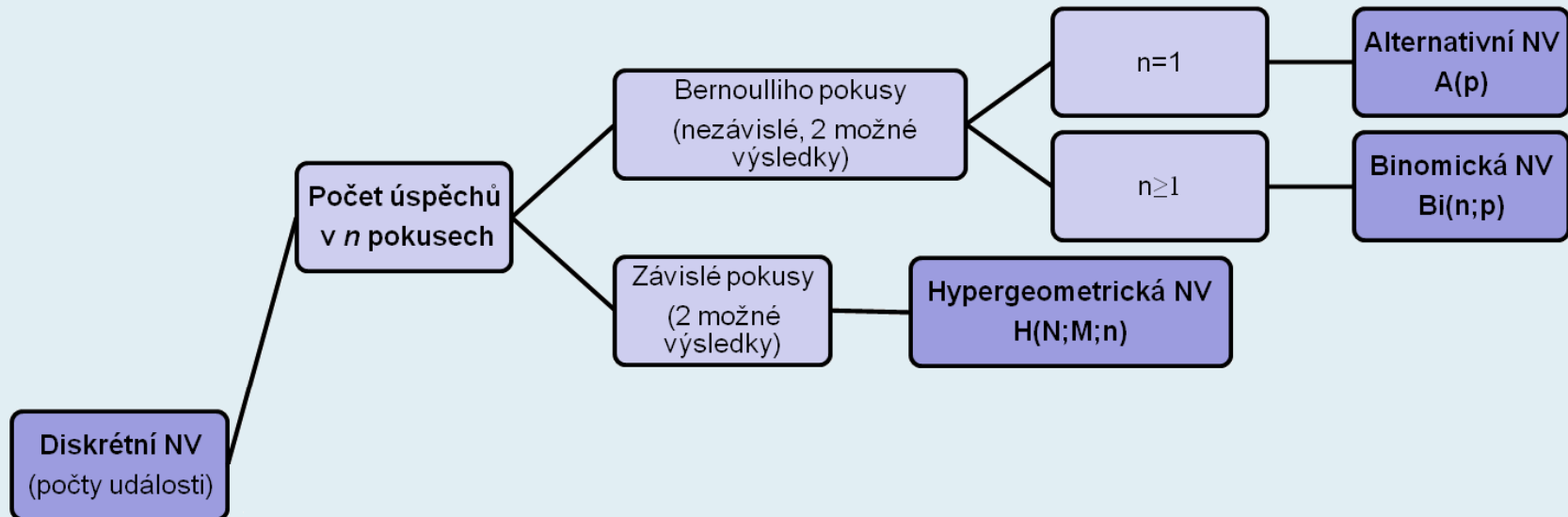
Označení: $X \rightarrow A(p)$

Pravděpodobnostní funkce alternativní náhodné veličiny tedy stanovuje, jaká je pravděpodobnost, že dojde k úspěchu nebo neúspěchu.

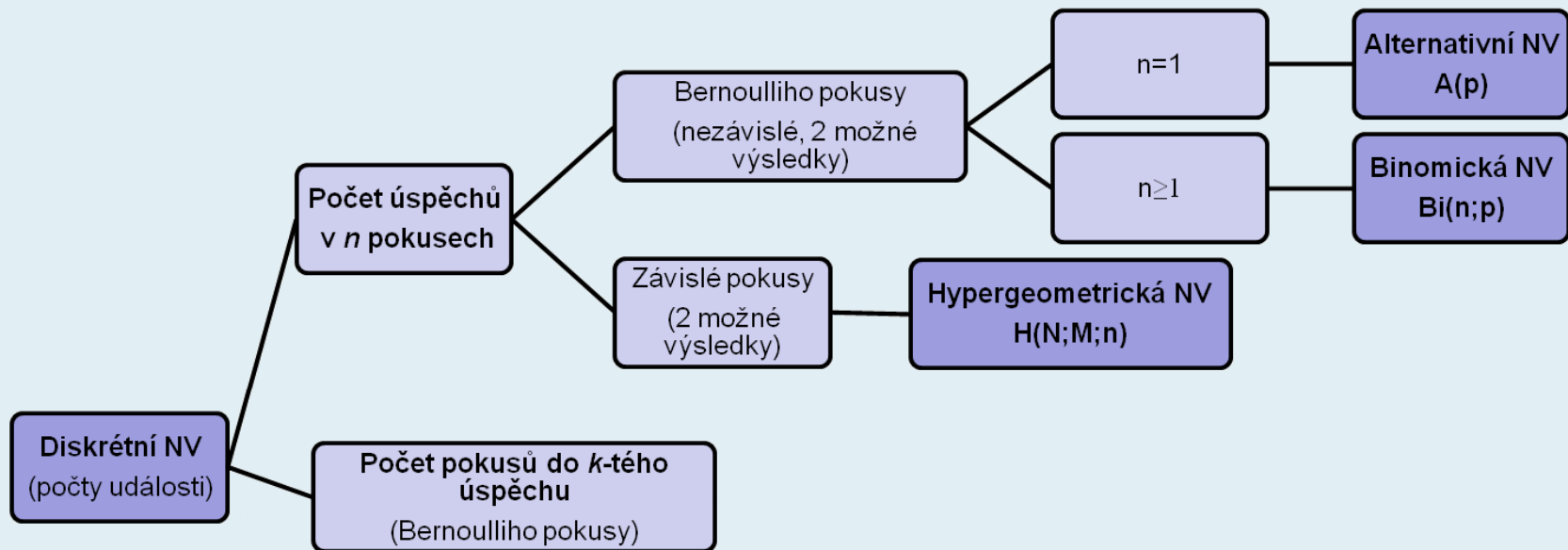
$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

Alternativní rozdělení



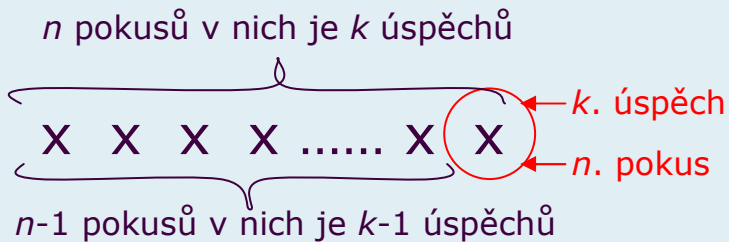
Hledáme počet pokusů do k -tého úspěchu



Řešení:

a) právě 10 potenciálních dárců

X ... počet osob, které musíme vyšetřit, chceme-li najít 3 dárce s krevní skupinou A+



Počet úspěchů v $n-1$ pokusech má binomické rozdělení pravděpodobnosti

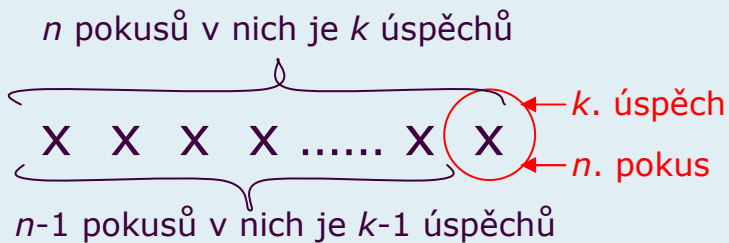
$$P(X = k - 1) = \binom{n - 1}{k - 1} \cdot p^{k-1} \cdot (1 - p)^{n-1-(k-1)}$$

přenásobením pravděpodobností úspěchu v posledním pokusu dostaneme pravděpodobnost k -tého úspěchu v n pokusech

Řešení:

a) právě 10 potenciálních dárců

X ... počet osob, které musíme vyšetřit, chceme-li najít 3 dárce s krevní skupinou A+



$$P(X = k) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-1-(k-1)} \cdot p = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = k) = \binom{10-1}{3-1} \cdot 0,35^3 \cdot (1-0,35)^{10-3} = \underline{\underline{0,076}}$$

Pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+ musíme vyšetřit právě 10 potenciálních dárců je 7,6%.

Negativně-binomické rozdělení

X ... počet Bernoulliho pokusů do k -tého úspěchu, včetně k -tého výskytu.

Označení: $X \rightarrow NB(k;p)$

Pravděpodobnostní funkce negativně-binomické náhodné veličiny:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Řešení:

b) více než 9 potenciálních dárců,

X ... počet osob, které musíme vyšetřit, chceme-li najít 3 dárce s krevní skupinou A+

$$X \rightarrow NB(3; 0,35)$$

$$P(X > 9) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - \sum_{n=3}^9 \binom{10-1}{2} \cdot (0,35)^3 \cdot (0,65)^{n-3} = \underline{\underline{0,337}}$$

Nejmenší počet osob,
které musíme vyšetřit,
chceme-li najít 3 dárce s
krevní skupinou A+ je 3

Pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+ musíme vyšetřit více než 9 potenciálních dárců je 33,7%.

Řešení:

c) více než 7 a méně než 12 potenciálních dárců

X ... počet osob, které musíme vyšetřit, chceme-li najít 3 dárce s krevní skupinou A+

$$X \rightarrow NB(3; 0,35)$$

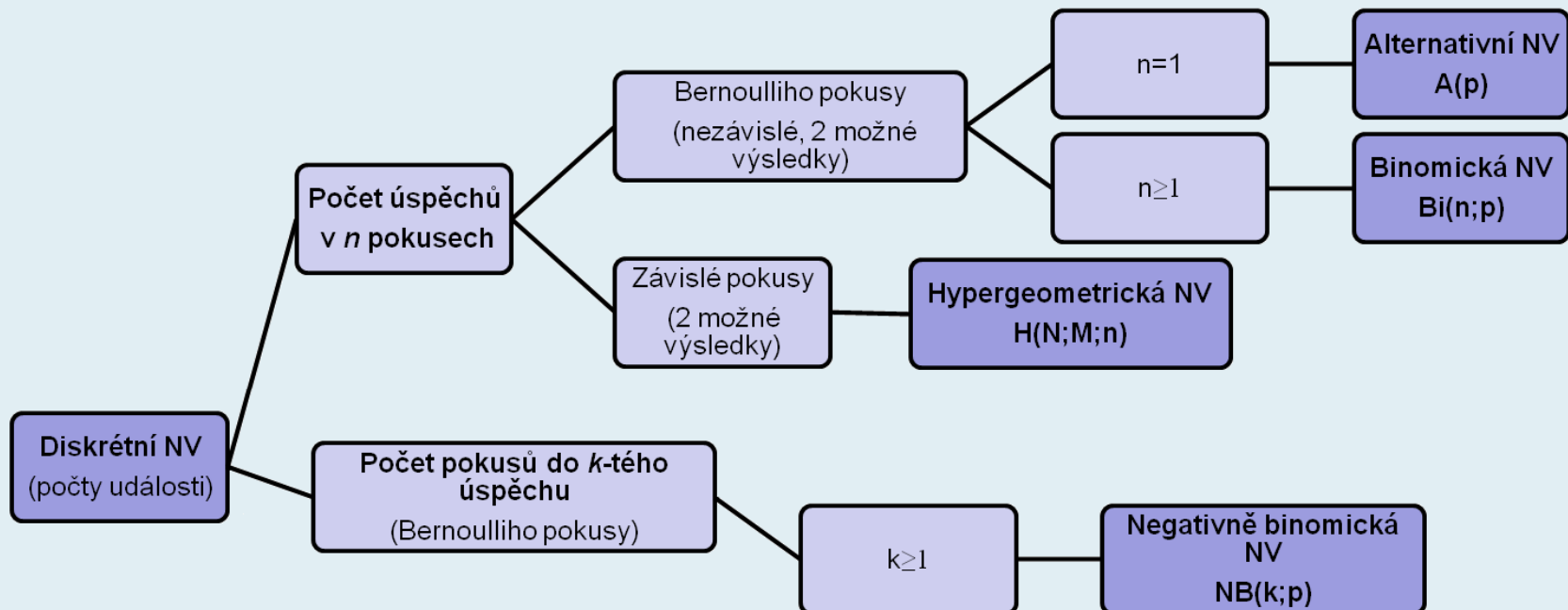
$$P(7 < X < 12) = \sum_{n=8}^{11} \binom{10-1}{2} \cdot (0,35)^3 \cdot (0,65)^{n-3} = \underline{\underline{0,332}}$$

Pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+ musíme vyšetřit více než 7 a méně než 12 potenciálních dárců je 33,2%.

Negativně-binomické rozdělení

- ❖ Označováno někdy jako „Pascalovo“ rozdělení
- ❖ Lze využít k modelování:
 - ❖ počtu dárců neznajících svou krevní skupinu, které musíte testovat proto, abyste našli 4 dárce s krevní skupinou 0,
 - ❖ počtu cestujících, které musí revizor zkontrolovat do chvíle, než najde 10 černých pasažéru,
 - ❖ počtu výrobku testovaných při výstupní kontrole do chvíle, než bude nalezeno 5 vadných výrobku, atd.

Negativně-binomické rozdělení



Geometrické rozdělení

- ❖ Speciální případ negativně-binomické náhodné veličiny pro $k = 1$.

X ... počet Bernoulliho pokusů do prvního výskytu úspěchu včetně něj.

Označení: $X \rightarrow G(p)$

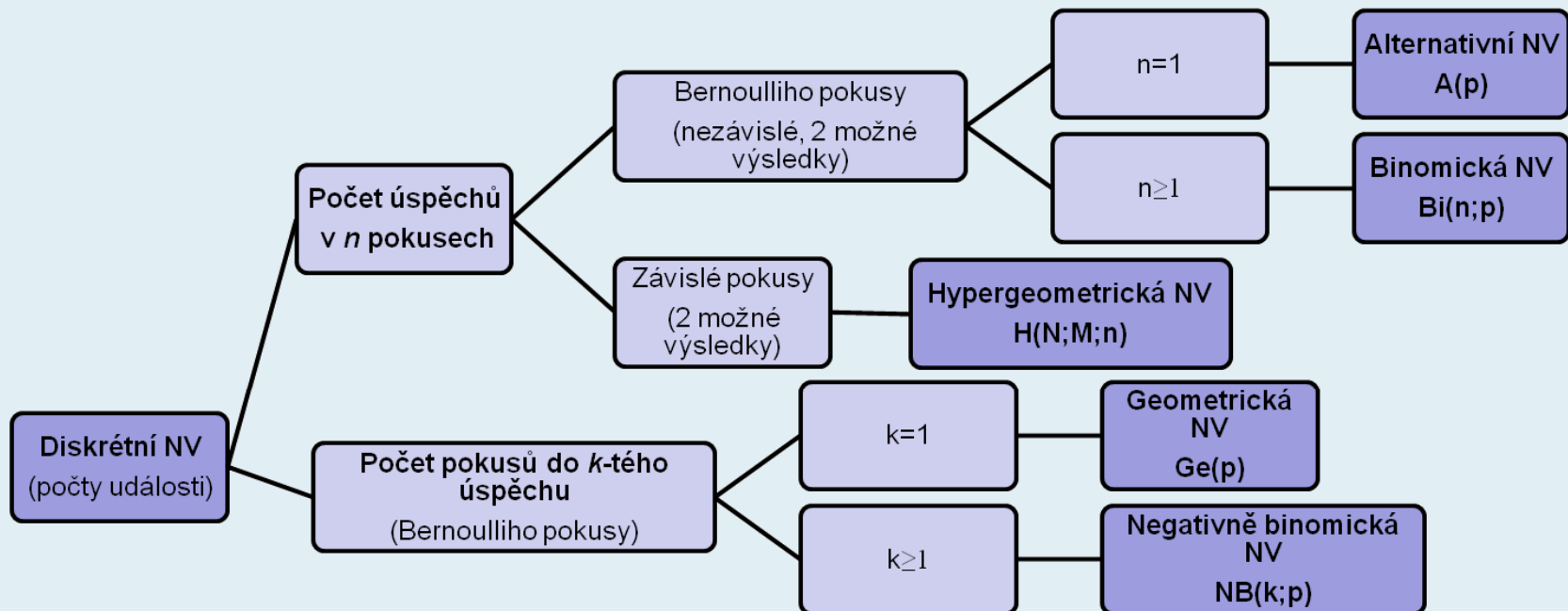
Pravděpodobnostní funkce geometrické náhodné veličiny stanovuje jaká je pravděpodobnost, že pro dosažení prvního úspěchu musíme provést n pokusů (včetně toho úspěšného).

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$$

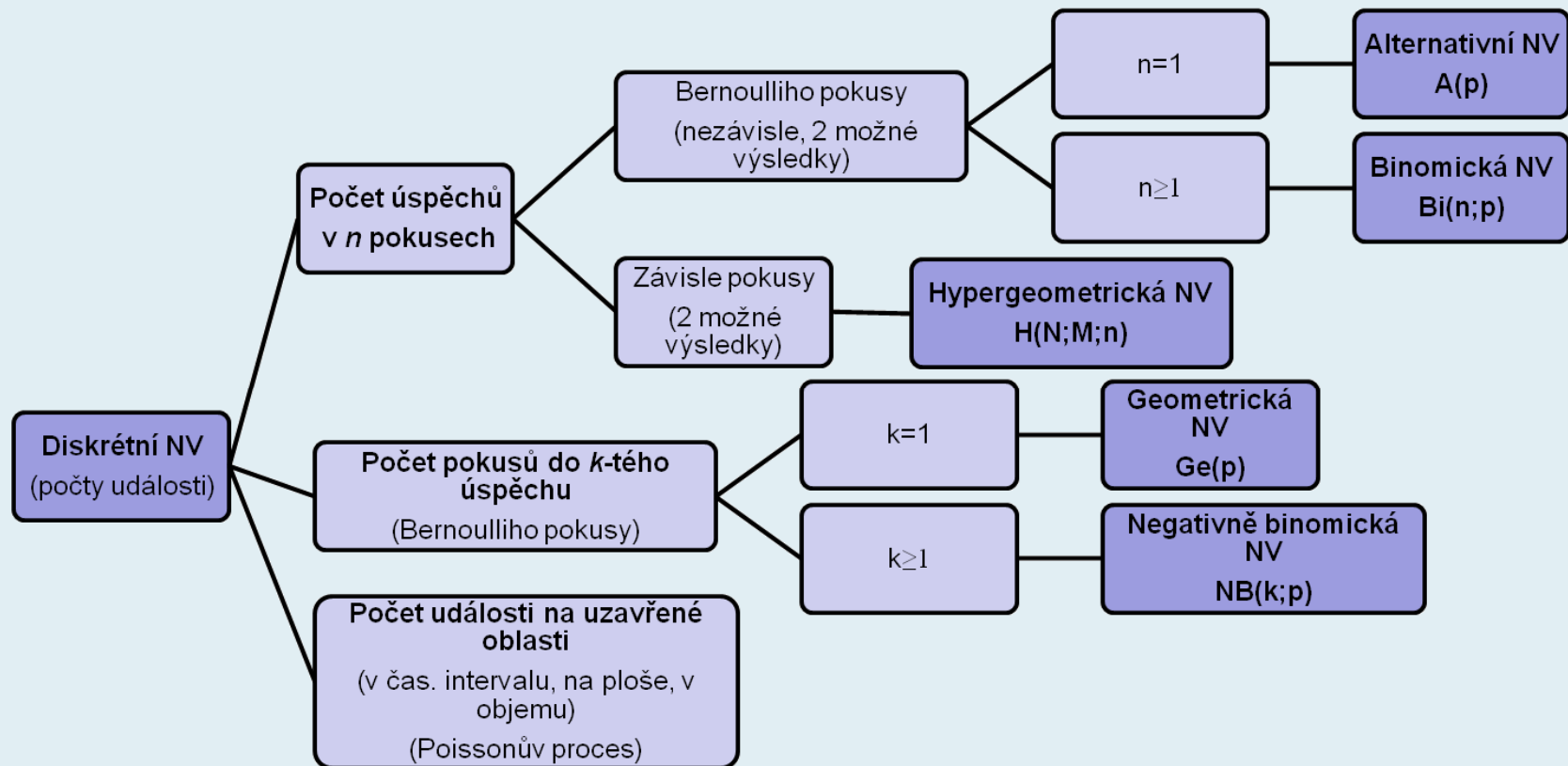
Geometrické rozdělení

- ❖ Pomocí geometrického rozdělení lze modelovat například
 - ❖ počet volání nutných k tomu, abychom se dovolali do televizní soutěže,
 - ❖ počet řidičů, kteří podstoupí test na obsah alkoholu v krvi do doby, než bude nalezen první podnapilý řidič, atd.

Geometrické rozdělení



Hledáme počet událostí na uzavřené oblasti (v čas. intervalu, na ploše, v objemu)



Poissonovo rozdělení

- ❖ Lze chápat jako zobecnění Bernoulliho posloupnosti pokusů.
- ❖ U tohoto procesu musí být dodrženy tři předpoklady:
 - ❖ rychlost výskytu událostí je konstantní v průběhu celého intervalu (popř. hustota výskytu je konstantní na vymezené ploše, tzn. události se nesmí někde nakupit)
 - ❖ jednotlivé události musí být nezávislé
 - ❖ pravděpodobnost výskytu více než jedné události v limitně krátkém časovém intervalu ($t \rightarrow 0$) je nulová (tzv. řídké jevy)
- ❖ Parametrem Poissonova procesu je **rychlost výskytu události** (hustota výskytu události na ploše, resp. v objemu), kterou značíme λ . Rychlost výskytu události je úměrná pravděpodobnosti výskytu jedné události za jednotku času (na jednotce plochy, resp. v jednotce objemu).

Poissonovo rozdělení

X ... počet výskytu události v časovém intervalu délky t
nebo
počet výskytu události na ploše t (v objemu t),

Označení: $X \rightarrow Po(\lambda t)$

Pravděpodobnostní funkce Poissonovy náhodné veličiny udává, jaká je pravděpodobnost, že v časovém intervalu délky t (na ploše t , v objemu t) dojde ke k událostem:

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

4. Předpokládejme, že realitní makléř jedná v průměru se 150 zákazníky za měsíc (30 dnů). Zjistěte jaká je pravděpodobnost, že počet zákazníků za jeden den bude
- a) právě 4,
 - b) více než 6,
 - c) určete střední hodnotu a směrodatnou odchylku počtu těchto jednání během jednoho dne.

Řešení:

a) právě 4 jednání za den

X ... počet jednání během jednoho dne

Parametr λt určíme jako průměrný počet výskytu jednání během jednoho dne

$$t = 1 \text{ den} \quad \Rightarrow \quad (\lambda t) = \frac{150}{30} = 5 \quad \Rightarrow \quad X \rightarrow Po(5)$$

$$P(X = 4) = \frac{(5)^4 e^{-5}}{4!} = \underline{\underline{0,176}}$$

Pravděpodobnost, že realitní makléř bude jednat za jeden den právě se 4 zákazníky je 17,6 %.

Řešení:

b) více než 6 jednání za den

X ... počet jednání během jednoho dne

$$X \rightarrow Po(5)$$

Počítáme pomocí doplňku jevu:

$$\begin{aligned} P(X > 6) &= 1 - P(X \leq 6) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 6)] = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^6 \frac{(5)^k e^{-5}}{k!} = \underline{\underline{0,238}} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že realitní makléř bude jednat za jeden den s více než se 6 zákazníky je 23,8 %.

Řešení:

c) střední hodnotu a směrodatnou odchylku počtu jednání během jednoho dne

X ... počet jednání během jednoho dne

$$X \rightarrow Po(5)$$

Střední hodnota i rozptyl náhodné veličiny X jsou rovny jejímu parametru λt , směrodatná odchylka je rovna odmocnině z rozptylu.

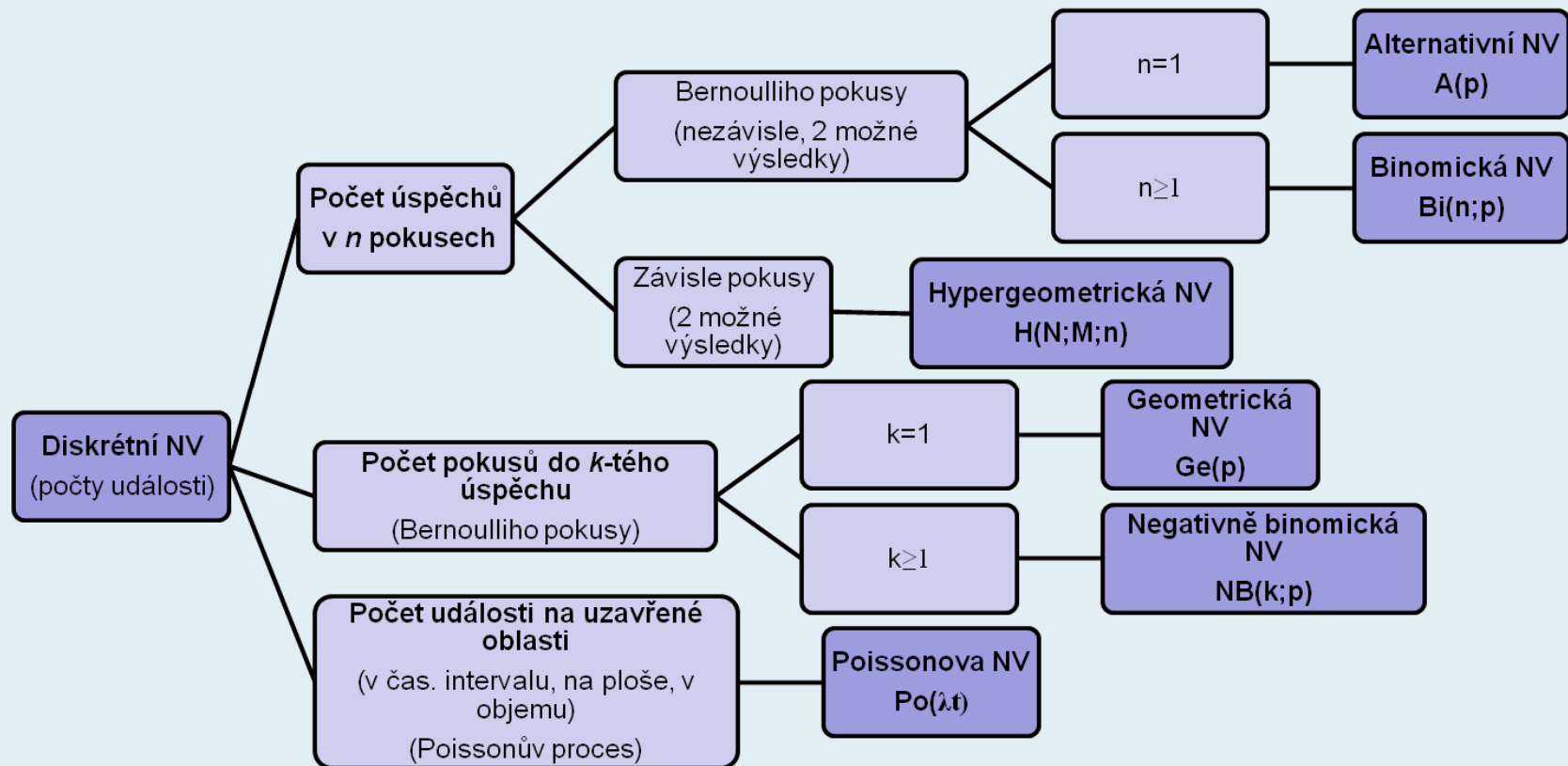
$$E(X) = D(X) = \lambda t = \underline{\underline{5}} \quad \sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5} = \underline{\underline{2,2}}$$

Realitní makléř jedná s $(5 \pm 2,2)$ zákazníky denně.

Poissonovo rozdělení

- ❖ Pomocí Poissonova rozdělení lze modelovat například
 - ❖ počet pacientů ošetřených během dopoledních ordinačních hodin,
 - ❖ počet mikrodefektů na zadaném vzorku materiálu,
 - ❖ počet mikroorganismů v 1 dl vody, atd.

Poissonovo rozdělení



Test

1. Určete pravdivost následujících tvrzení:
 - a) Rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny může být dáno výhradně pravděpodobnostní funkcí.
 - b) Posloupnost nezávislých pokusů majících pouze dva možné výsledky se stejnou pravděpodobností úspěchu nazýváme Bernoulliho pokusy.
 - c) Počet úspěchů v n pokusech lze popsat binomickou náhodnou veličinou.

1. Určete pravdivost následujících tvrzení:

-  a) Rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny může být dáno výhradně pravděpodobnostní funkcí.
Diskrétní rozdělení může být zadáno i distribuční funkcí
-  b) Posloupnost nezávislých pokusů majících pouze dva možné výsledky se stejnou pravděpodobností úspěchu nazýváme Bernoulliho pokusy.
-  c) Počet úspěchů v n pokusech lze popsat binomickou náhodnou veličinou.
Binomická NV popisuje pouze počet úspěchů v n **Bernoulliho** pokusech

1. Určete pravdivost následujících tvrzení:

- d) Geometrické rozdělení je speciálním případem negativně binomického rozdělení.
- e) Pascalovo rozdělení je pouze jiný název pro negativně binomické rozdělení.
- f) Jistý supermarket má otevřeno 24h denně. Počet zákazníků v supermarketu během otevírací doby lze popsat náhodnou veličinou s Poissonovým rozdělením.

1. Určete pravdivost následujících tvrzení:

- d) Geometrické rozdělení je speciálním případem negativně binomického rozdělení.
- e) Pascalovo rozdělení je pouze jiný název pro negativně binomické rozdělení.
- f) Jistý supermarket má otevřeno 24h denně. Počet zákazníků v supermarketu během otevírací doby lze popsat náhodnou veličinou s Poissonovým rozdělením.
Rychlost výskytu událostí **není** konstantní v průběhu 24h – existují špičky např. po skončení obvyklé pracovní doby

2. Charakterizujte rozdělení náhodné veličiny popisující

- a) počet studentů, kteří úspěšně ukončí kurz STA1 v tomto semestru (z minulých let víme, že pravděpodobnost, že student úspěšně dokončí kurz STA1 je 0,63; do kurzu je v tomto semestru přihlášeno 248 studentů),
- b) počet vadných mikroprocesorů na chipu (na chipu je průměrně 1 vadný mikroprocesor),
- c) počet hodů poctivou kostkou nutných k padnutí šestky,

2. Charakterizujte rozdělení náhodné veličiny popisující

- a) počet studentů, kteří úspěšně ukončí kurz STA1 v tomto semestru (z minulých let víme, že pravděpodobnost, že student úspěšně dokončí kurz STA1 je 0,63; do kurzu je v tomto semestru přihlášeno 248 studentů),

$$X \rightarrow Bi(248; 0,63)$$

- b) počet vadných mikroprocesorů na chipu (na chipu je průměrně 1 vadný mikroprocesor),

$$X \rightarrow Po(1)$$

- c) počet hodů poctivou kostkou nutných k padnutí šestky,

$$X \rightarrow G(1/6), \text{ nebo } X \rightarrow NB(1; 1/6),$$

2. Charakterizujte rozdělení náhodné veličiny popisující

- d) počet řidičů obsloužených na čerpací stanici za půl hodiny (během 1h je na čerpací stanici obslouženo průměrně 72 řidičů),
- e) počet řidičů obsloužených do chvíle, kdy 1. řidič ujede bez placení (průměrně ujíždí bez placení 1 z 50 řidičů),

2. Charakterizujte rozdělení náhodné veličiny popisující

- d) počet řidičů obsloužených na čerpací stanici za půl hodiny (během 1h je na čerpací stanici obslouženo průměrně 72 řidičů),
- e) počet řidičů obsloužených do chvíle, kdy 1. řidič ujede bez placení (průměrně ujíždí bez placení 1 z 50 řidičů),

$$X \rightarrow Po(36)$$

$$X \rightarrow G(1/50), \text{ nebo } X \rightarrow NB(1; 1/50),$$

2. Charakterizujte rozdělení náhodné veličiny popisující

- f) počet týdnů v roce (52 týdnů), v nichž neujede žádný řidič z čerpací stanice bez placení (během týdne je na čerpací stanici obslouženo průměrně 4 000 řidičů, z nichž cca 2% ujedou bez placení),
- g) počet dnů do chvíle, kdy 4. řidič ujede bez placení (průměrně ujíždí bez placení 1 z 50 řidičů).

2. Charakterizujte rozdělení náhodné veličiny popisující

- f) počet týdnů v roce (52 týdnů), v nichž neujezdí žádný řidič z čerpací stanice bez placení (během týdne je na čerpací stanici obslouženo průměrně 4 000 řidičů, z nichž cca 2% ujedou bez placení),

$$X \rightarrow Bi(52;0)$$

Y ... počet řidičů, kteří ujedou bez zaplacení z 4000 $\Rightarrow Y \rightarrow Bi(4000;0,02)$

$$P(Y < 1) = 0$$

- g) počet dnů do chvíle, kdy 4. řidič ujezdí bez placení (průměrně ujíždí bez placení 1 z 50 řidičů).

$$X \rightarrow NB(4;1/50),$$