NÁHODNÝ VEKTOR

4. cvičení

Náhodný vektor

- **Náhodným vektorem** rozumíme sloupcový vektor $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ složený z náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$, který je charakterizován **sdruženým rozdělením pravděpodobnosti.**

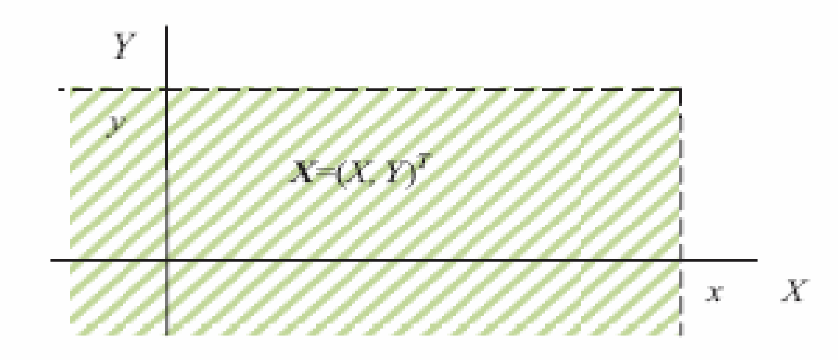
- Př. meteorologická data (teplota, tlak, rychlost a směr větru, …)
  lékařská data (výška, váha, věk, tlak, …)

Sdružené rozdělení pravděpodobnosti

- Rozdělení náhodného vektoru popisuje **sdružená distribuční funkce**
- Sdružená distribuční funkce dvourozměrného vektoru ***X***=(*X*,*Y*) je definována předpisem:

$$F(x,y) = P((X < x) \wedge (Y < y))$$

- Zkrácený zápis pro $P((X<x)\wedge(Y<y)) = P(X<x,Y<y)$



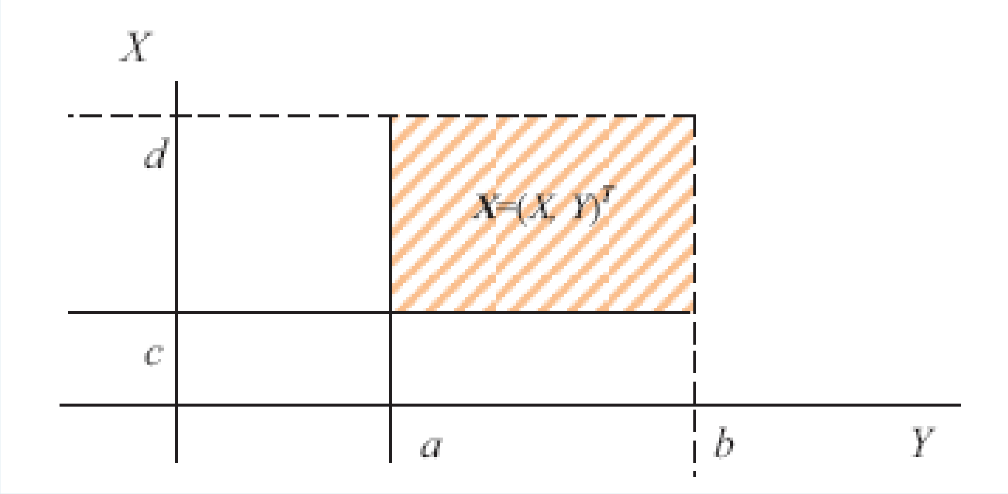
Hodnota sdružené distribuční funkce $F(x, y)$ je rovna pravděpodobnosti, s jakou se hodnota náhodného vektoru ***X*** = (*X*, *Y*) vyskytne ve vyšrafované části roviny

- Sdružená distribuční funkce má podobné vlastnosti jako distribuční funkce jedné proměnné.

Sdružené rozdělení pravděpodobnosti

- Pravděpodobnost, že náhodný vektor je z obdélníkové oblasti, lze vyjádřit pomocí distribuční funkce.

$$P(a \le X < b, c \le Y < d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$



Diskrétní dvourozměrný náhodný vektor

- Náhodný vektor má diskrétní rozdělení jestliže existuje nejvýše spočetně mnoho hodnot náhodného vektoru tak, že:

$$\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$$

- Funkce $p(x_i,y_j) = P(X=x_i,Y=y_j)$ je **sdružená (simultánní) pravděpodobnostní funkce**

- Pro vyjádření **sdružené distribuční funkce** pomocí sdružené pravděpodobnostní funkce lze využít vztah

$$F(x,y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_j<y} p(x_i, y_j)$$

Tabulka sdružených pravděpodobností

- Reprezentuje sdruženou pravděpodobnost diskrétního dvousložkového náhodného vektoru s konečným počtem hodnot

X / Y	y_1	y_2	…	y_{n2}
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	…	$p(x_1,y_{n2})$
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	…	$p(x_2,y_{n2})$
…	…	…	…	…
x_{n1}	$p(x_{n1},y_1)$	$p(x_{n1},y_2)$	…	$p(x_{n1}, y_{n2})$

1. Pravděpodobnost, že při přenosu digitální informace dojde k silné, resp. střední, resp. žádné, deformaci bitu je 0,1; 0,3 a 0,6. Předpokládejme, že jsou přeneseny dva bity a rozsah deformace je pro každý bit nezávislý. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2]$ udává počet bitů se silnou (X_1) a střední (X_2) deformací.

   Sestavte

   a) sdruženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$,

   b) sdruženou distribuční funkci náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Řešení:

a) všechny možné výsledky:

[0 , 0] => $P(X_1=0, X_2=0) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$

deformován může být první, nebo druhý bit

[0 , 1] => $P(X_1=0, X_2=1) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$

[0 , 2] => $P(X_1=0, X_2=2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

[1 , 0] => $P(X_1=1, X_2=0) = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$

[1 , 1] => $P(X_1=1, X_2=1) = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

[2 , 0] => $P(X_1=2, X_2=0) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$

počet bitů se silnou deformací

počet bitů se střední deformací

Zkouška: $0{,}36+0{,}36+0{,}09+0{,}12+0{,}06+0{,}01 = 1$

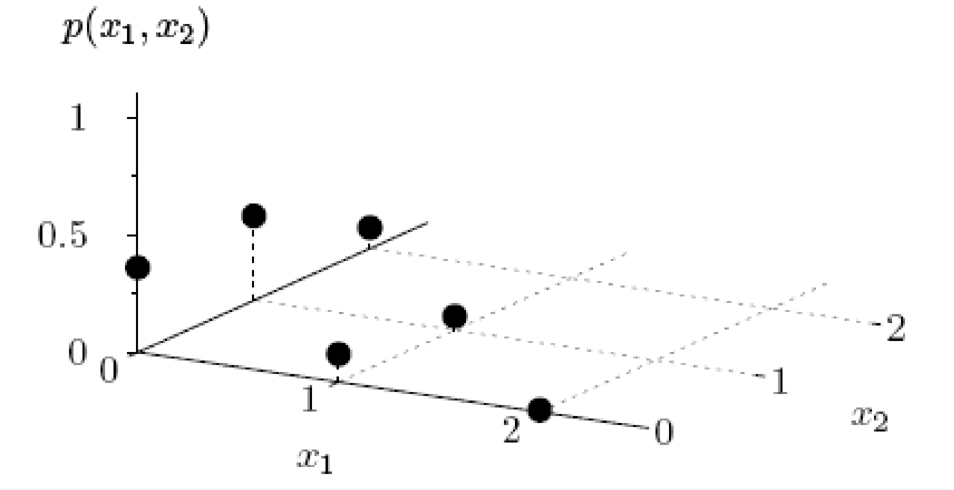
Řešení:

a)

Tabulka sdružených pravděpodobností:

X_2 / X_1	0	1	2
0	0,36	0,12	0,01
1	0,36	0,06	0
2	0,09	0	0

Graf pravděpodobnostní funkce:



Řešení:

b)

Sdruženou distribuční funkci určíme ze sdružené pravděpodobnostní funkce.

Výpočet sdružené distribuční funkce např. $F(1,5;0,5)$ => jsme na intervalu $\left(1,2\right\rangle \times \left(0,1\right\rangle$:

$$F(1{,}5;0{,}5) = P(X_1 < 1{,}5;\, X_2 < 0{,}5) =$$

$$P\left(\left(X_1 = 0 \vee (X_1 = 1)\right) \wedge (X_2 = 0)\right) =$$

$$= P\left((X_1 = 0 \wedge X_2 = 0) \vee (X_1 = 1 \wedge X_2 = 0)\right) =$$

$$= p(0{,}0) + p(1{,}0) = 0{,}36 + 0{,}12 = \underline{\underline{0{,}48}}$$

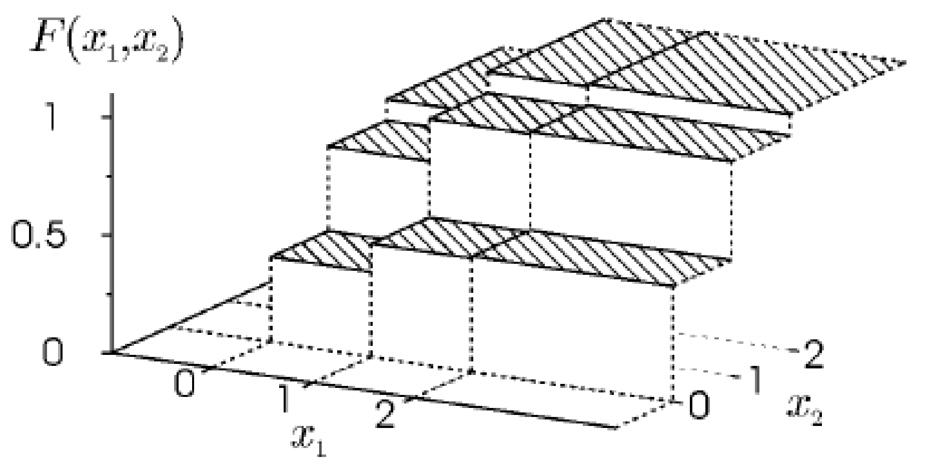
Řešení:

b)

distribuční funkce náhodného vektoru ***X***:

X_2 / X_1	$(-\infty;0\rangle$	$(0;1\rangle$	$(1;2\rangle$	$(2;\infty)$
$(-\infty;0\rangle$	0	0	0	0
$(0;1\rangle$	0	0,36	0,48	0,49
$(1;2\rangle$	0	0,72	0,9	0,91
$(2;\infty)$	0	0,81	0,99	1

graf distribuční funkce náhodného vektoru ***X***:



Marginální rozdělení pravděpodobnosti

- Určuje rozdělení jednotlivých složek (náhodných veličin X a Y) náhodného vektoru (X,Y)
- Marginální pravděpodobnostní funkce $P_x(x)$ a $P_y(y)$ **diskrétní** náhodné veličiny X a Y jsou určeny vztahy:

$$P_x(x_i) = \sum_{(y_j)} p(x_i, y_j), \quad i \geq 1$$

$$P_y(y_j) = \sum_{(x_i)} p(x_i, y_j), \quad j \geq 1$$

Marginální pravděpodobnosti DNV

- Jestliže zadáme sdruženou pravděpodobnostní funkci tabulkou, pak hodnoty jedné marginální pravděpodobnostní funkce získáme sečtením čísel v jednotlivých řádcích tabulky. Hodnoty této marginální pravděpodobnostní funkce zapisujeme do sloupce na okraji tabulky. Obdobně hodnoty druhé marginální pravděpodobnostní funkce dostaneme sečtením čísel v jednotlivých sloupcích tabulky. Hodnoty druhé marginální pravděpodobnostní funkce zapisujeme do řádku na okraji tabulky.

Rozšířená tabulka sdružených pravděpodobností

X / Y	y_1	y_2	...	y_{n2}	$P_X(x_i)$
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	...	$p(x_1, y_{n2})$	$P_X(x_1)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	...	$p(x_2, y_{n2})$	$P_X(x_2)$
...	...	...	...	...	...
x_{n1}	$p(x_{n1}, y_1)$	$p(x_{n1}, y_2)$	...	$p(x_{n1}, y_{n2})$	$P_X(x_{n1})$
$P_Y(y_j)$	$P_Y(y_1)$	$P_Y(y_2)$	...	$P_Y(y_{n2})$	1

- Modře zvýrazněné pole je kontrolní. Součet marginálních pravděpodobností, stejně jako součet sdružených pravděpodobností, musí být roven jedné.

2. Navážeme na příklad 1. Náhodný vektor ***X*** je popsán sdruženou pravděpodobnostní funkcí uvedenou v tabulce:

X_2 / X_1	0	1	2
0	0,36	0,12	0,01
1	0,36	0,06	0
2	0,09	0	0

Určete

a) marginální pravděpodobnosti $P_{X1}(x_1)$, $P_{X2}(x_2)$.

b) marginální distribuční funkce $F_{X1}(x_1)$, $F_{X2}(x_2)$.

Řešení:

a) Marginální rozdělení slouží k popisu jednotlivých složek náhodného vektoru.

Marginální pravděpodobnost $P_{X2}(x_2)$, tj. pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X_2 , získáme dosazením do vztahu:

$$P_{X_2}(x_2) = \sum_{(x_1)} p(x_1, x_2)$$

To odpovídá sečtení čísel v jednotlivých řádcích tabulky sdružené pravděpodobnosti. Např. $P_{X2}(0)=p(0,0)+p(0,1)+p(0,2)=0+0,36+0,12+0,01=0,49$.

X_2 / X_1	0	1	2	$P_{X2}(x_2)$
0	0,36	0,12	0,01	0,49
1	0,36	0,06	0	
2	0,09	0	0	

Řešení:

a)

X_2 / X_1	0	1	2	$P_{X2}(x_2)$
0	0,36	0,12	0,01	0,49
1	0,36	0,06	0	0,42
2	0,09	0	0	0,09
$P_{X1}(x_1)$	0,81	0,18	0,01	1

Řešení:

b) Marginální distribuční funkce nalezneme pomocí marginálních pravděpodobností => X_1 je diskrétní náhodná veličina popsána pravděpodobnostní funkcí $P_{X1}(x_{1i})$.

X_1	$P_{X1}(x_{1i})$
0	0,81
1	0,18
2	0,01

X_1	$F_{X1}(x_1)$
$(-\infty;0\rangle$	0
$(0;1\rangle$	0,81
$(1;2\rangle$	0,99
$(2;\infty)$	1

Analogicky pro $P_{X2}(x_{2j})$.

X_2	$PX2(x_{2j})$
0	0,49
1	0,42
2	0,09

X_2	$F_{X2}(x_2)$
$(-\infty;0\rangle$	0
$(0;1\rangle$	0,49
$(1;2\rangle$	0,91
$(2;\infty)$	1

Podmíněné rozdělení pravděpodobnosti

- Určuje rozdělení NV *X* za předpokladu, že NV *Y* nabyla hodnoty *y*.
- Chápeme jako podíl sdruženého a marginálního rozdělení pravděpodobnosti (má-li tento podíl smysl), v souladu s definicí podmíněné pravděpodobnosti.

Podmíněné rozdělení DNV

- Podmíněná pravděpodobnostní funkce:

$$P(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{P_Y(y)}, P_Y(y) \neq 0$$

$$P(y \mid x) = \frac{p(y, x)}{P_X(x)}, P_X(x) \neq 0$$

- Podmíněná distribuční funkce:

$$F(x \mid y) = \frac{\sum\limits_{x < x_i} p(x_i, y)}{P_Y(y)}, i \geq 1, P_Y(y) \neq 0$$

$$F(y \mid x) = \frac{\sum\limits_{y < y_j} p(x, y_j)}{P_X(x)}, j \geq 1 P_X(x) \neq 0$$

Nezávislost náhodných veličin

- Projevuje se tím, že jejich sdružená distribuční funkce (sdružená pravděpodobnostní funkce, resp. sdružená hustota pravděpodobnosti) se dá matematicky vyjádřit jako součin marginálních distribučních funkcí (marginálních pravděpodobnosti, resp. marginálních hustot pravděpodobnosti) jednotlivých náhodných veličin.
- Platí, že složky *X*, *Y* náhodného vektoru jsou nezávislé právě když platí:
  - DNV: $P(X = x_i, Y = y_j) = P_X(X = x_i) \cdot P_Y(Y = y_j)$

3. Nechť ***X*** je náhodný vektor, s nímž jsme pracovali v příkladech 1 a 2.
Rozdělení tohoto náhodného vektoru (sdružená a marginální pravděpodobnostní funkce) je uvedeno v následující tabulce.

X_2 / X_1	0	1	2	$P_{X2}(x_2)$
0	0,36	0,12	0,01	0,49
1	0,36	0,06	0	0,42
2	0,09	0	0	0,09
$P_{X1}(x_1)$	0,81	0,18	0,01	1

Určete

a) $P(x_1|x_2)$

b) zda jsou náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé

Řešení:

a)

$$P(x_1 \mid x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{P_{X_2}(x_2)}, P_{X_2}(x_2) \neq 0$$

Např. pravděpodobnost, že přijmeme jeden bit se silnou deformací (X_1 = 1), víme-li, že jsme nepřijali ani jeden bit se střední deformací (X_2 = 0):

$$P(X_1 = 1 \mid X_2 = 0) = \frac{p(1,0)}{P_{X_2}(0)} = \frac{0{,}12}{0{,}49} = \underline{\underline{0{,}245}}$$

Při výpočtu ostatních podmíněných pravděpodobností postupujeme stejným způsobem => $P(x_1|x_2)$:

X_2 / X_1	0	1	2
0	0,735	0,245	0,02
1	0,86	0,14	0
2	1	0	0

Řešení:

b)

Jsou-li náhodné veličiny X_1, X_2 nezávislé, pak 1 ≤ i ≤ 3, 1 ≤ j ≤ 3:

$$p(x_{1i}, x_{2j}) = P_{X_1}(x_{1i}) \cdot P_{x_2}(x_{2j})$$

Každá z hodnot sdružené pravděpodobnosti uvedené v rozšířené tabulce sdružených pravděpodobností by musela být rovna součinu příslušných marginálních pravděpodobností.

X_2 / X_1	0	1	2	$P_{X2}(x_2)$
0	0,36	0,12	0,01	0,49
1	0,36	0,06	0	0,42
2	0,09	0	0	0,09
$P_{X1}(x_1)$	0,81	0,18	0,01	1

Toto zcela zřejmě neplatí
(např.: 0 = $p(1, 2) \neq P_{X1}(1) \cdot P_{X2}(2) = 0{,}18 \cdot 0{,}09 = 0{,}0162$).

Řešení:

b)

Jsou-li náhodné veličiny X_1, X_2 nezávislé, pak 1 ≤ i ≤ 3, 1 ≤ j ≤ 3:

$$p(x_{1i}, x_{2j}) = P_{X_1}(x_{1i}) \cdot P_{x_2}(x_{2j})$$

Každá z hodnot sdružené pravděpodobnosti uvedené v rozšířené tabulce sdružených pravděpodobností by musela být rovna součinu příslušných marginálních pravděpodobností.

X_2 / X_1	0	1	2	$P_{X2}(x_2)$
0	0,36	0,12	0,01	0,49
1	0,36	0,06	0	0,42
2	0,09	0	0	0,09
$P_{X1}(x_1)$	0,81	0,18	0,01	1

Toto zcela zřejmě neplatí

(např.: 0 = $p(1, 2) \neq P_{X1}(1) \cdot P_{X2}(2) = 0{,}18 \cdot 0{,}09 = 0{,}0162$).

Náhodné veličiny X_1, X_2 proto nejsou nezávislé.

Marginální číselné charakteristiky NV

- Číselná charakteristika náhodného vektoru shrnuje celkovou informaci o náhodném vektoru do jednoho čísla, vektoru nebo matice.
- **Marginální číselné charakteristiky** - shrnují informaci o jednotlivých složkách náhodného vektoru (X,Y), poloha (střední hodnota), variabilita (rozptyl, směrodatná odchylka), šikmost, špičatost. Zapisujeme je ve formě vektoru:

$$E(X) = (E(X), E(Y))$$

$$D(X) = (D(X), D(Y))$$

Podmíněné číselné charakteristiky NV

- Popisují vlastnosti podmíněných rozdělení.
- Př. Máme dvourozměrný náhodný vektor náhodné veličiny X (nadmořská výška) a Y (teplota), může nás zajímat střední teplota a rozptyl teploty v nadmořské výšce 600 m.n.m., tj. $E(Y|X=600)$ a $D(Y|X=600)$.
- Podmíněné střední hodnoty:

$$E(X \mid Y = y) = E(X \mid y) = \sum_i x_i \cdot P(X_i \mid y), i \geq 1,$$

$$E(Y \mid X = x) = E(Y \mid x) = \sum_j y_j \cdot P(Y_j \mid x), j \geq 1,$$

- Podmíněné rozptyly:

$$D(X \mid Y = y) = D(X \mid y) = \sum_i (x_i - E(X \mid y))^2 \cdot P(X_i \mid y), i \geq 1,$$

$$D(Y \mid X = x) = D(Y \mid x) = \sum_j (y_j - E(Y \mid x))^2 \cdot P(Y_j \mid x), j \geq 1,$$

Kovariance

- **Kovariance** *cov*(*X*,*Y*) je nejjednodušší ukazatel vztahu mezi dvěma náhodnými veličinami.
- Definována jako smíšený centrální moment řádu (1 + 1)

$$cov(X,Y) = E\big(\big(X - E(X)\big)\cdot\big(Y - E(Y)\big)\big)$$

- Kladná hodnota kovariance znamená, že se zvětšením hodnoty *X* se pravděpodobně zvýší i hodnota *Y*. Oproti tomu záporná hodnota kovariance informuje o tom, že se zvětšením hodnoty *X* se pravděpodobně sníží hodnota *Y*.

Kovariance

- Výpočetní vztah umožňující rychlejší výpočet než vztah definiční:
$$cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$
- Nejdůležitější vlastnosti:
  - $cov(X,X)=D(X)$
  - jsou-li X, Y nezávislé náhodné veličiny, pak $cov(X,Y) = 0$
  - $cov(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1a_2cov(X,Y)$,
- V praxi se často setkáváme s kovarianční maticí:

$$var(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$$

Koeficient korelace

- **Korelační koeficient** $\rho(X,Y)$ je mírou **lineární** závislosti dvou složek náhodného vektoru.

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}, & D(X), D(Y) \neq 0 \\ 0, & \textit{jinak} \end{cases}$$

- Korelační matice:

$$cor(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(X,Y) & 1 \end{pmatrix}$$

Koeficient korelace - vlastnosti

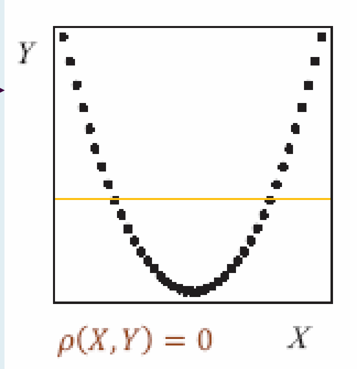
1) $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
2) $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$
3) $\rho(X,X) = 1$
4) jsou-li X, Y nezávislé náhodné veličiny, pak $\rho(X,Y) = 0$
5) je-li $\rho(X,Y) = 0$, říkáme, že X, Y jsou nekorelované náhodné veličiny
6) je-li $\rho(X,Y) = 1$, pak Y je lineární funkcí X (s rostoucím X roste Y)
7) je-li $\rho(X,Y) = -1$, pak Y je lineární funkcí X (s rostoucím X klesá Y)
8) je-li $\rho(X,Y) > 0$, říkáme, že X, Y jsou **pozitivně korelované** (s rostoucím X roste Y)
9) je-li $\rho(X,Y) < 0$, říkáme, že X, Y jsou **negativně korelované** (s rostoucím X klesá Y)

Koeficient korelace – výklad míry

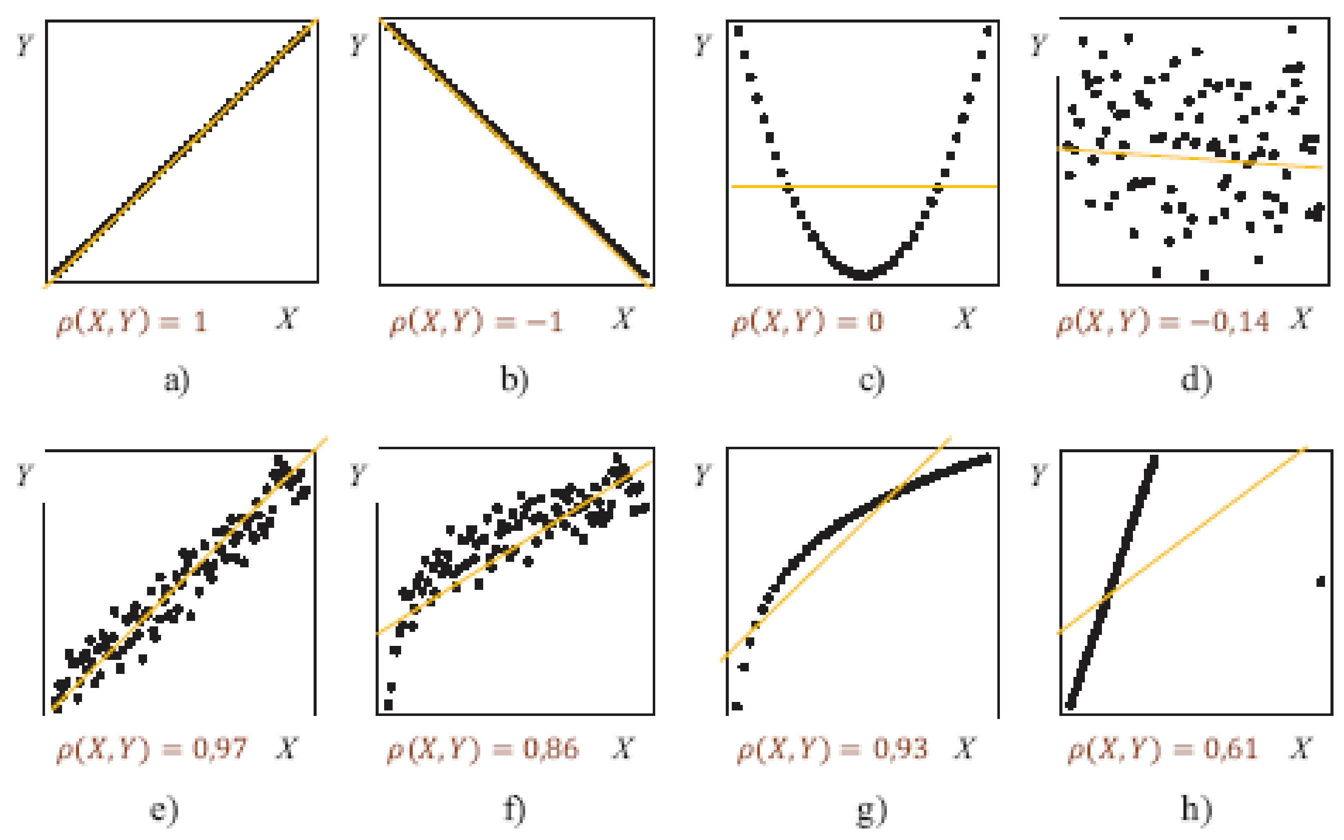
Typ korelace	$\lvert\rho\rvert$
Velmi slabá	0,00 - 0,09
Slabá	0,10 - 0,29
Střední	0,30 - 0,49
Silná	0,50 - 1,00

Výklad míry korelace – Cohen 1988

- jsou-li náhodné veličiny nekorelované, neznamená to, že jsou nezávislé,
- míru korelace musíme hodnotit v kontextu s modelovanou realitou,
- korelace neznamená nutně kauzalitu (příčinnou souvislost).



Koeficient korelace - vlastnosti



Souvislost mezi $\rho(X, Y)$ a závislostí náhodných veličin X, Y

4. Vrátíme se naposledy k příkladu 1. Náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ = (X_1,X_2) je popsán sdruženou pravděpodobnostní funkcí, známe jeho marginální pravděpodobnosti a v příkladu 3 jsme určili podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(x_1|x_2)$ Nyní určete:

a) $E(X_1)$, $E(X_2)$, $D(X_1)$, $D(X_2)$,

b) $E(\boldsymbol{X})$, $D(\boldsymbol{X})$,

c) $cov(X_1, X_2)$, $var(\boldsymbol{X})$, $\rho(X_1, X_2)$, $cor(\boldsymbol{X})$,

d) $E(X_1|X_2=1)$

Řešení:

a) $E(X_1)$, $E(X_2)$, $D(X_1)$, $D(X_2)$ jsou číselné charakteristiky náhodných veličin X_1 a X_2 (marginální charakteristiky vektoru $\boldsymbol{X}$). Pro jejich nalezení použijeme marginální pravděpodobnosti vektoru $\boldsymbol{X}$.

Tabulka pomocných výpočtů:

X_2 / X_1	0	1	2	$P_{X2}(x_2)$	$x_2 \cdot P_{X2}(x_2)$	$x^2{}_2 \cdot P_{X2}(x_2)$
0	0,36	0,12	0,01	0,49	0	0
1	0,36	0,06	0	0,42	0,42	0,42
2	0,09	0	0	0,09	0,18	0,36
$P_{X1}(x_1)$	0,81	0,18	0,01	1	0,6	0,78
$x_1 \cdot P_{X1}(x_1)$	0	0,18	0,02	0,2		
$x^2{}_1 \cdot P_{X1}(x_1)$	0	0,18	0,04	0,22		

Hodnoty uvedené ve žlutě zvýrazněných polích jsou rovny součtům hodnot v příslušných řádcích, resp. sloupcích.

Řešení:

a)

X_2 / X_1	0	1	2	$P_{X2}(x_2)$	$x_2 \cdot P_{X2}(x_2)$	$x_2^2 \cdot P_{X2}(x_2)$
0	0,36	0,12	0,01	0,49	0	0
1	0,36	0,06	0	0,42	0,42	0,42
2	0,09	0	0	0,09	0,18	0,36
$P_{X1}(x_1)$	0,81	0,18	0,01	1	0,6	0,78
$x_1 \cdot P_{X1}(x_1)$	0	0,18	0,02	0,2		
$x_1^2 \cdot P_{X1}(x_1)$	0	0,18	0,04	0,22		

$$E(X_1) = \sum_{i=1}^{3} x_{1i} \cdot P_{X_1}(x_{1i}) = 0 \cdot 0,81 + 1 \cdot 0,18 + 2 \cdot 0,01 = \underline{\underline{0,2}}$$

$$E(X_1^2) = \sum_{i=1}^{3} x_{1i}^2 \cdot P_{X_1}(x_{1i}) = 0^2 \cdot 0,81 + 1^2 \cdot 0,18 + 2^2 \cdot 0,01 = 0,22$$

$$D(X_1) = E(X_1^{\,2}) - (E(X_1))^2 = 0,22 - 0,2^2 = \underline{\underline{0,18}}$$

$$E(X_2) = \sum_{j=1}^{3} x_{2j} \cdot P_{X_2}(x_{2j}) = 0 \cdot 0,49 + 1 \cdot 0,42 + 2 \cdot 0,09 = \underline{\underline{0,6}}$$

$$E(X_2^2) = \sum_{j=1}^{3} x_{2j}^2 \cdot P_{X_2}(x_{2j}) = 0^2 \cdot 0,49 + 1^2 \cdot 0,42 + 2^2 \cdot 0,09 = 0,78$$

$$D(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = 0,78 - 0,6^2 = \underline{\underline{0,42}}$$

Řešení:

b)

$$E(X) = (E(X_1), E(X_2)) = (0,2; 0,6)$$

$$D(X) = (D(X_1), D(X_2)) = (0,18; 0,42)$$

Řešení:

c) Použijeme výpočetní vztah

$$cov(X_1,X_2) = E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2)$$

$$E(X_1 \cdot X_2) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{1i} \cdot x_{2j} \cdot p(x_{1i}, x_{2j}) = 0 \cdot 0 \cdot 0{,}36 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}12 +$$

$$0 \cdot 2 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}36 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}06 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0{,}09 +$$

$$2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 0{,}06$$

$$cov(X_1,X_2) = 0{,}06 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = \underline{\underline{-0{,}06}}$$

$$cov(X_1,X_2) = cov(X_2, X_1)$$

$$var(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} D(X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{cov}(X_2, X_1) & D(X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}18 & -0{,}06 \\ -0{,}06 & 0{,}42 \end{pmatrix}$$

Řešení:

c) Pomocí kovarianční matice určíme korelační koeficient a tím i korelační matici.

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1) \cdot D(X_2)}} = \frac{-0{,}06}{\sqrt{0{,}18 \cdot 0{,}42}} = \underline{\underline{-0{,}218}}$$

$$cor(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1, X_2) \\ \rho(X_2, X_1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}218 \\ -0{,}218 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

d) Pro výpočet $E(X_1|X_2=1)$ potřebujeme znát podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(x_1|x_2)$:

X_2 / X_1	0	1	2
0	0,735	0,245	0,02
1	0,86	0,14	0
2	1	0	0

$$E(X_1 \mid X_2 = 1) = \sum_{i=1}^{3} x_{1i} \cdot P(x_{1i} \mid X_2 = 1) =$$

$$= 0 \cdot 0{,}86 + 1 \cdot 0{,}14 + 2 \cdot 0 = \underline{\underline{0{,}14}}$$

Řešení příkladů ve Statgraphicsu

Studenti z jedné studijní skupiny byli na zkoušce z matematiky a fyziky (zkouska.sf3). Jejich výsledky jsou popsány náhodným vektorem $\boldsymbol{X}=(M,F)^T$.

M… známka z matematiky

F … známka z fyziky

Určete

a) Sdruženou a marginální pravděpodobnostní funkce

b) $P(M=2, F=3)$, $P(M=2| F=3)$, $F(2;3)$, $F_M(2,3)$, $P(M<3,F>2)$

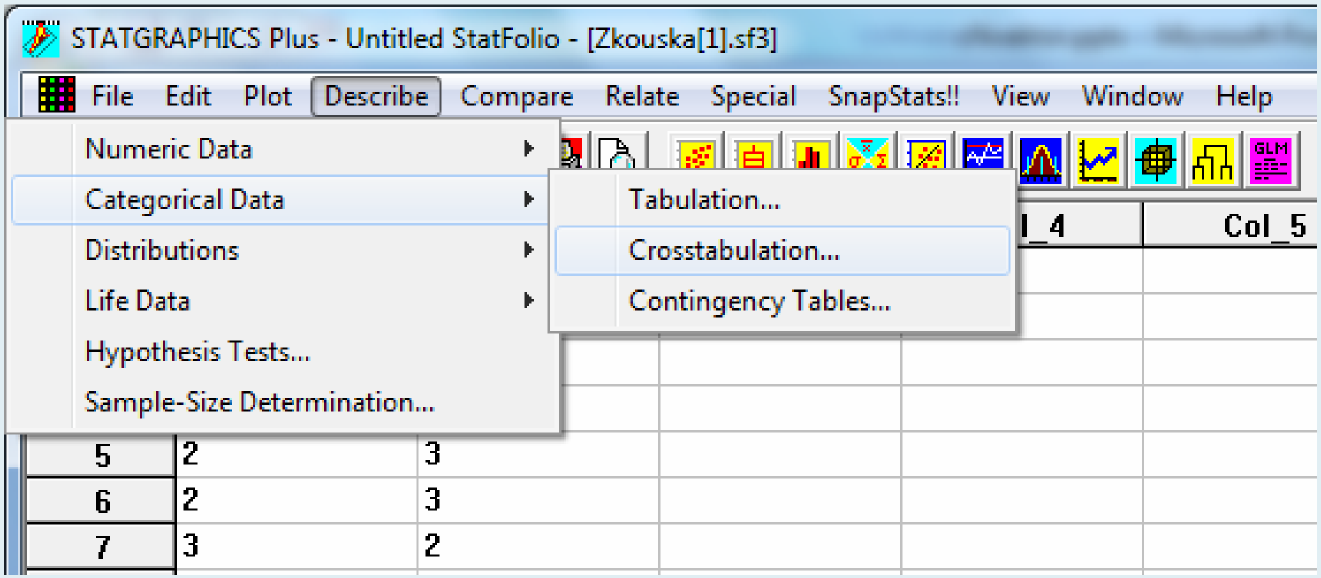
c) střední hodnoty, rozptyly a směrodatné odchylky náhodných veličin M a F

d) $cov(M,F)$

e) $\rho(M,F)$

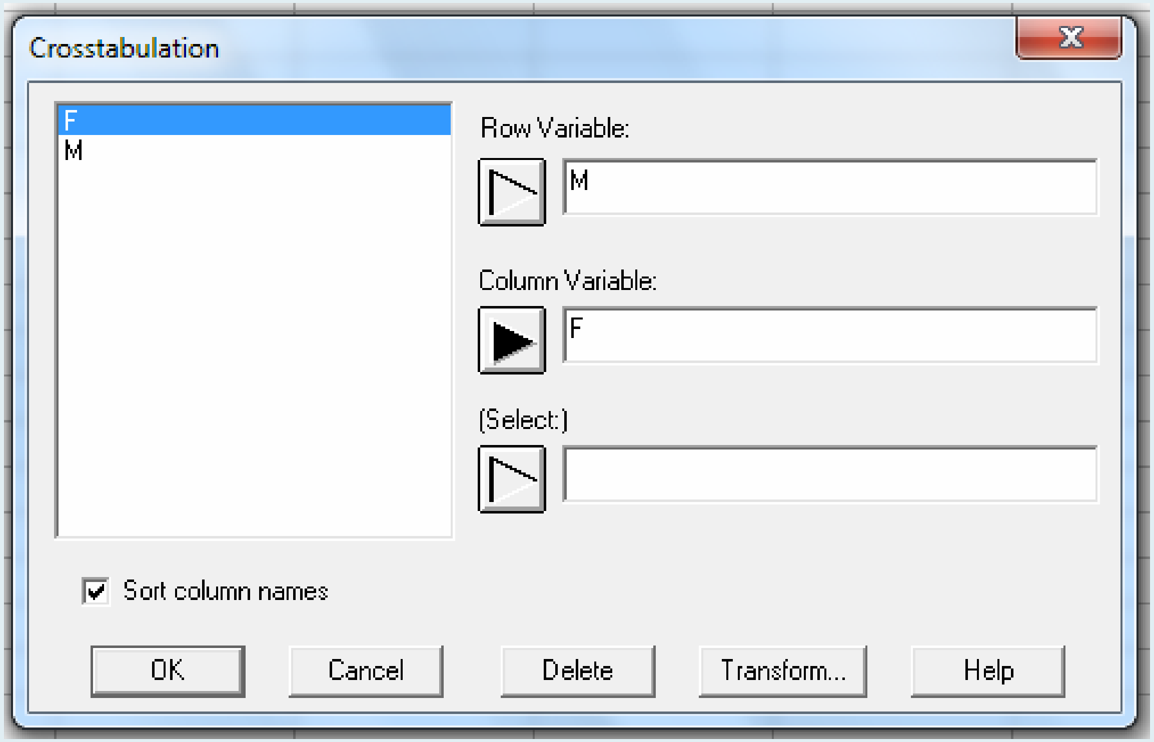
Řešení:

a) Sdruženou a marginální pravděpodobnostní funkce



Řešení:

a) Sdruženou a marginální pravděpodobnostní funkce



Řešení:

a) Sdruženou a marginální pravděpodobnostní funkce

Frequency Table for M by F

	1	2	3	4	Row Total
1	1 5,00%	1 5,00%	1 5,00%	0 0,00%	3 15,00%
2	0 0,00%	1 5,00%	2 10,00%	0 0,00%	3 15,00%
3	0 0,00%	2 10,00%	5 25,00%	2 10,00%	9 45,00%
4	0 0,00%	0 0,00%	2 10,00%	3 15,00%	5 25,00%
Column Total	1 5,00%	4 20,00%	10 50,00%	5 25,00%	20 100,00%

p(m,f)

Řešení:

a) Sdruženou a marginální pravděpodobnostní funkce

Frequency Table for M by F

	1	2	3	4	Row Total
1	1 5,00%	1 5,00%	1 5,00%	0 0,00%	3 15,00%
2	0 0,00%	1 5,00%	2 10,00%	0 0,00%	3 15,00%
3	0 0,00%	2 10,00%	5 25,00%	2 10,00%	9 45,00%
4	0 0,00%	0 0,00%	2 10,00%	3 15,00%	5 25,00%
Column Total	1 5,00%	4 20,00%	10 50,00%	5 25,00%	20 100,00%

$P_F(f)$

Řešení:

a) Sdruženou a marginální pravděpodobnostní funkce

Frequency Table for M by F

	1	2	3	4	Row Total
1	1 5,00%	1 5,00%	1 5,00%	0 0,00%	3 15,00%
2	0 0,00%	1 5,00%	2 10,00%	0 0,00%	3 15,00%
3	0 0,00%	2 10,00%	5 25,00%	2 10,00%	9 45,00%
4	0 0,00%	0 0,00%	2 10,00%	3 15,00%	5 25,00%
Column Total	1 5,00%	4 20,00%	10 50,00%	5 25,00%	20 100,00%

$P_M(m)$

Řešení:

b) $P(M=2, F=3)$

Frequency Table for M by F

	1	2	3	4	Row Total
1	1 5,00%	1 5,00%	1 5,00%	0 0,00%	3 15,00%
2	0 0,00%	1 5,00%	2 10,00%	0 0,00%	3 15,00%
3	0 0,00%	2 10,00%	5 25,00%	2 10,00%	9 45,00%
4	0 0,00%	0 0,00%	2 10,00%	3 15,00%	5 25,00%
Column Total	1 5,00%	4 20,00%	10 50,00%	5 25,00%	20 100,00%

P(M=2, F=3)

Řešení:

b) $P(M=2|\ F=3)$

Frequency Table for M by F

	1	2	3	4	Row Total
1	1 5,00%	1 5,00%	1 5,00%	0 0,00%	3 15,00%
2	0 0,00%	1 5,00%	2 $\boxed{10,00\%}$	0 0,00%	3 15,00%
3	0 0,00%	2 10,00%	5 25,00%	2 10,00%	9 45,00%
4	0 0,00%	0 0,00%	2 10,00%	3 15,00%	5 25,00%
Column Total	1 5,00%	4 20,00%	10 $\boxed{50,00\%}$	5 25,00%	20 100,00%

$$P(M=2|\ F=3)=P(M=2,F=3)/P_F(3)=0,1/0,5=0,2$$

Řešení:

b) $F(2;3)$

Frequency Table for M by F

	1	2	3	4	Row Total
1	1 5,00%	1 5,00%	1 5,00%	0 0,00%	3 15,00%
2	0 0,00%	1 5,00%	2 10,00%	0 0,00%	3 15,00%
3	0 0,00%	2 10,00%	5 25,00%	2 10,00%	9 45,00%
4	0 0,00%	0 0,00%	2 10,00%	3 15,00%	5 25,00%
Column Total	1 5,00%	4 20,00%	10 50,00%	5 25,00%	20 100,00%

$$F(2;3)=P(M<2,F<3)=P(M=1,F=1)+P(M=1,F=2)=0{,}1$$

Řešení:

b) $F_M(2,3)$

Frequency Table for M by F

	1	2	3	4	Row Total
1	1 5,00%	1 5,00%	1 5,00%	0 0,00%	3 15,00%
2	0 0,00%	1 5,00%	2 10,00%	0 0,00%	3 15,00%
3	0 0,00%	2 10,00%	5 25,00%	2 10,00%	9 45,00%
4	0 0,00%	0 0,00%	2 10,00%	3 15,00%	5 25,00%
Column Total	1 5,00%	4 20,00%	10 50,00%	5 25,00%	20 100,00%

$$F_M(2,3)=P(M<2,3)=P_M(1)+P_M(2)=0,3$$

Řešení:

b) $P(M<3,F>2)$

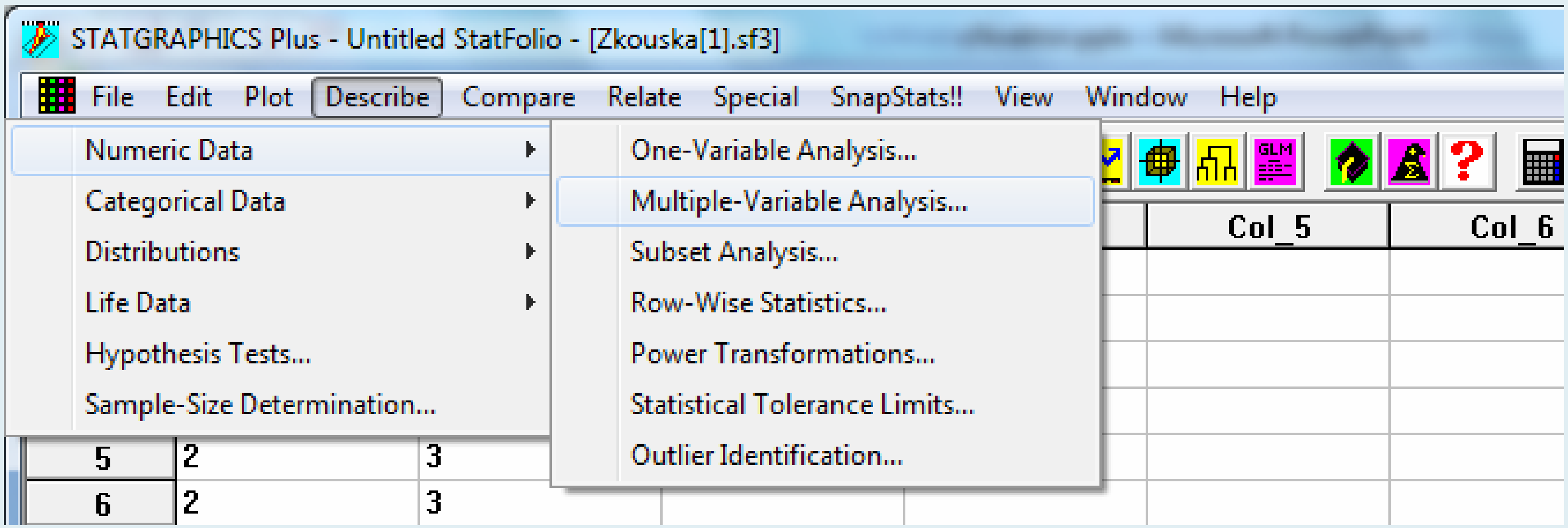
Frequency Table for M by F

	1	2	3	4	Row Total
1	1 5,00%	1 5,00%	1 5,00%	0 0,00%	3 15,00%
2	0 0,00%	1 5,00%	2 10,00%	0 0,00%	3 15,00%
3	0 0,00%	2 10,00%	5 25,00%	2 10,00%	9 45,00%
4	0 0,00%	0 0,00%	2 10,00%	3 15,00%	5 25,00%
Column Total	1 5,00%	4 20,00%	10 50,00%	5 25,00%	20 100,00%

$$P(M<3,F>2)=0,15$$

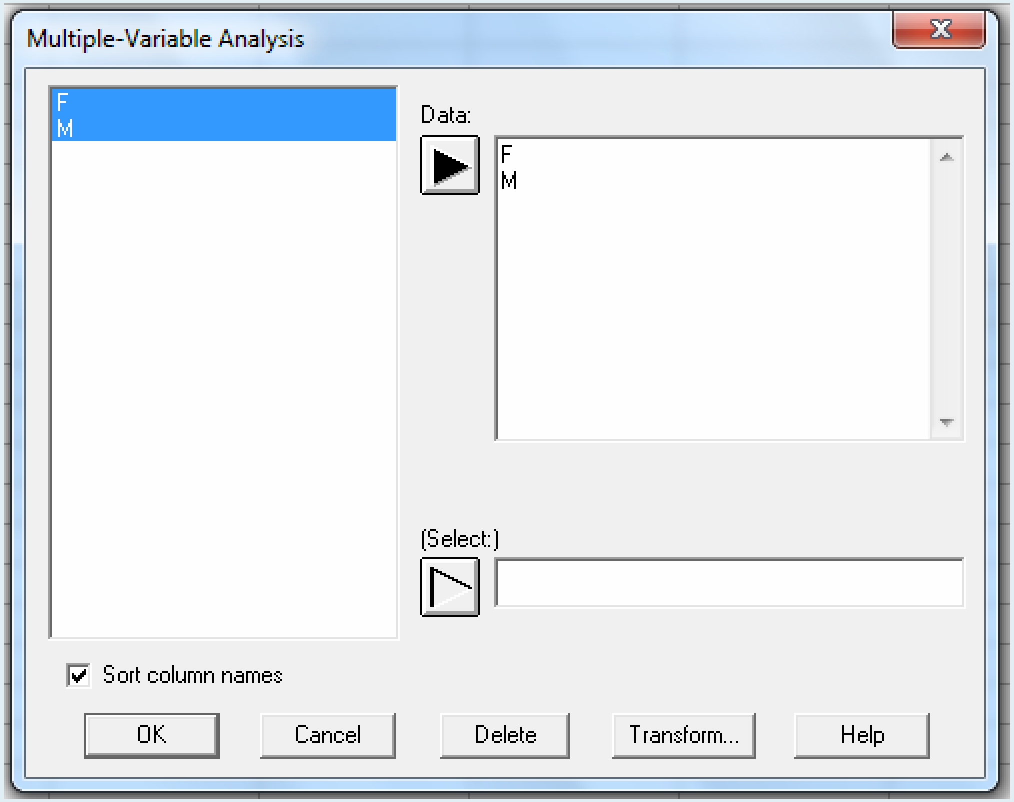
Řešení:

c) střední hodnoty, rozptyly a směrodatné odchylky náhodných veličin *M* a *F*



Řešení:

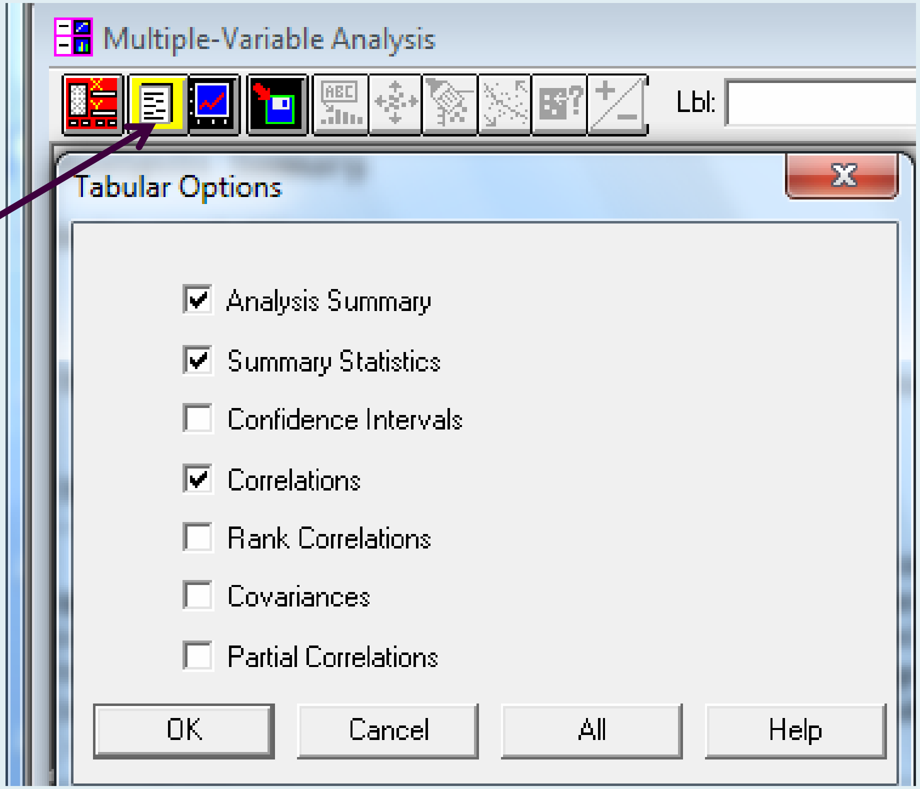
c) střední hodnoty, rozptyly a směrodatné odchylky náhodných veličin *M* a *F*



Řešení:

c) střední hodnoty, rozptyly a směrodatné odchylky náhodných veličin *M* a *F*

Tabular Options



Řešení:

c) střední hodnoty, rozptyly a směrodatné odchylky náhodných veličin *M* a *F*

Summary Statistics

	F	M
Count	20	20
Average	2,95	2,8
Median	3,0	3,0
Variance	0,681579	1,01053
Standard deviation	0,825578	1,00525
Minimum	1,0	1,0
Maximum	4,0	4,0
Lower quartile	2,5	2,0
Upper quartile	3,5	3,5

Řešení:

c) střední hodnoty, rozptyly a směrodatné odchylky náhodných veličin *M* a *F*

Summary Statistics

	F	M
Count	20	20
Average	2,95	2,8
Median	3,0	3,0
Variance	0,681579	1,01053
Standard deviation	0,825578	1,00525
Minimum	1,0	1,0
Maximum	4,0	4,0
Lower quartile	2,5	2,0
Upper quartile	3,5	3,5

Řešení:

c) střední hodnoty, rozptyly a směrodatné odchylky náhodných veličin *M* a *F*

Summary Statistics

	F	M
Count	20	20
Average	2,95	2,8
Median	3,0	3,0
Variance	0,681579	1,01053
Standard deviation	0,825578	1,00525
Minimum	1,0	1,0
Maximum	4,0	4,0
Lower quartile	2,5	2,0
Upper quartile	3,5	3,5

Řešení:

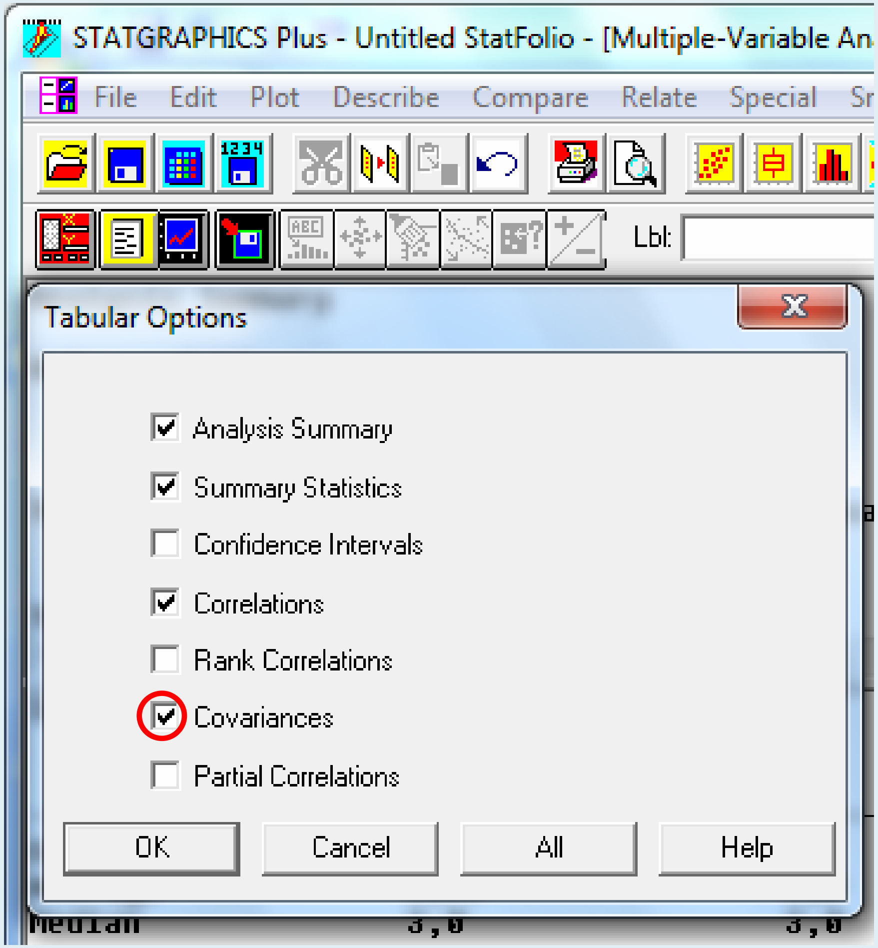
c) střední hodnoty, rozptyly a směrodatné odchylky náhodných veličin *M* a *F*

Summary Statistics

	F	M
Count	20	20
Average	2,95	2,8
Median	3,0	3,0
Variance	0,681579	1,01053
Standard deviation	0,825578	1,00525
Minimum	1,0	1,0
Maximum	4,0	4,0
Lower quartile	2,5	2,0
Upper quartile	3,5	3,5

Řešení:

d) $cov(M,F)$



Řešení:

d) $cov(M,F)$

Covariances

	F	M
F	0,681579 (20)	0,515789 (20)
M	0,515789 (20)	1,01053 (20)

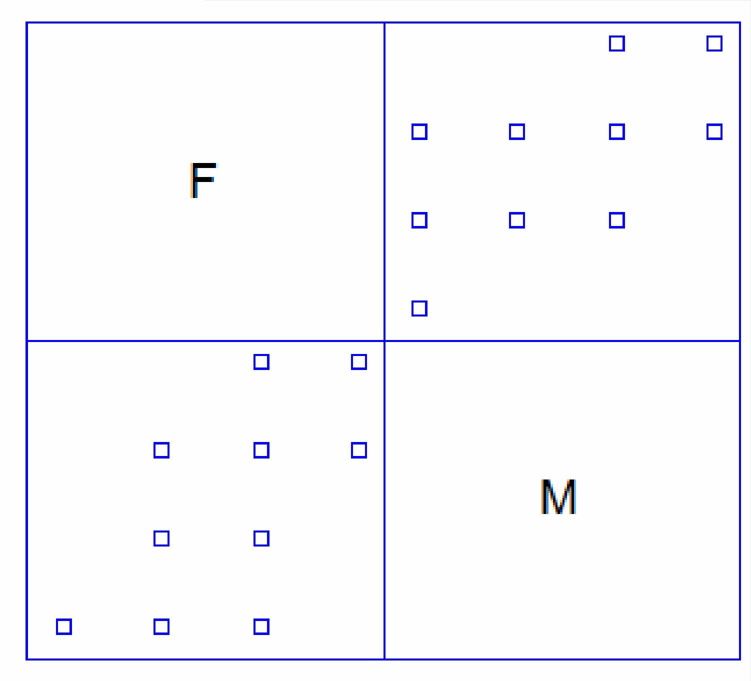
Řešení:

e) $\rho(M,F)$

```
Correlations

                    F                   M
-------------------------------------------------------
F                                        0,6215
                                        (    20)
                                         0,0034

M                    0,6215
                    (    20)
                     0,0034
-------------------------------------------------------
```



Statgraphics

NEUMOŽŇUJE

přímý výpočet podmíněného rozdělení a podmíněných charakteristik diskrétního náhodného vektoru !!!

Test

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

a) Náhodný vektor je definován jako dvourozměrný vektor, jehož složkami jsou náhodné veličiny.

b) Sdružené rozdělení popisuje rozdělení náhodného vektoru.

c) Marginální rozdělení popisuje rozdělení jednotlivých složek náhodného vektoru.

d) Je-li $\boldsymbol{X}=(X,Y)^{\mathrm{T}}$ náhodný vektor, pak $\mathrm{E}\boldsymbol{X}=\mathrm{E}(XY)$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

~~a)~~ Náhodný vektor je definován jako dvourozměrný vektor, jehož složkami jsou náhodné veličiny. (Náhodný vektor muže být i vícerozměrný)

b) Sdružené rozdělení popisuje rozdělení náhodného vektoru.

c) Marginální rozdělení popisuje rozdělení jednotlivých složek náhodného vektoru.

d) Je-li $\boldsymbol{X}=(X,Y)^T$ náhodný vektor, pak $E\boldsymbol{X}=E(XY)$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

a) Náhodný vektor je definován jako dvourozměrný vektor, jehož složkami jsou náhodné veličiny. (Náhodný vektor muže být i vícerozměrný)

b) Sdružené rozdělení popisuje rozdělení náhodného vektoru.

c) Marginální rozdělení popisuje rozdělení jednotlivých složek náhodného vektoru.

d) Je-li $\boldsymbol{X}=(X,Y)^{\mathrm{T}}$ náhodný vektor, pak $\mathrm{E}\boldsymbol{X}=\mathrm{E}(XY)$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

a) Náhodný vektor je definován jako dvourozměrný vektor, jehož složkami jsou náhodné veličiny. (Náhodný vektor muže být i vícerozměrný)

b) Sdružené rozdělení popisuje rozdělení náhodného vektoru.

c) Marginální rozdělení popisuje rozdělení jednotlivých složek náhodného vektoru.

d) Je-li $\boldsymbol{X}=(X,Y)^{T}$ náhodný vektor, pak $E\boldsymbol{X}=E(XY)$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

~~a)~~ Náhodný vektor je definován jako dvourozměrný vektor, jehož složkami jsou náhodné veličiny. (Náhodný vektor muže být i vícerozměrný)

b) Sdružené rozdělení popisuje rozdělení náhodného vektoru.

c) Marginální rozdělení popisuje rozdělení jednotlivých složek náhodného vektoru.

~~d)~~ Je-li $\boldsymbol{X}=(X,Y)^{\mathrm{T}}$ náhodný vektor, pak $\mathrm{E}\boldsymbol{X}=\mathrm{E}(XY)$.

$$E(X) = (E(X), E(Y))$$

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

e) $E(XY)=EX \cdot EY$

f) Marginální charakteristiky náhodného vektoru popisují vztah mezi náhodnými veličinami, které tvoří jeho složky.

g) Kovariance je mírou závislosti náhodných veličin.

h) Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

e) $E(XY) = EX \cdot EY$

f) Marginální charakteristiky náhodného vektoru popisují vztah mezi náhodnými veličinami, které tvoří jeho složky.

g) Kovariance je mírou závislosti náhodných veličin.

h) Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

e) $E(XY)=EX \cdot EY$

f) Marginální charakteristiky náhodného vektoru popisují vztah mezi náhodnými veličinami, které tvoří jeho složky. (Marginální charakteristiky náhodného vektoru popisují jednotlivé složky náhodného vektoru)

g) Kovariance je mírou závislosti náhodných veličin.

h) Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

e) $E(XY)=EX\cdot EY$

f) Marginální charakteristiky náhodného vektoru popisují vztah mezi náhodnými veličinami, které tvoří jeho složky. (Marginální charakteristiky náhodného vektoru popisují jednotlivé složky náhodného vektoru)

g) Kovariance je mírou závislosti náhodných veličin.

h) Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

~~e)~~ $E(XY)=EX \cdot EY$

~~f)~~ Marginální charakteristiky náhodného vektoru popisují vztah mezi náhodnými veličinami, které tvoří jeho složky. (Marginální charakteristiky náhodného vektoru popisují jednotlivé složky náhodného vektoru)

~~g)~~ Kovariance je mírou závislosti náhodných veličin.

~~h)~~ Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

(Je-li $cov(X, Y) = 0$, mohou, ale nemusí být náhodné veličiny X a Y nezávislé)

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

i) Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

j) Je-li $\rho(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

k) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nekorelované, jsou lineárně nezávislé.

l) $cov(X,X)=1$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

i) Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

j) Je-li $\rho(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

k) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nekorelované, jsou lineárně nezávislé.

l) $cov(X,X)=1$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

i) Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

j) Je-li $\rho(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

k) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nekorelované, jsou lineárně nezávislé.

l) $cov(X,X)=1$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

i) Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

j) Je-li $\rho(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

k) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nekorelované, jsou lineárně nezávislé.

l) $cov(X,X)=1$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

i) Je-li $cov(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

j) Je-li $\rho(X,Y)=0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.

k) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nekorelované, jsou lineárně nezávislé.

l) $cov(X,X)=1$. ($cov(X,X)=DX$)

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

m) $\rho(X,X)=1$

n) $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

m) $\rho(X,X)=1$

n) $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$.

Určete, zda jsou pravdivé následující výroky:

m) $\rho(X,X)=1$

n) $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$.