NÁHODNÁ VELIČINA

3. cvičení

Náhodná veličina

- **Náhodná veličina** – funkce, která každému výsledku náhodného pokusu přiřadí reálné číslo.

  Je to matematický model popisující více či méně dobře realitu, který vytváříme, jestliže chceme zpracovávat výsledky náhodného pokusu.

  Př. - počet vadných výrobků mezi tisíci výrobky
  - doba do poruchy žárovky
  - roční spotřeba energie v domácnosti
- **Hodnota náhodné veličiny** – výsledek náhodného pokusu vyjádřený reálným číslem

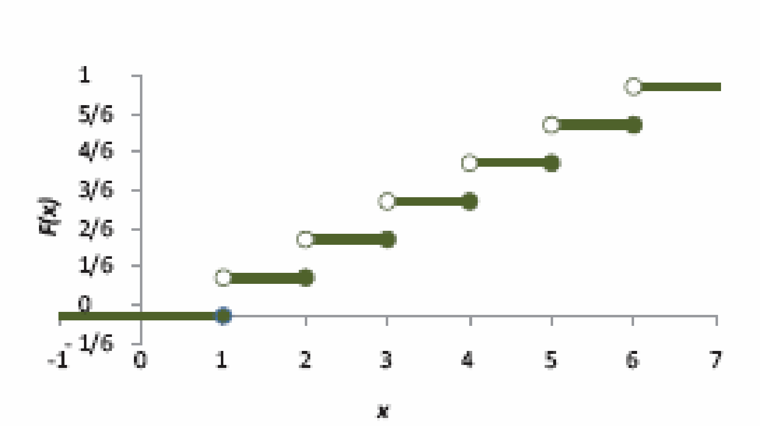
Rozdělení pravděpodobnosti

- = pravidlo, které každé hodnotě (nebo intervalu hodnot) přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty (nebo intervalu hodnot)
- jestliže známe rozdělení pravděpodobnosti, je náhodná veličina z pravděpodobnostního hlediska úplně popsána
- nejčastějším způsobem popisu rozdělení pravděpodobnosti je distribuční funkce

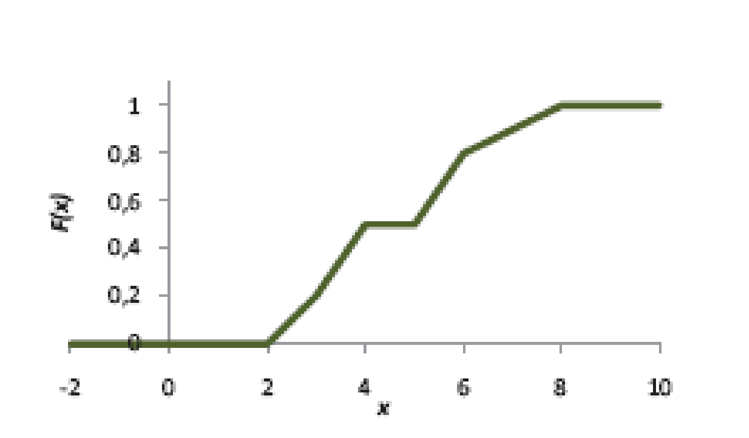
Distribuční funkce

- **ozn. *F*(*x*)**
- = reálná funkce, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než toto reálné číslo

$$F(x) \overset{def.}{=} P(X < x)$$



Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny



Distribuční funkce spojité náhodné veličiny

Distribuční funkce - vlastnosti

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$, tzn. $F(x)$ je neklesající

3. $\forall a \in R : \lim\limits_{x \to a-} F(x) = F(a)$, tzn. $F(x)$ je zleva spojitá

4. $F(x)$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, tzn. $F(x)$ „začíná“ v nule

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, tzn. $F(x)$ „končí“ v jedničce

Distribuční funkce a pravděpodobnost

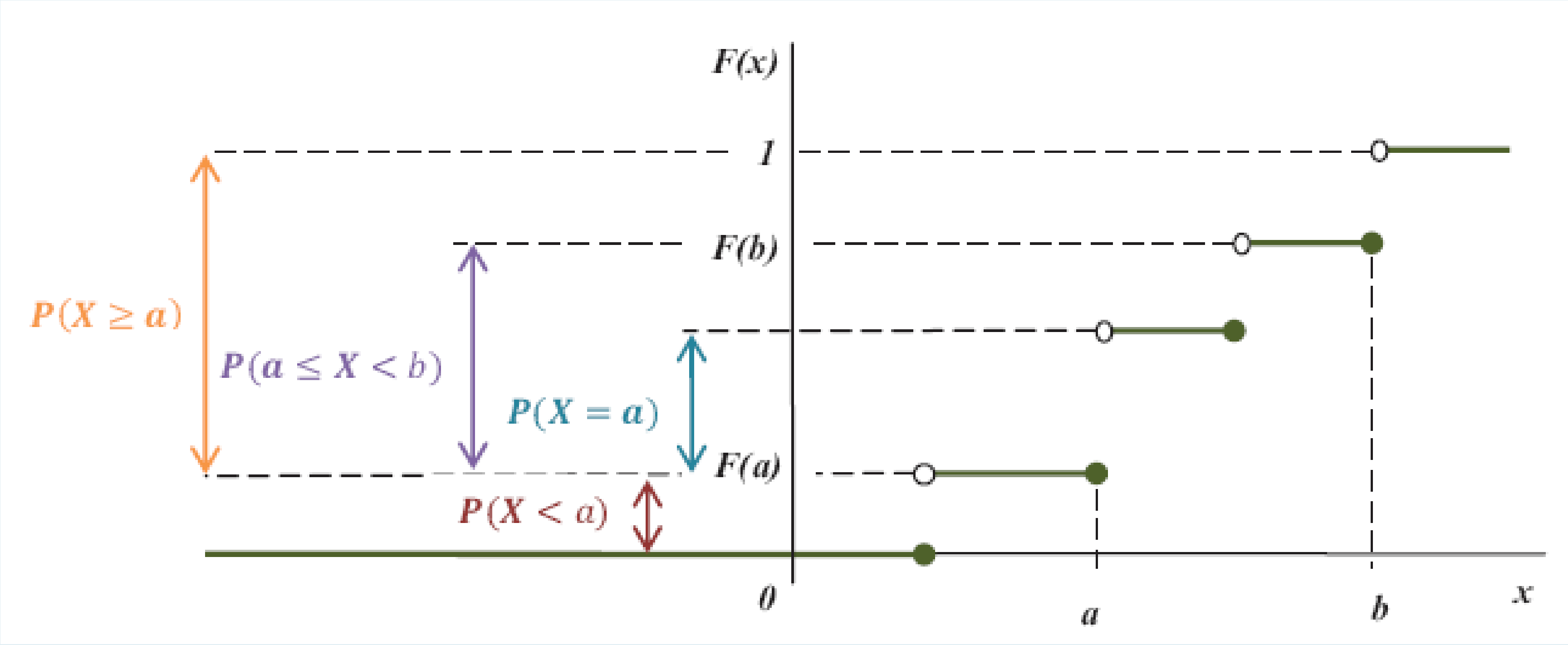
1. $P(X < a) = F(a), \quad \text{pro všechna } a \in R$

2. $P(X \geq a) = 1 - F(a), \quad \text{pro všechna } a \in R$

3. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a), \text{pro všechna } a, b \in R$

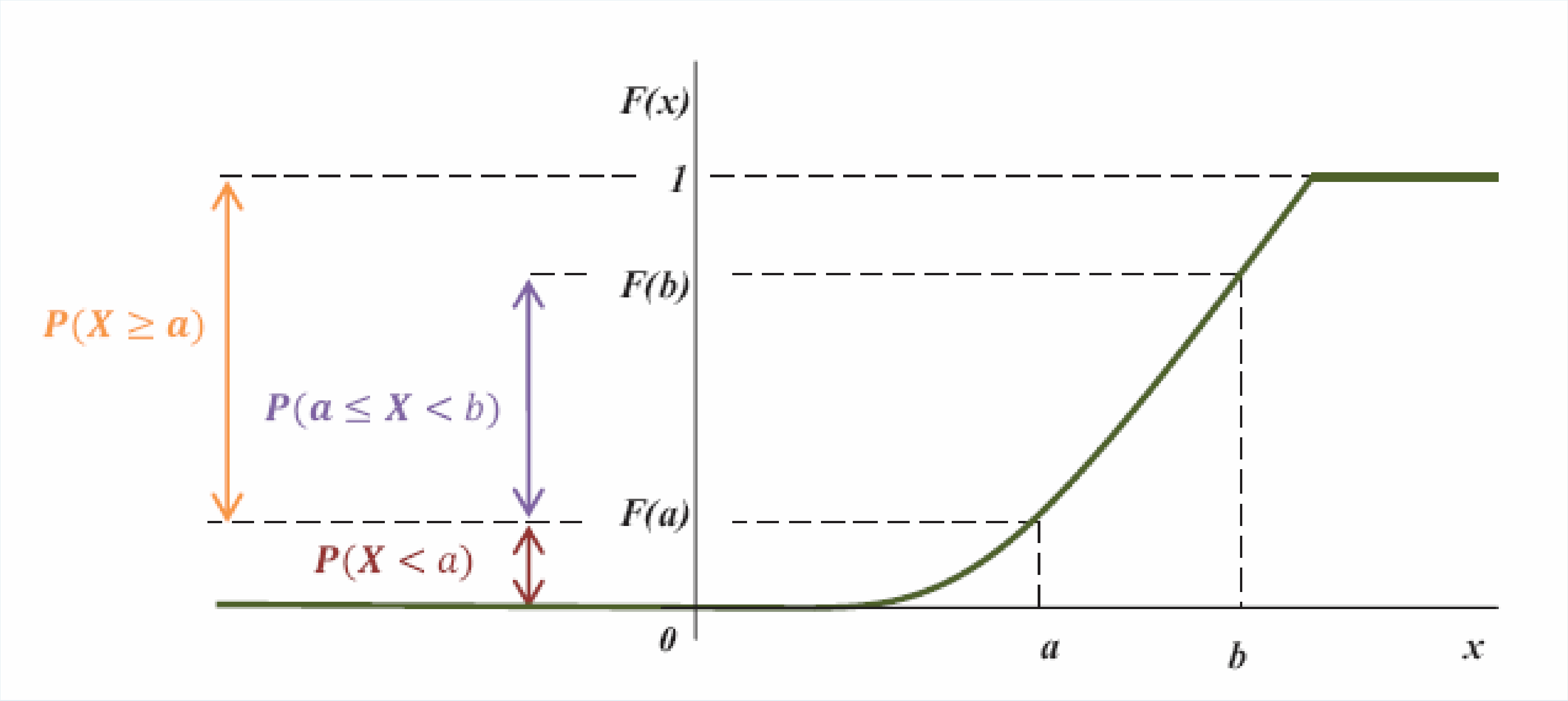
4. $P(X = a) = \lim\limits_{x \to a+} F(x) - F(a), \text{pro všechna } a, b \in R$

Distribuční funkce a pravděpodobnost



Vztah mezi pravděpodobností a distribuční funkcí diskrétní náhodné veličiny

Distribuční funkce a pravděpodobnost



Vztah mezi pravděpodobností a distribuční funkcí spojité náhodné veličiny

Diskrétní náhodná veličina

- Náhodná veličina X má **diskrétní rozdělení pravděpodobnosti** právě tehdy, když nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot tak, že:
  - $P(X = x_i) \geq 0$
  - $\sum_{(i)} P(X = x_i) = 1$

Funkce $P(X=x_i)=P(x_i)$ je **pravděpodobnostní funkce**, může být zadána:

- předpisem
- grafem
- tabulkou
- musíme dopočítat

Diskrétní náhodná veličina

- Distribuční funkci diskrétní náhodné veličiny můžeme vyjádřit pomocí pravděpodobnostní funkce jako

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i)$$

tzn. jako součet pravděpodobností těch x_i, které jsou menší než x.

Číselné charakteristiky diskrétní NV

- **střední hodnota** – forma váženého průměru možných hodnot s váhami odpovídajícími jejich pravděpodobnostem (≈ těžiště)

$$E(X) = \mu = \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i)$$

- **rozptyl** – určuje rozložení dat kolem střední hodnoty

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \longleftarrow \boxed{\text{výpočetní vztah}}$$

- **směrodatná odchylka** – odmocnina z rozptylu (kvůli jednotkám)

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

- **modus** – taková hodnota DNV, v níž $P(x_i)$ nabývá svého maxima

$$\hat{x}$$

1. Hodíme třikrát kostkou. Nechť náhodná veličina X znamená počet padnutí šestky.

   Určete:

   a) pravděpodobnostní funkci a její graf,
   b) distribuční funkci a její graf,
   c) pravděpodobnost jevu, že náhodná veličina X nabude kladných hodnot,
   d) střední hodnotu
   e) rozptyl a směrodatnou odchylku,
   f) modus

Řešení:

a) Ve třech hodech kostkou může šestka padnout 0-3 krát. Určíme pravděpodobnosti každého případu, který může nastat:

Označení: A … padla šestka => $\bar{A}$ … nepadla šestka

$P(A)=1/6$ $P(\bar{A})=5/6$

$$0:\ P(\bar{A}\cap\bar{A}\cap\bar{A}) \overset{\text{jevy jsou nezávislé}}{=} P(\bar{A})\cdot P(\bar{A})\cdot P(\bar{A}) = (5/6)\cdot(5/6)\cdot(5/6) = \underline{\underline{0{,}579}}$$

$$1:\ P(A\cap\bar{A}\cap\bar{A}) = P(A)\cdot P(\bar{A})\cdot P(\bar{A}) = (1/6)\cdot(5/6)\cdot(5/6) = 0{,}116$$

šestka může padnout v 1.,2. nebo 3. hodu =>

$$P(A\cap\bar{A}\cap\bar{A}) + P(\bar{A}\cap A\cap\bar{A}) + P(\bar{A}\cap\bar{A}\cap A) = 0{,}116\cdot P^{*}(1,2) =$$

$$= 0{,}116\cdot\frac{3!}{1!\,2!} = 0{,}116\cdot 3 = \underline{\underline{0{,}348}}$$

Řešení:

a)

2: $P(A \cap A \cap \overline{A}) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) = (1/6) \cdot (1/6) \cdot (5/6) = 0{,}023$

šestka může nepadnout v 1.,2. nebo 3. hodu =>

$$P(\overline{A} \cap A \cap A) + P(A \cap \overline{A} \cap A) + P(A \cap A \cap \overline{A}) = 0{,}023 \cdot P^{*}(2{,}1) =$$

$$= 0{,}023 \cdot \frac{3!}{2!\,1!} = 0{,}023 \cdot 3 = \underline{\underline{0{,}069}}$$

3: $P(A \cap A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = (1/6) \cdot (1/6) \cdot (1/6) = \underline{\underline{0{,}004}}$

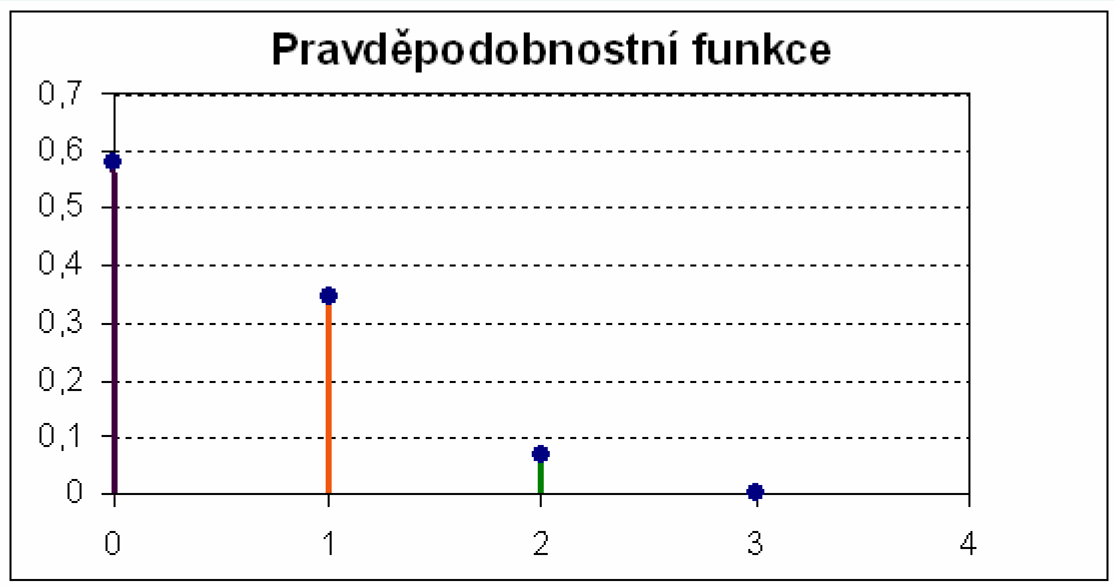
Zkouška:

$$\sum_{i=1}^{4} P\left(X = x_i\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 0{,}579 + 0{,}348 + 0{,}069 + 0{,}004 = 1$$

Řešení:

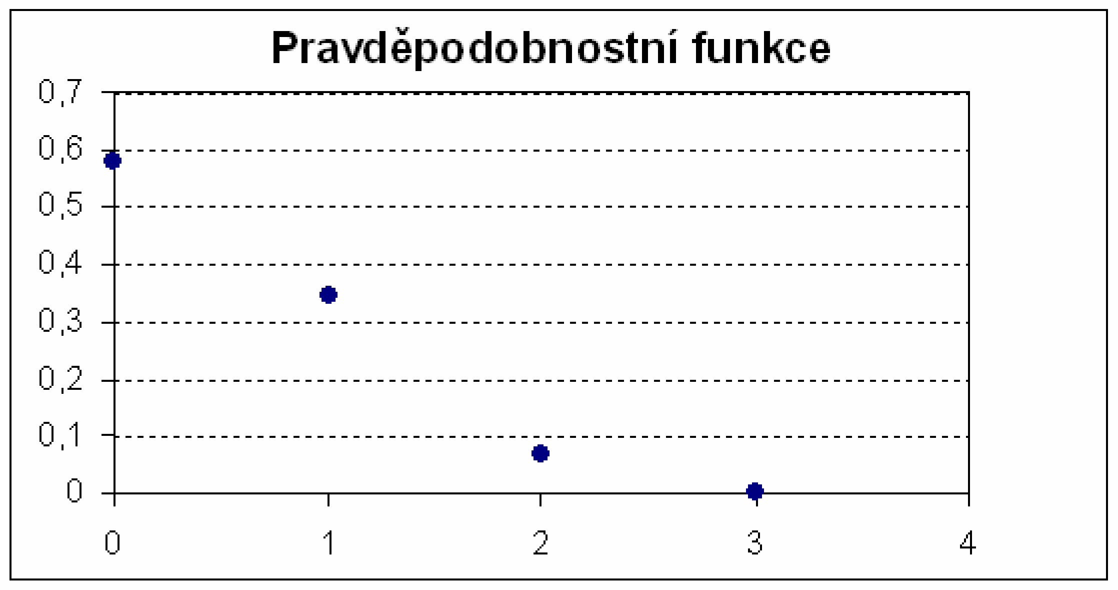
a)

x_i	$P(x_i)$
0	0,579
1	0,348
2	0,069
3	0,004



Řešení:

a)



Grafem pravděpodobnostní funkce je bodový graf. Pravděpodobnostní funkce je nulová ve všech bodech, které nepatří do základního prostoru: $\forall x \in R \setminus \Omega : P(x) = 0$, to z důvodu přehlednosti grafu nezakreslujeme.

Řešení:

b)

- Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny je „schodovitá“ funkce, která má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti v bodech, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová.
- „Velikosti skoku“ v bodech nespojitosti udávají hodnotu pravděpodobnosti v těchto bodech.
- Distribuční funkce je zleva spojitá.

Řešení:

b)

- Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny je „schodovitá“ funkce, která má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti v bodech, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová.
- „Velikosti skoku“ v bodech nespojitosti udávají hodnotu pravděpodobnosti v těchto bodech.
- Distribuční funkce je zleva spojitá.

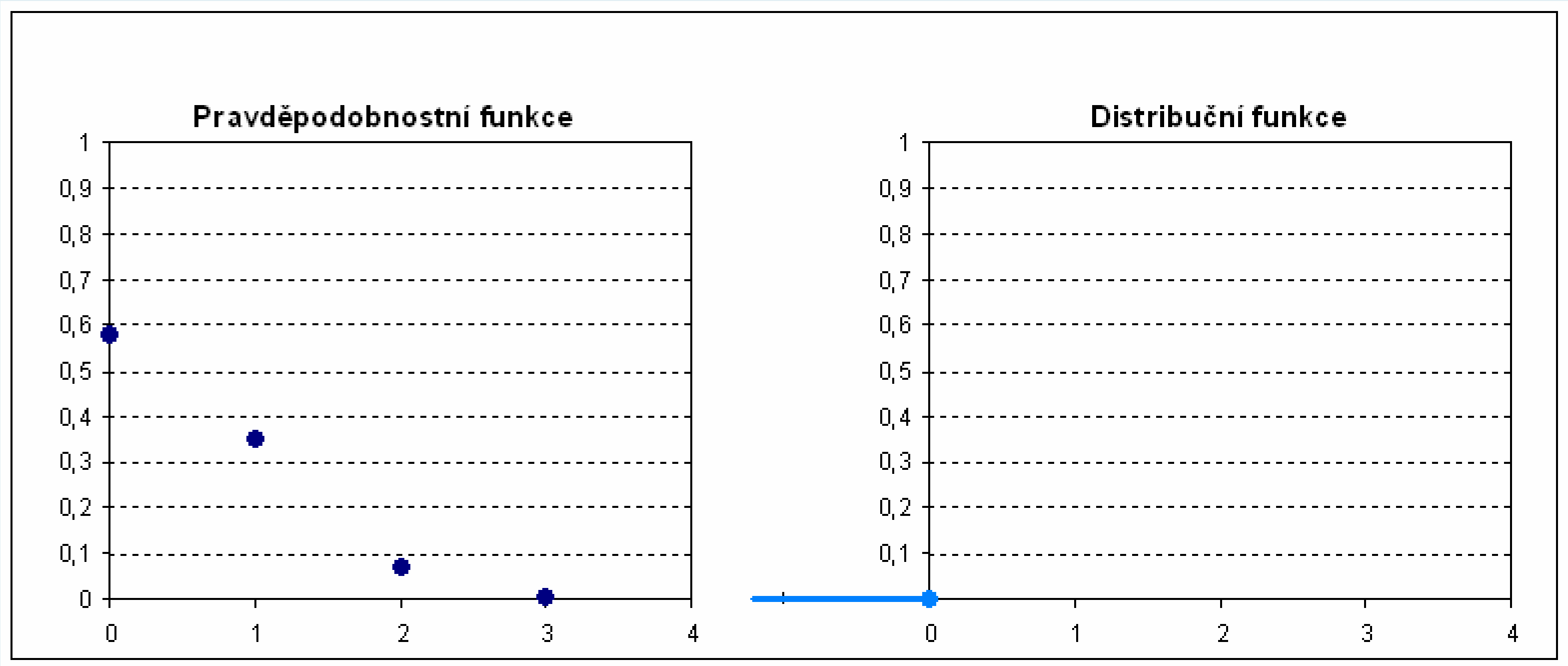
x_i	$P(x_i)$
0	**0,579**
1	**0,348**
2	**0,069**
3	**0,004**

$$\Rightarrow$$

x_i	$F(x_i)=P(X<x_i)$
$(-\infty;0\rangle$	
$(0;1\rangle$	
$(1;2\rangle$	
$(2;3\rangle$	
$(3;\infty)$	

Řešení:

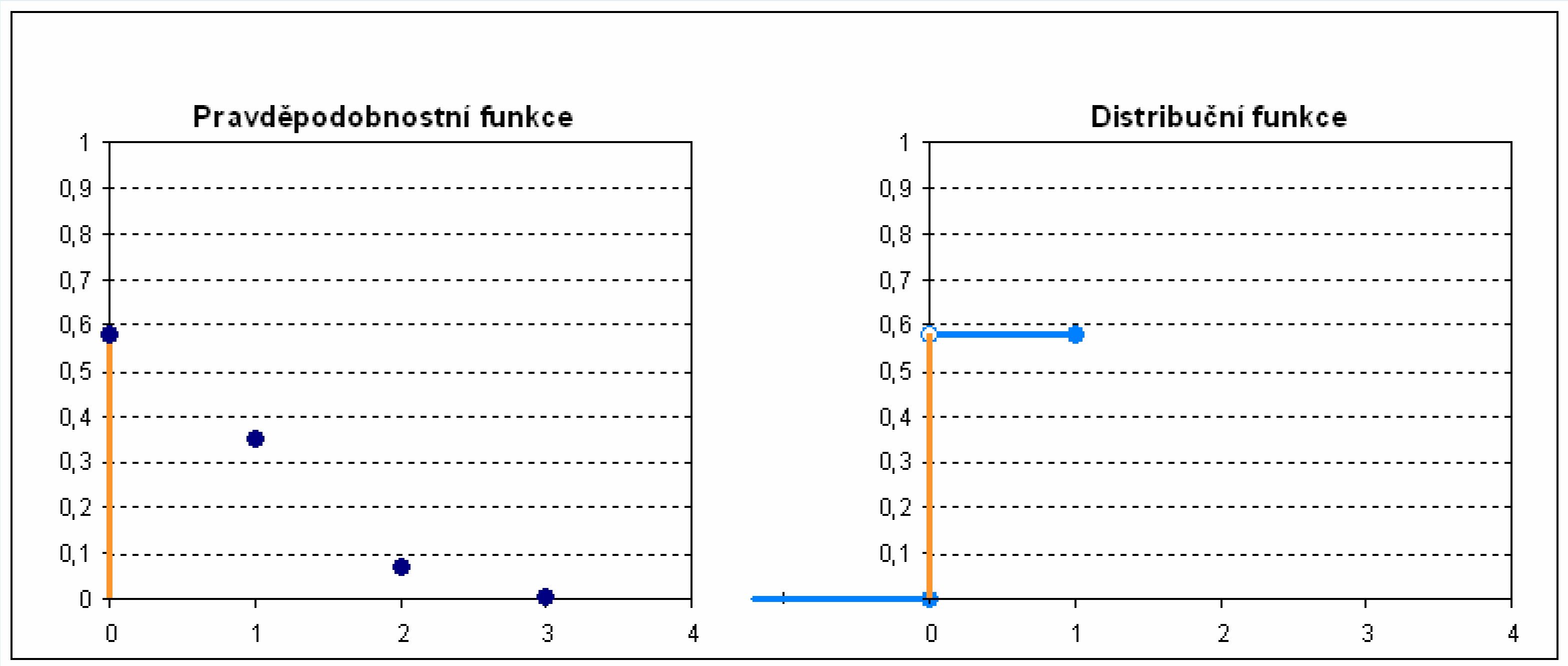
b)



$$\forall x \in (-\infty; 0\rangle : \qquad F(x) = P(X < x) = 0$$

Řešení:

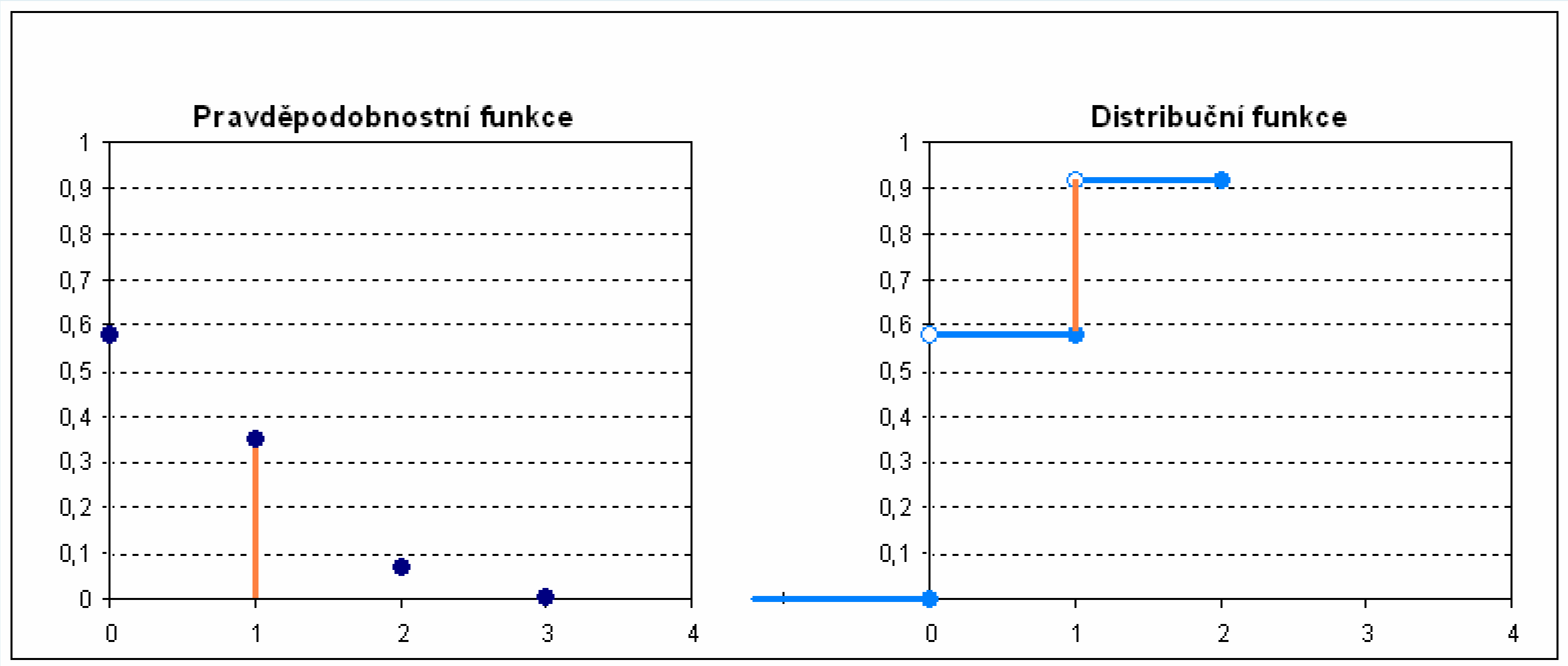
b)



$$\forall x \in \langle 0;1 \rangle : \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}579$$

Řešení:

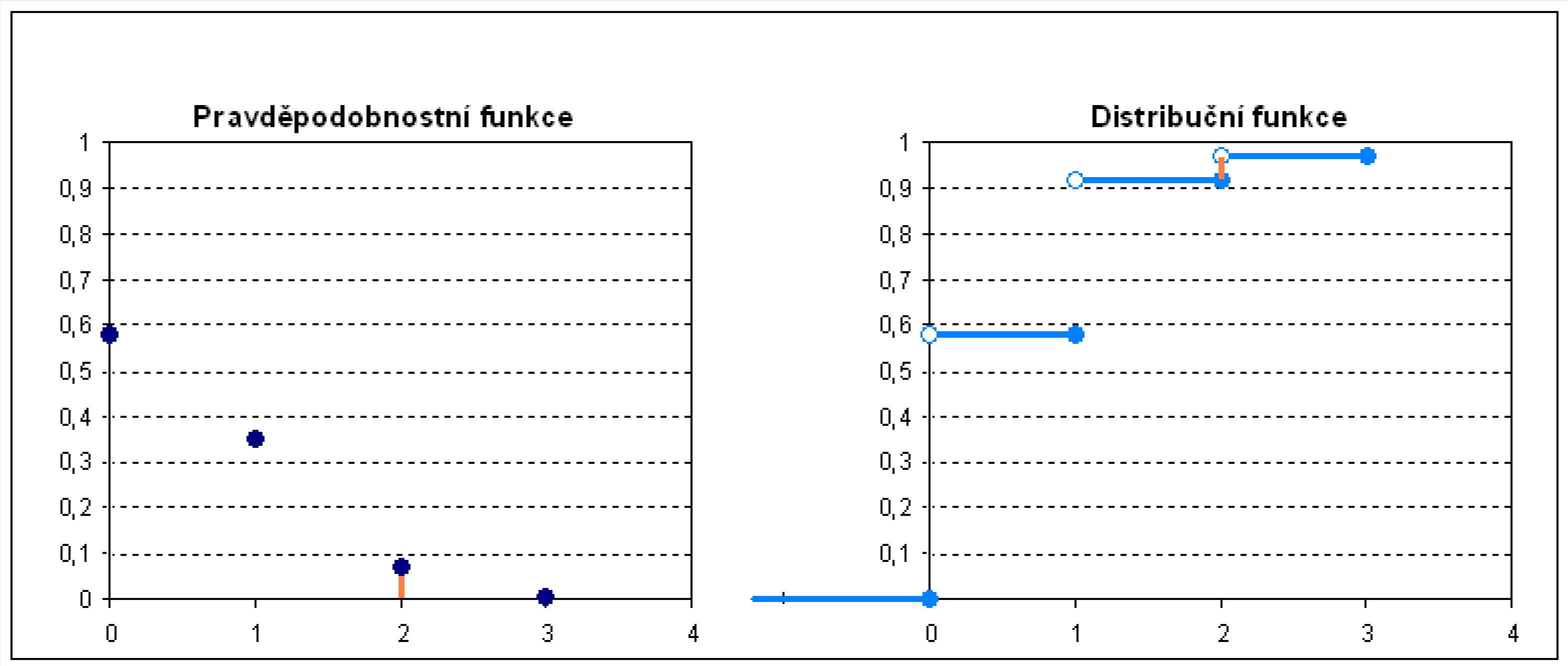
b)



$$\forall x \in \langle 1;2 \rangle : \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}579 + 0{,}348 = 0{,}927$$

Řešení:

b)

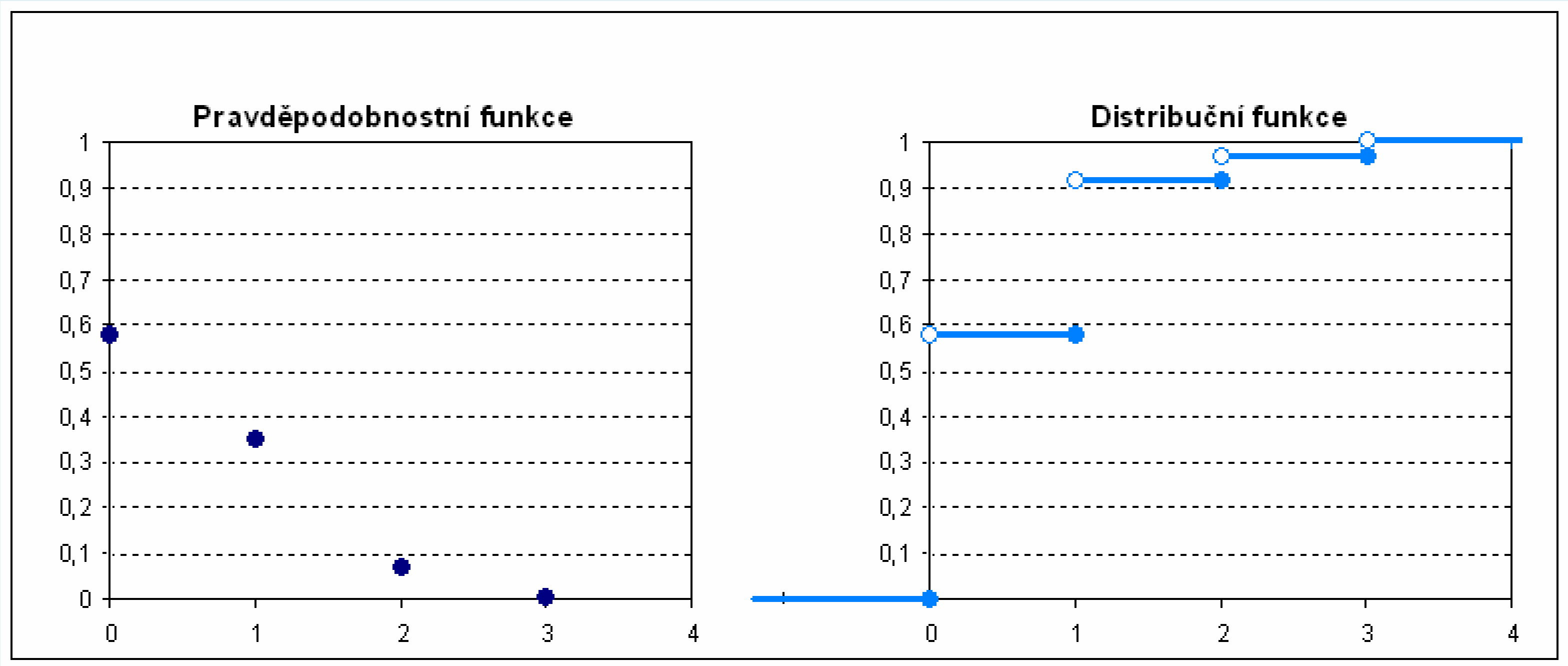


$$\forall x \in \langle 2;3) : \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= 0{,}579 + 0{,}348 + 0{,}069 = 0{,}996$$

Řešení:

b)

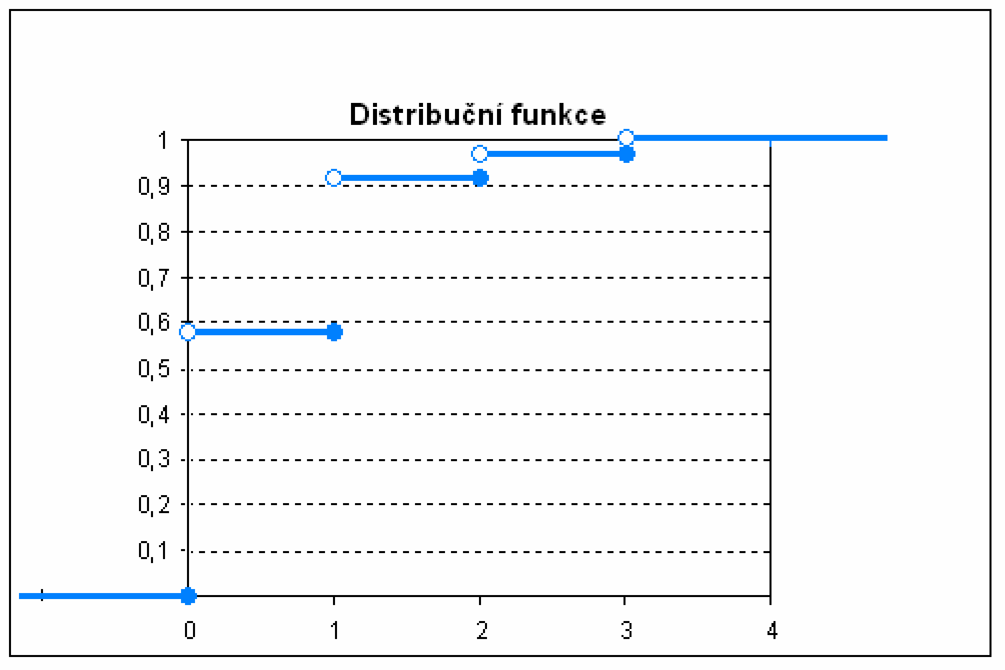


$$\forall x \in \langle 3;\infty) : \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + $$
$$+ P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}579 + 0{,}348 + $$
$$+ 0{,}069 + 0{,}004 = 1$$

Řešení:

b)

x_i	$F(x_i)=P(X<x_i)$
$(-\infty;0\rangle$	0
$(0;1\rangle$	0,579
$(1;2\rangle$	0,927
$(2;3\rangle$	0,996
$(3;\infty)$	1



Řešení:

c) pravděpodobnost jevu, že náhodná veličina *X* nabude kladných hodnot

x_i	$P(x_i)$
0	**0,579**
1	**0,348**
2	**0,069**
3	**0,004**

$$P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \underline{\underline{0{,}421}}$$

Řešení:

d) střední hodnota: $E(X) = \sum_i x_i \cdot P(x_i)$

x_i	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$
0	0,579	0
1	0,348	0,348
2	0,069	0,138
3	0,004	0,012
Σ	1	0,498

$$\Rightarrow \quad E(X) = \underline{\underline{0{,}498}}$$

Řešení:

e) rozptyl:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{(x_i)} x_i^2 \cdot P(x_i)$$

x_i	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$x_i^2 \cdot P(x_i)$
0	0,579	0	0
1	0,348	0,348	0,348
2	0,069	0,138	0,276
3	0,004	0,012	0,036
Σ	1	0,498	0,660

$\Rightarrow$

$E(X)$	0,498
$E(X^2)$	0,660
$D(X)=E(X^2) - (E(X))^2$	0,412

$$D(X) = \underline{\underline{0{,}412}}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}412} = \underline{\underline{0{,}642}}$$

Řešení:

f) modus: je hodnota, v níž pravděpodobnostní funkce nabývá svého maxima.

x_i	$P(x_i)$
0	**0,579**
1	**0,348**
2	**0,069**
3	**0,004**

$$\Longrightarrow \quad \text{Modus} = \underline{\underline{0}}$$

2. Nechť náhodná veličina Y je definována jako funkce náhodné veličiny X z předcházejícího příkladu:

$$Y=3X-2$$

Určete:

a) pravděpodobnostní funkci náh. vel. Y,
b) distribuční funkci náh. vel. Y,
c) střední hodnotu náh. veličiny Y,
d) rozptyl a směrodatnou odchylku náh. veličiny Y,
e) $P(Y<6)$, $P(Y=8)$,
f) modus náh. veličiny Y.

Řešení:

a) pravděpodobnostní funkce:

$$Y = 3X - 2 \quad \Rightarrow \quad P(y) = P(3x - 2)$$

x_i	$P(x_i)$
0	0,579
1	0,348
2	0,069
3	0,004

$\Rightarrow$

y_i	$P(y_i)$
3·0-2	0,579
3·1-2	0,348
3·2-2	0,069
3·3-2	0,004

$\Rightarrow$

y_i	$P(y_i)$
-2	0,579
1	0,348
4	0,069
7	0,004

Řešení:

b) distribuční funkce:

y_i	$F(y_i)=P(Y<y_i)$
$(-\infty; -2\rangle$	0
$(-2; 1\rangle$	0,579
$(1; 4\rangle$	0,927
$(4; 7\rangle$	0,996
$(7; \infty)$	1

Řešení:

c) střední hodnota:

Z definičního vztahu – $E(Y) = \sum_i y_i \cdot P(y_i)$

nebo

Pomocí vlastnosti střední hodnoty:

$$E(Y) = E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3 \cdot 0{,}498 - 2 = \underline{\underline{-0{,}506}}$$

Řešení:

d) rozptyl:

Z definičního vztahu – $D(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2$

nebo

Pomocí vlastnosti rozptylu:

$$D(Y) = D\left(3X - 2\right) = 3^2 D(X) = 9 \cdot 0{,}412 = \underline{\underline{3{,}708}}$$

směrodatná odchylka: $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)}$

$$\sigma_Y = \sqrt{3{,}708} = \underline{\underline{1{,}926}}$$

Řešení:

e) $P(Y<6)$, $P(Y=8)$:

y_i	$P(y_i)$
-2	0,579
1	0,348
4	0,069
7	0,004

$$\Rightarrow P(Y<6)=P(Y=-2)+P(Y=1)+P(Y=4)=$$

$$=\underline{\underline{0{,}996}}$$

$$P(Y=8)=\underline{\underline{0}}$$

Řešení:

f) modus: je hodnota, v níž pravděpodobnostní funkce nabývá svého maxima.

y_i	$P(y_i)$
-2	**0,579**
1	**0,348**
4	**0,069**
7	**0,004**

$$\Rightarrow \quad \text{Modus} = \underline{\underline{-2}}$$

Spojitá náhodná veličina

- Náhodná veličina X má **spojité rozdělení pravděpodobnosti** právě tehdy, má-li spojitou distribuční funkci.
- Nemá smysl jednotlivým realizacím náhodné veličiny přiřazovat hodnotu pravděpodobnosti, protože pravděpodobnostní funkce je nulová.
- Místo pravděpodobnostní funkce se k popisu rozdělení spojité náhodné veličiny používá tzv. **hustota pravděpodobnosti** – ozn. $f(x)$.

Hustota pravděpodobnosti

- Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ spojité náhodné veličiny je reálná nezáporná funkce taková, že

$$F(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{pro} \quad -\infty < x < \infty$$

- Ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce, platí

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

Hustota pravděpodobnosti-vlastnosti

1. hustota pravděpodobnosti je nezáporná funkce

$$f(x) \geq 0$$

2. plocha pod křivkou hustoty pravděpodobnosti je rovna 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

3. hustota pravděpodobnosti „začíná" v 0

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

4. hustota pravděpodobnosti „končí" v 0

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Hustota pravděpodobnosti a pravděpodobnost

Vztah mezi pravděpodobnostmi výskytu spojité náhodné veličiny v nějakém intervalu a hustotou pravděpodobnosti:

- $P(X = a) = 0$
- $P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
- $P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{\infty} f(x)dx$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Vzhledem k nulovosti pravděpodobnostní funkce spojité náhodné veličiny můžeme ve výše uvedených vztazích libovolně zaměňovat ostré a neostré nerovnosti

Číselné charakteristiky spojité NV

- **střední hodnota** – $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$
- **rozptyl** – $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ← výpočetní vztah
- **směrodatná odchylka** – $\sigma = \sqrt{D(X)}$
- **modus** – taková hodnota SNV, v níž $f(x)$ nabývá svého maxima ($\hat{x}$)
- **p-kvantil** (x_p) – taková hodnota, že pravděpodobnost, že NV nabude menších hodnot než x_p je 100p%
  - dolní kvartil – $x_{0,25}$
  - medián – $x_{0,5}$
  - horní kvartil – $x_{0,75}$

$$P(X < x_p) = p \Rightarrow F(x_p) = p$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin x & x\in\langle 0;\pi\rangle \\ 0 & x\notin\langle 0;\pi\rangle \end{cases}$$

a) nalezněte konstantu a, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} a\cdot\sin x dx + \int_{\pi}^{\infty} 0dx = 1$$

$$0 + a\cdot[-\cos x]_0^\pi + 0 = 1$$

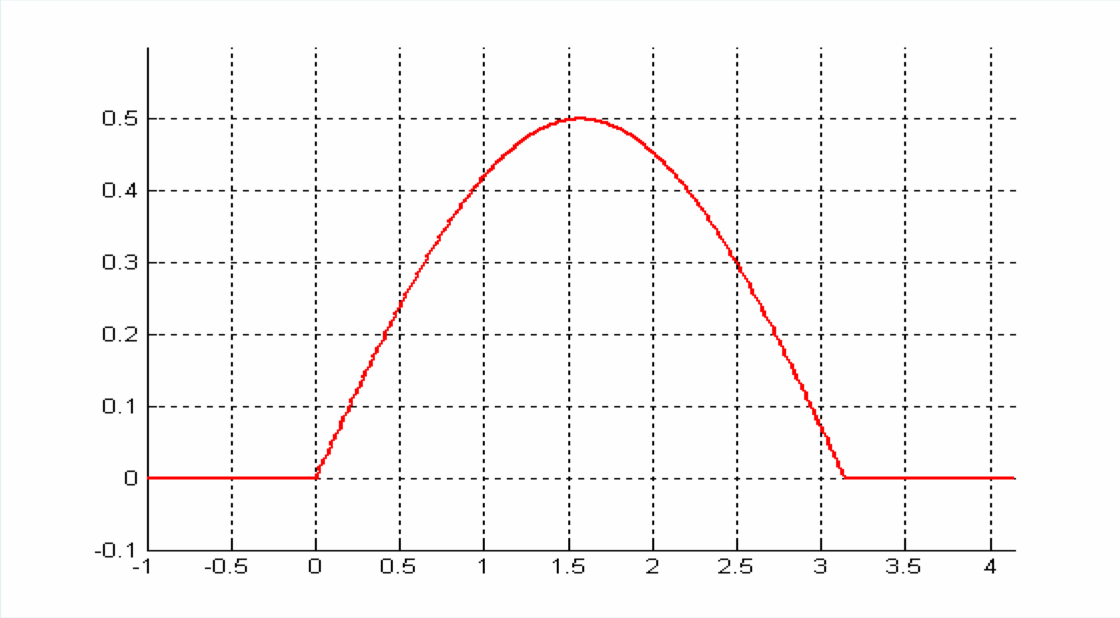
$$a\cdot[-(-1-1)] = 1$$

$$a\cdot 2 = 1 \quad\Rightarrow\quad a = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot \sin x & x \in \langle 0;\pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0;\pi \rangle \end{cases}$$

b) zakreslete hustotu pravděpodobnosti $f(x)$,



3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot \sin x & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0; \pi \rangle \end{cases}$$

c) nalezněte a zakreslete distribuční funkci $F(x)$,

$$\forall x \in R : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$\forall x \in (-\infty; 0) : F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = \underline{\underline{0}}$$

$$\forall x \in \langle 0; \pi) : F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} 0{,}5 \cdot \sin t\ dt = 0 + 0{,}5 \cdot [-\cos t]_0^x =$$

$$= 0{,}5 \cdot (-\cos x - (-1)) = \underline{\underline{0{,}5 - 0{,}5 \cos x}}$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 \cdot \sin x & x \in \langle 0;\pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0;\pi \rangle \end{cases}$$

c) nalezněte a zakreslete distribuční funkci $F(x)$,

$$\forall x \in \langle \pi;\infty) : F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{\pi} 0,5 \cdot \sin t\, dt + \int_{0}^{x} 0 dt =$$

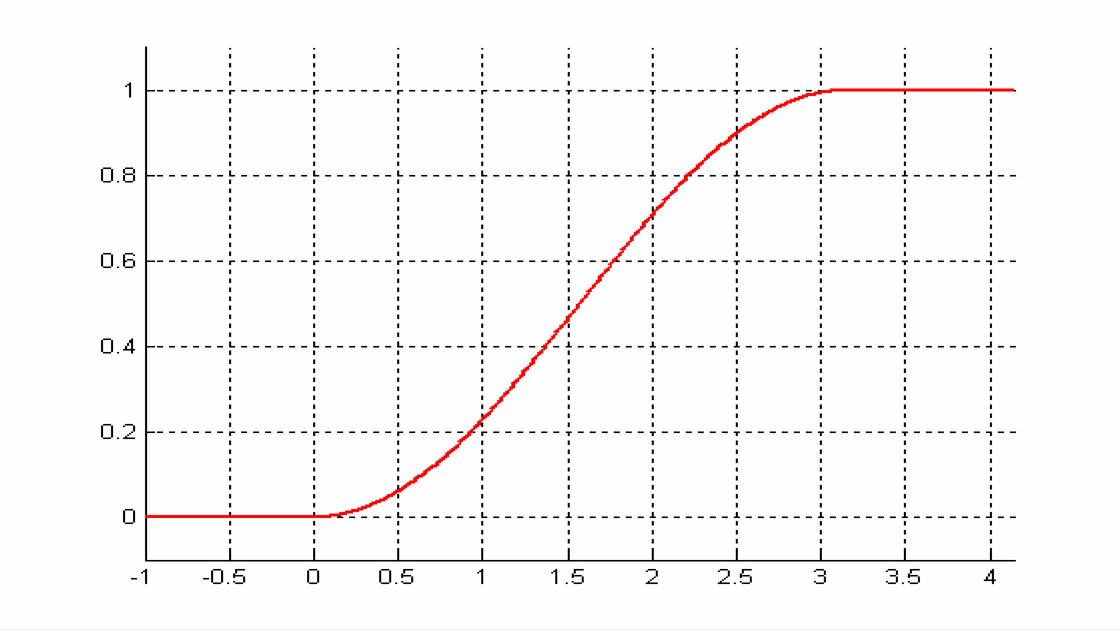
$$= 0 + 0,5 \cdot [-\cos t]_0^\pi + 0 = 0,5 \cdot (1-(-1)) = \underline{\underline{1}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \forall x \in (-\infty;0) \\ 0,5 - 0,5 \cos x & , \forall x \in \langle 0;\pi) \\ 1 & , \forall x \in \langle \pi;\infty) \end{cases}$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot \sin x & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0; \pi \rangle \end{cases}$$

c) nalezněte a zakreslete distribuční funkci $F(x)$,



3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot \sin x & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0; \pi \rangle \end{cases}$$

d) určete $P(X=0{,}3)$, $P(\pi/4<X<5)$, $P(X>\pi/3)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \forall x \in (-\infty; 0) \\ 0{,}5 - 0{,}5 \cos x & , \forall x \in \langle 0; \pi) \\ 1 & , \forall x \in \langle \pi; \infty) \end{cases}$$

$$P(X = 0{,}3) = \underline{\underline{0}}$$

$$P\left(\frac{\pi}{4} < X < 5\right) = F(5) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \underline{\underline{0{,}854}}$$

$$P\left(X > \frac{\pi}{3}\right) = 1 - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{0{,}75}}$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot \sin x & x \in \langle 0;\pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0;\pi \rangle \end{cases}$$

e) určete střední hodnotu $E(X)$,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x\,dx + \int_{\pi}^{\infty} x \cdot 0\,dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\pi} x \cdot \sin x\,dx + 0 = \frac{1}{2} \cdot \left[\sin x - x \cdot \cos x\right]_0^{\pi} =$$

integrace podle pravidla per partes

$$= \frac{1}{2} \cdot [\pi - 0] = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot \sin x & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0; \pi \rangle \end{cases}$$

f) určete rozptyl $D(X)$, $\quad D(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x\,dx + \int_{\pi}^{\infty} x^2 \cdot 0\,dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\pi} x^2 \cdot \sin x\,dx + 0 = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos x \cdot (2 - x^2) + 2 \cdot \sin x\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-1 \cdot (2 - \pi^2) + 0 - 1 \cdot 2 + 0\right] = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

2x integrace podle pravidla per partes

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot \sin x & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0; \pi \rangle \end{cases}$$

f) určete rozptyl $D(X)$, $\quad D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$D(X) = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{4} - 2}}$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot \sin x & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0; \pi \rangle \end{cases}$$

g) určete směrodatnou odchylku,

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{\pi^2 - 8}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{2}}}$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}5\cdot\sin x & x\in\langle 0;\pi\rangle \\ 0 & x\notin\langle 0;\pi\rangle \end{cases}$$

h) určete medián, $F\left(x_{0,5}\right)=0{,}5$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,\forall x\in(-\infty;0) \\ 0{,}5-0{,}5\cos x & ,\forall x\in\langle 0;\pi) \\ 1 & ,\forall x\in\langle \pi;\infty) \end{cases} \qquad \Rightarrow x_{0,5}\in\langle 0;\pi)$$

$$0{,}5-0{,}5\cos(x_{0,5})=0{,}5$$

$$0{,}5\cos(x_{0,5})=0$$

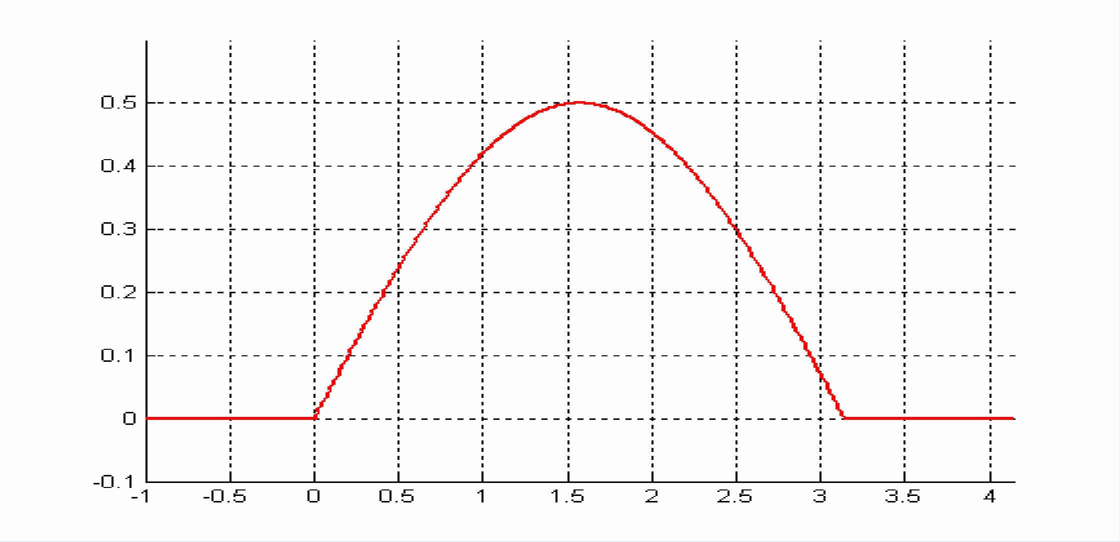
$$\cos(x_{0,5})=0 \quad\Rightarrow\quad x_{0,5}=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}5\cdot\sin x & x\in\langle 0;\pi\rangle \\ 0 & x\notin\langle 0;\pi\rangle \end{cases}$$

h) určete modus,

hledáme maximum hustoty pravděpodobnosti



$$\Rightarrow \max\in\langle 0;\pi)$$

3. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot \sin x & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0; \pi \rangle \end{cases}$$

h) určete modus,

$$\max : f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0 \qquad \max \in \langle 0; \pi)$$

$$(0{,}5 \cdot \sin x)' = 0{,}5 \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \hat{x} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Test

1. Vytvořte dvojice pojem – příklad.

a) náhodný pokus

b) náhodný jev

c) náhodná veličina

1. Doba přenosu testovacího datového souboru je delší než 30s.
2. Měření doby přenosu testovacího datového souboru.
3. Doba přenosu testovacího datového souboru.

2. Určete pravdivost následujících výroků.

a) Náhodnou veličinu chápeme jako výsledek náhodného pokusu, který je daný reálným číslem.

b) Diskrétní náhodná veličina může nabývat konečného nebo spočetného množství hodnot

c) Distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě t udává pravděpodobnost, že X nabývá hodnot menších než t.

d) Má-li náhodná veličina spojitou distribuční funkci, je spojitá.

e) Je-li X diskrétní náhodná veličina, pak $\sum_i P(X = x_i) = 1$.

2. Určete pravdivost následujících výroků.

f) Oborem hodnot distribuční funkce jsou všechna reálná čísla.

$$F(x) \in \langle 0,1 \rangle$$

g) Medián je střední hodnota.

Medián $x_{0,5}$ je taková hodnota, že pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než $x_{0,5}$ je 50%. $P(X < x_{0,5}) = F(x_{0,5}) = 0{,}5$

Střední hodnota-obecný moment prvního řádu: pro DNV $EX = \sum_i x_i \cdot P(x_i)$, pro SNV $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

h) Nabývá-li funkce *f(x)* hodnoty 1,3, nemůže jít o hustotu pravděpodobnosti.

$$f(x) \in \langle 0, \infty)$$

i) Rozdělení spojité náhodné veličiny můžeme popsat distribuční funkcí, hustotou pravděpodobnosti a intenzitou poruch.

j) Střední hodnota součtu dvou náhodných veličin je rovna součtu jednotlivých středních hodnot.

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} EX_i$$

2. Určete pravdivost následujících výroků.

k) Rozptyl součtu dvou náhodných veličin je roven součtu jednotlivých rozptylů. (Platí pouze pro nezávislé NV)

l) Střední hodnota součinu dvou náhodných veličin je rovna součinu jednotlivých středních hodnot. (Platí pouze pro nezávislé NV)

m) Rozptyl součinu dvou náhodných veličin je roven součinu jednotlivých rozptylů. (Platí pouze pro nezávislé NV)

3. Určete, která ze zadaných funkcí nemůže představovat pravděpodobnostní funkci.

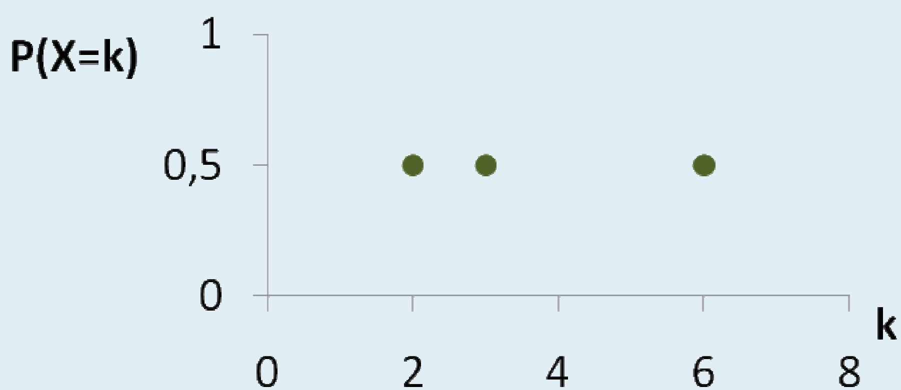
a)

$$P(X=k)=\begin{cases}\dfrac{1}{k} & k\in\{2;3;6\}\\ 0 & k\notin\{2;3;6\}\end{cases}$$

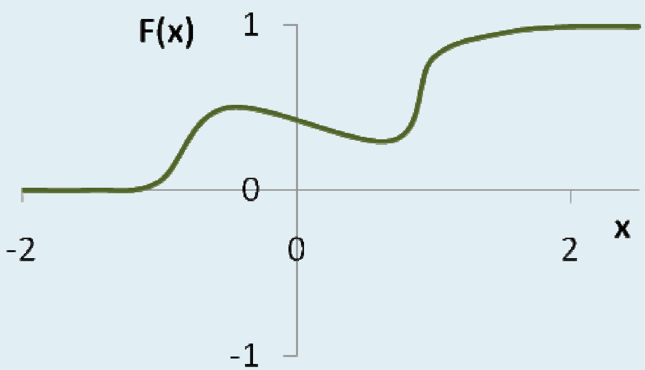
b)

k	2	3	6
$P(X=k)$	0,2	0,4	0,4

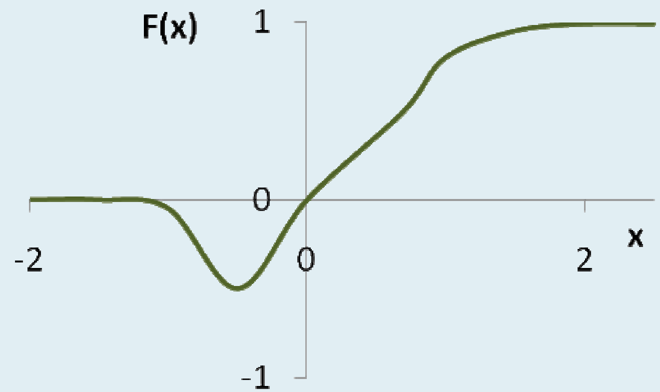
c)



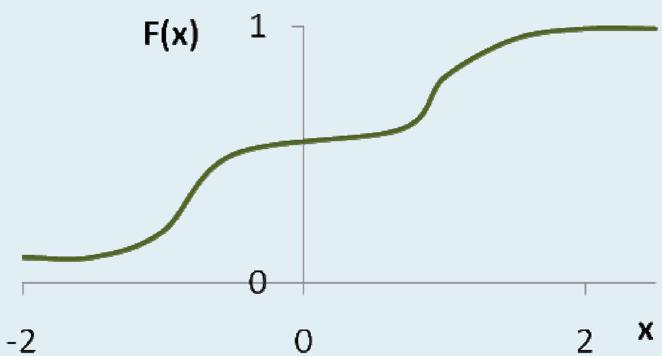
4. Určete, zda by grafy znázorněných funkcí mohly představovat distribuční funkci.



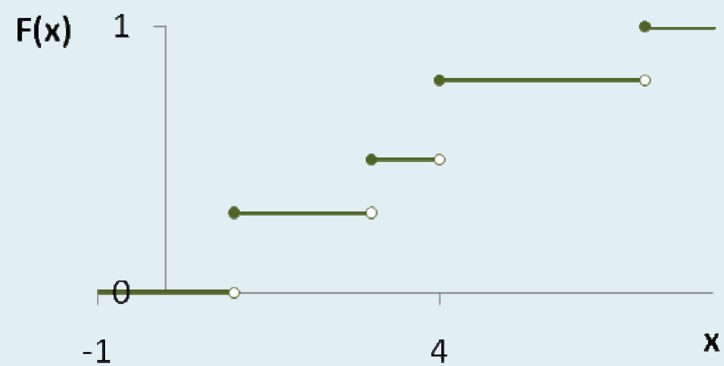
~~a)~~ Není neklesající



~~b)~~ $F(x) \notin \langle 0,1 \rangle$

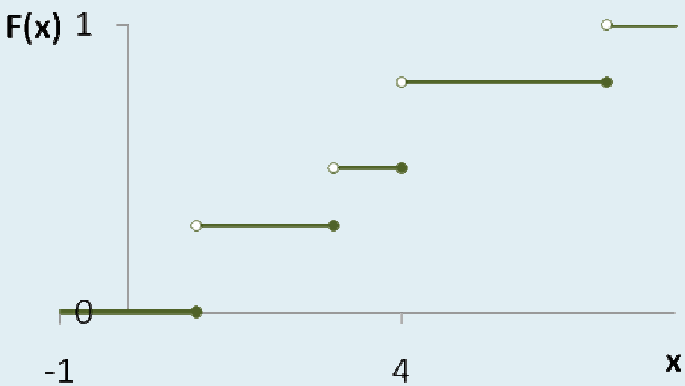


~~c)~~ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) \neq 0$

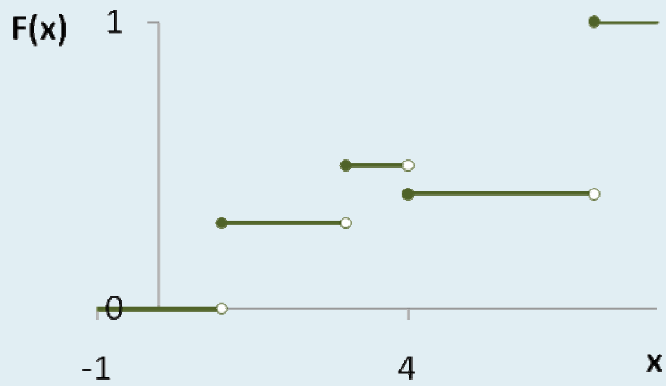


~~d)~~ Není zleva spojitá

4. Určete, zda by grafy znázorněných funkcí mohly představovat distribuční funkci.



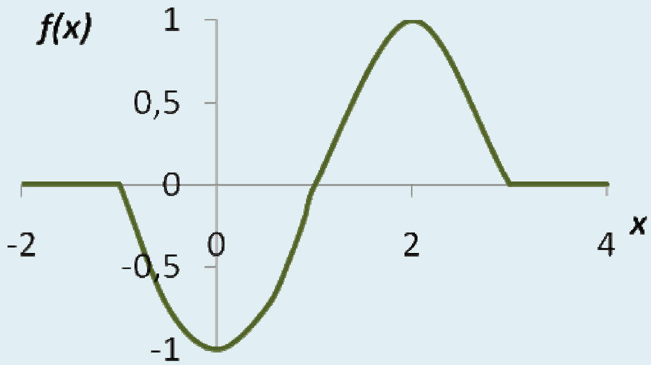
e)



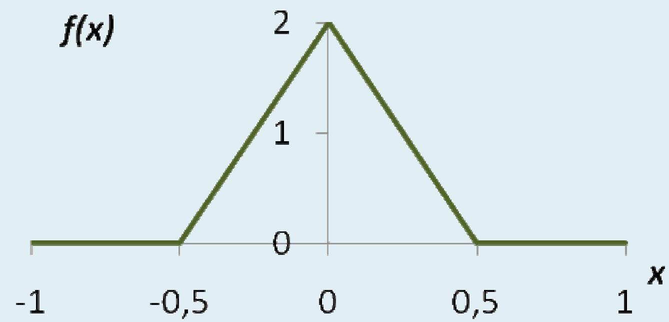
f)

Není neklesající

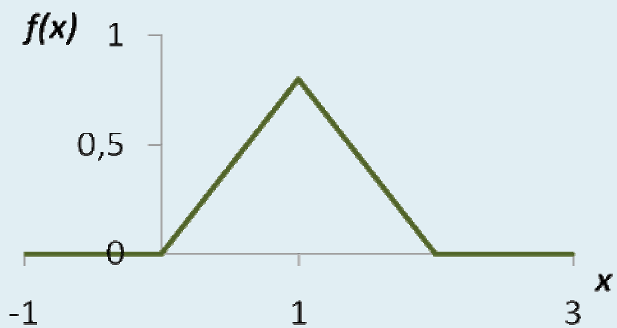
5. Určete, zda by grafy znázorněných funkcí mohly představovat hustotu pravděpodobnosti.



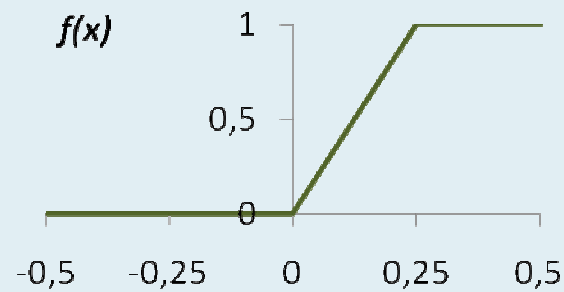
a) Není nezáporná



b)



c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \neq 1$



d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$

6. Nechť náhodná veličina *X* představuje životnost (dobu do poruchy) monitorů na počítačové učebně E320. Určete pravdivost následujících výroků.

a) *X* je spojitou náhodnou veličinou.

b) Rozdělení *X* může být popsáno pravděpodobnostní funkcí.
(Pravděpodobnostní funkce je nulová)

7. Vyjádřete následující pravděpodobnosti pomocí distribuční funkce.

a) $P(X < 10)$, $F(10)$

b) $P(X \geq 5)$, $1 - P(X < 5) = 1 - F(5)$

c) $P(5 \leq X < 10)$. $F(10) - F(5)$

8. Nechť X je diskrétní náhodná veličina. Vyjádřete co nejjednodušeji následující pravděpodobnosti pomocí $P(X=5)$, $P(X<5)$, $P(X>5)$, $P(X=10)$, $P(X<10)$, $P(X>10)$.

a) $P(X \leq 10)$, $P(X<10)+P(X=10)$

b) $P(X \geq 5)$, $1-P(X<5)$

c) $P(5 < X \leq 10)$, $P(X=10)+P(X<10)-P(X<5)-P(X=5)$

d) $P(5 \leq X \leq 10)$. $P(X=10)+P(X<10)-P(X<5)$

9. Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete co nejjednodušeji následující pravděpodobnosti pomocí $P(X<5)$, $P(X>5)$, $P(X<10)$, $P(X>10)$.

a) $P(X \leq 10)$, $P(X<10)$

b) $P(X \geq 5)$, $1-P(X<5)$

c) $P(5<X \leq 10)$, $P(X<10)-P(X<5)$

d) $P(5 \leq X \leq 10)$. $P(X<10)-P(X<5)$

10. Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete co nejjednodušeji následující pravděpodobnosti pomocí hustoty pravděpodobnosti.

a) $P(X \leq 10)$, $\int_{-\infty}^{10} f(x)dx$

b) $P(X \geq 5)$, $\int_{5}^{\infty} f(x)dx$

c) $P(5 < X \leq 10)$, $\int_{5}^{10} f(x)dx$

d) $P(5 \leq X \leq 10)$. $\int_{5}^{10} f(x)dx$