

KOMBINATORIKA



1. cvičení

Co to je kombinatorika

- ❖ Kombinatorika je vstupní branou do teorie pravděpodobnosti.
- ❖ Zabývá se různými způsoby výběru prvků z daného souboru.

Typy výběrů

❖ Uspořádanost výběru

- ❖ uspořádaný výběr = VARIACE + PERMUTACE, záleží na pořadí vybraných prvků
- ❖ neuspořádaný výběr = KOMBINACE, nezáleží na pořadí vybraných prvků

❖ Opakované zařazení prvků do výběru

- ❖ Výběry s opakováním = prvky mohou být do výběru zařazeny opakovaně
- ❖ Výběry bez opakování = prvky nemohou být do výběru zařazeny opakovaně

Kombinatorické pravidlo součinu

Kolik různých uspořádaných dvojic čísel můžeme dostat, když hodíme dvakrát kostkou s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách?

Řešení

V prvním hodu může padnout jedno ze šesti čísel, tj. $n_1 = 6$, ke každému z nich může ve druhém hodu opět padnout jedno ze šesti čísel, tj. $n_2 = 6$. Počet různých dvojic ($k = 2$) je tedy $6 \cdot 6 = 36$.

Kombinatorické pravidlo součinu

Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Kombinatorické pravidlo součtu

Máme tři žluté, dvě modré a čtyři zelené pastelky. Kolik máme dohromady pastelek?

Řešení

Dohromady máme $3+2+4 = 9$ pastelek.

Kombinatorické pravidlo součtu

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Variace, kombinace, permutace

Uspořádané výběry	Bez opakování	Variace bez opakování	$V(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$
		Permutace bez opakování	$P(n) = V(n, n) = n!$
	S opakováním	Variace s opakováním	$V^*(n, k) = n^k$
		Permutace s opakováním	$P^*(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$
Neuspořádané výběry	Bez opakování	Kombinace bez opakování	$C(n, k) = \frac{n!}{(n - k)! k!}$
	S opakováním	Kombinace s opakováním	$C^*(n, k) = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! k!}$

1. Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací (bez opakování) dvačtyřicetkrát. Určete počet prvků.

Řešení

$$P_Z(n)$$

$$P_K(n-2) = P_Z(n) / 42$$

$$P_K(n-2) = (n-2)!$$

$$P_Z(n) = n!$$

Dosadíme za P_K a P_Z : $(n-2)! = n! / 42$

$$42 = n! / (n-2)!$$

$$42 = n \cdot (n-1)$$

=> Řešíme kvadratickou rovnici: $n^2 - n - 42 = 0$

$$D = (-1)^2 - 4(1 \cdot (-42)) = 1 + 168 = 169 \Rightarrow \sqrt{D} = 13$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2} = \begin{cases} 7 \\ -6 \end{cases}$$

Počet prvků je 7.

2. V prodejně si můžete vybrat ze sedmi druhů pohlednic. Kolika způsoby lze koupit

a) 10 pohlednic

Řešení

❖ Při výběru pohlednic nezáleží na tom, v jakém pořadí je vybereme => KOMBINACE

❖ Můžeme vybrat více pohlednic od jednoho druhu => KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

$$C^*(7, 10) = \frac{(7 + 10 - 1)!}{(7 - 1)!10!} = \frac{16!}{10!6!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \underline{\underline{8008}}$$

2. V prodejně si můžete vybrat ze sedmi druhů pohlednic. Kolika způsoby lze koupit

b) 5 pohlednic,

Řešení

Stejný postup jako v předchozím případě:

❖ Při výběru pohlednic nezáleží na tom, v jakém pořadí je vybereme => KOMBINACE

❖ Můžeme vybrat více pohlednic od jednoho druhu => KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

$$C^*(7,5) = \frac{(7+5-1)!}{(7-1)!5!} = \frac{11!}{6!5!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \underline{\underline{462}}$$

2. V prodejně si můžete vybrat ze sedmi druhů pohlednic. Kolika způsoby lze koupit

c) 5 různých pohlednic,

Řešení

❖ Při výběru pohlednic nezáleží na tom, v jakém pořadí je vybereme => KOMBINACE

❖ Můžeme vybrat pouze jednu pohlednici od jednoho druhu => KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

$$C(7,5) = \frac{(7)!}{(7-5)!5!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = \underline{\underline{21}}$$

3. Kolika přímkami lze spojit 7 bodů v rovině, jestliže:

a) žádné tři z nich neleží v přímce

Řešení

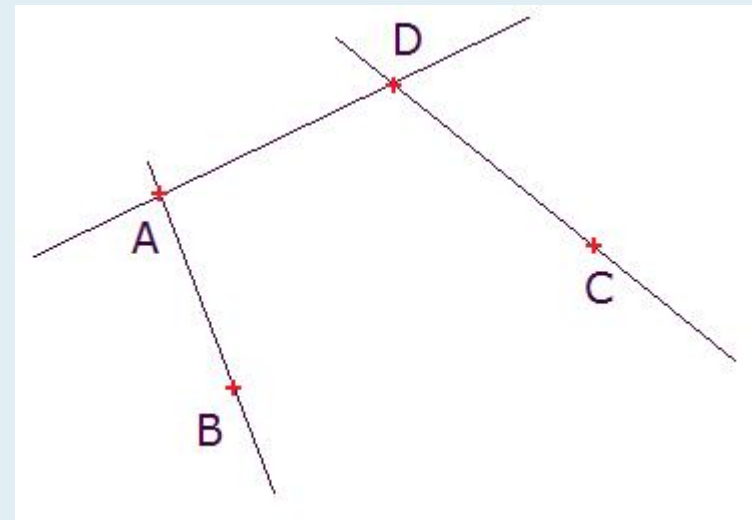
Vybíráme dvojice bodů, které určují přímku; při výběru nezáleží na pořadí (přímka AB je stejná, jako přímka BA)

=> KOMBINACE

Při výběru se body nemůžou opakovat (nelze vybrat jako dvojici bodů BB, protože by neurčovaly přímku)

=> KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

$$C(7,2) = \frac{(7)!}{(7-2)!2!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = \underline{\underline{21}}$$



3. Kolika přímkami lze spojit 7 bodů v rovině, jestliže:

b) tři z nich leží v jedné přímce

Řešení

KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

Od všech přímek, kterými lze spojit 7 bodů v rovině je třeba odečíst ty přímky, které mohly být tvořeny třemi body, pokud by neležely v jedné přímce a poté přičíst jednu přímku, kterou tvoří.

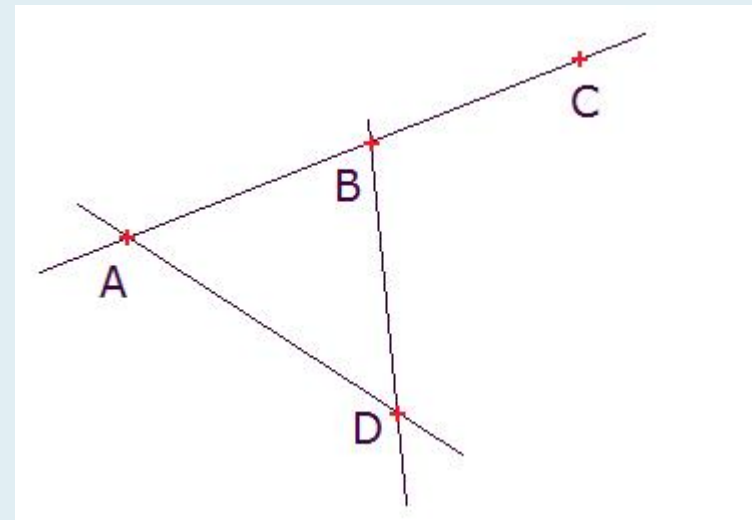
Všechny
přímky

Přímky, které
mohly tvořit body
A,B,C pokud by
neležely na jedné
přímce

Přímka AB(C)

$$C(7,2) - C(3,2) + 1 = \frac{(7)!}{(7-2)!2!} - \frac{(3)!}{(3-2)!2!} + 1 =$$

$$= \frac{7!}{5!2!} - \frac{3!}{2!1!} + 1 = \frac{6 \cdot 7}{2} - \frac{3}{1} + 1 = 21 - 3 + 1 = \underline{\underline{19}}$$



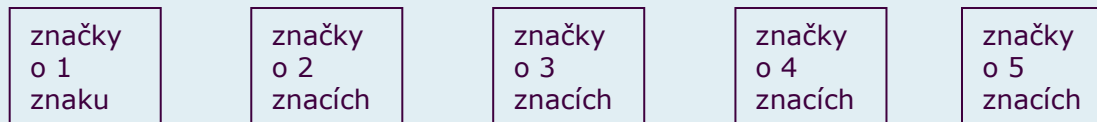
4. Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky ve skupiny po jedné až pěti?

Řešení

V Morseově abecedě záleží na pořadí teček a čárek => VARIACE

Tečky i čárky se můžou opakovat => VARIACE S OPAKOVÁNÍM

Pro výsledek sčítáme dohromady možnosti pro skupiny po 1, 2, 3, 4 a 5 znacích.



$$\begin{aligned}
 &V^*(2,1) + V^*(2,2) + V^*(2,3) + V^*(2,4) + V^*(2,5) = \\
 &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = \\
 &= \underline{\underline{62}}
 \end{aligned}$$

•	E
—	T
••	I
•—	A
—•	N
— —	M
•••	S

5. Deset přátel si vzájemně poslalo pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic celkem rozeslali?

Řešení

Vybíráme dvojice přátel, kteří si poslali pohled. Dvojice Karel -> Klára je jiná, než Klára -> Karel => záleží na pořadí vybraných prvků => VARIACE

Ve dvojici se lidé neopakují (nikdo neposílá pohled sám sobě, v zadání toto označuje slovo „vzájemně“) =>

VARIACE BEZ OPAKOVÁNÍ

$$V(10,2) = \frac{(10)!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = \underline{\underline{90}}$$

6. Kolika způsoby lze rozdělit 8 účastníků finále v běhu na 100 metrů do 8 drah?

Řešení

Při rozdělování záleží na pořadí umístění účastníků v drahách + velikost výběru (8 účastníků) je stejná jako rozsah množiny, ze které vybíráme (8 drah) =>

PERMUTACE

Účastníci se nemůžou při rozdělování opakovat (nikdo nemůže běžet ve dvou drahách zároveň) => PERMUTACE BEZ OPAKOVÁNÍ

$$P(8) = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = \underline{\underline{40\,320}}$$

7. Kolik různých anagramů lze vytvořit použitím všech písmen slova

a) STATISTIKA

Řešení

Anagram = přesmyčky, používáme všechna písmena daného slova a měníme jejich pořadí ve slově, např. STATISTIKA -> AKITSITATS => PERMUTACE

Jednotlivá písmena se můžou opakovat => PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

Zjistíme počet opakování jednotlivých prvků (písmen) v původním slově:

Písmeno	Počet	
S	2x	$P^*(3,2,2,2,1) = \frac{P(10)}{P(3) \cdot P(2) \cdot P(2) \cdot P(2) \cdot P(1)} =$ $= \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \underline{\underline{75\,600}}$
T	3x	
A	2x	
I	2x	
K	1x	

7. Kolik různých anagramů lze vytvořit použitím všech písmen slova

b) MATEMATIKA

Řešení

Stejný případ.

Zjistíme počet opakování jednotlivých prvků (písmen) v původním slově:

Písmeno	Počet
---------	-------

M	2x
---	----

A	3x
---	----

T	2x
---	----

E	1x
---	----

I	1x
---	----

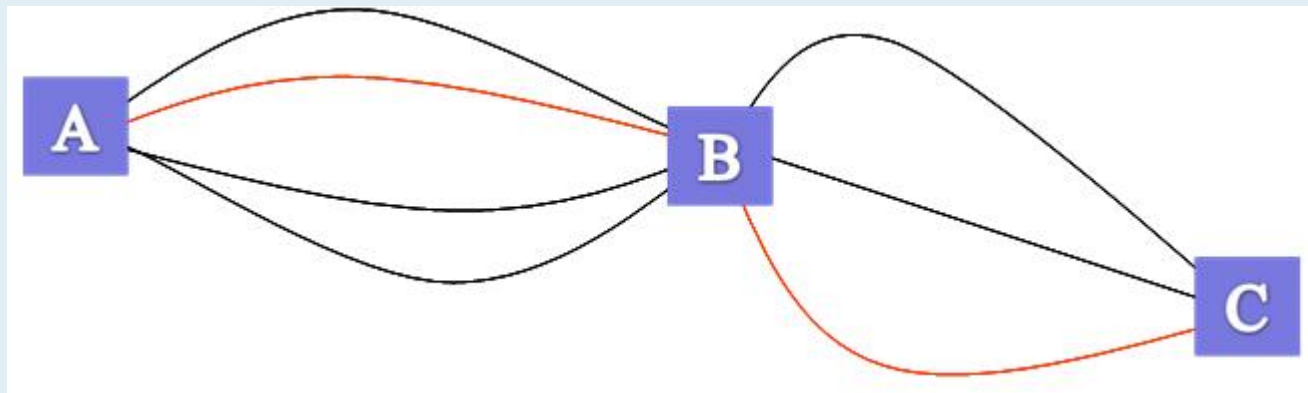
K	1x
---	----

$$P^*(3,2,2,1,1,1) = \frac{P(10)}{P(3) \cdot P(2) \cdot P(2) \cdot P(1) \cdot P(1) \cdot P(1)} =$$

$$= \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 2} = \underline{\underline{151\,200}}$$

8. Z místa A do místa B vedou 4 turistické cesty, z místa B do C tři. Určete kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest je právě jedna použita dvakrát.

Řešení



TAM:

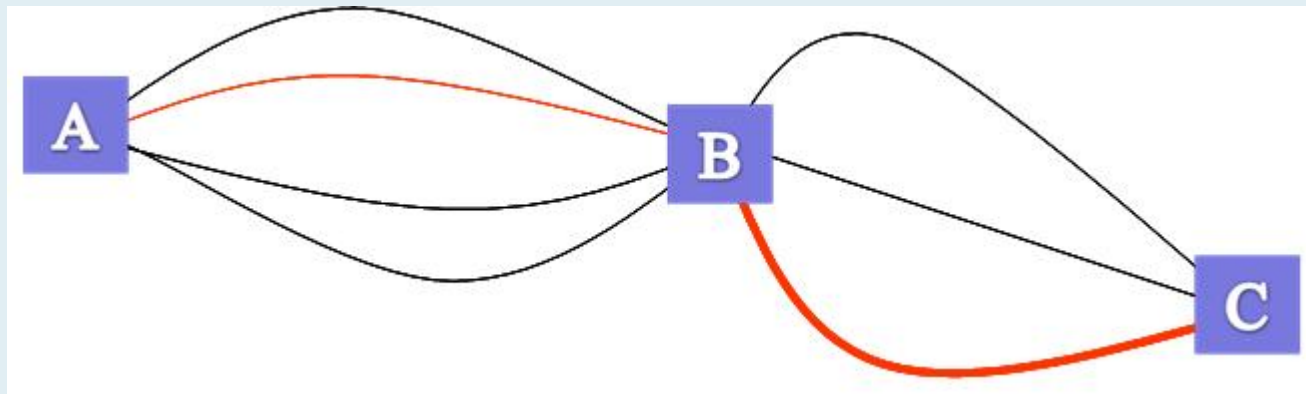
Trasa A -> B: 4 možnosti
a zároveň

Trasa B -> C: 3 možnosti

Celkem: $3 \cdot 4 = 12$ možností

8. Z místa A do místa B vedou 4 turistické cesty, z místa B do C tři. Určete kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest je právě jedna použita dvakrát.

Řešení



ZPĚT:

NEBO

Trasa C -> B: 2 možnosti
a zároveň

Trasa C -> B: 1 možnost
a zároveň

Trasa B -> A: 1 možnost

Trasa B -> A: 3 možnosti

Celkem: $2 \cdot 1 = 2$ možnosti

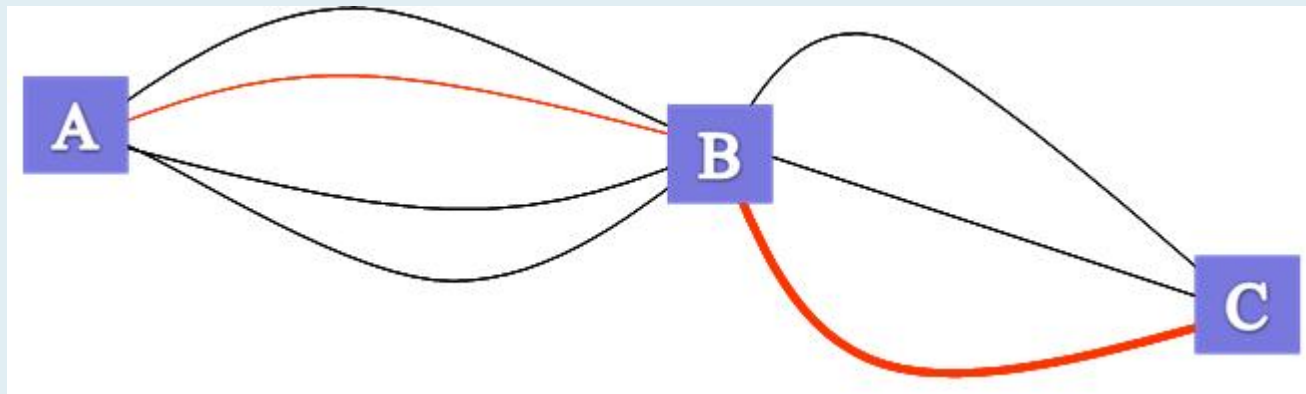
+

Celkem: $1 \cdot 3 = 3$ možnosti

= 5 možností

8. Z místa A do místa B vedou 4 turistické cesty, z místa B do C tři. Určete kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest je právě jedna použita dvakrát.

Řešení



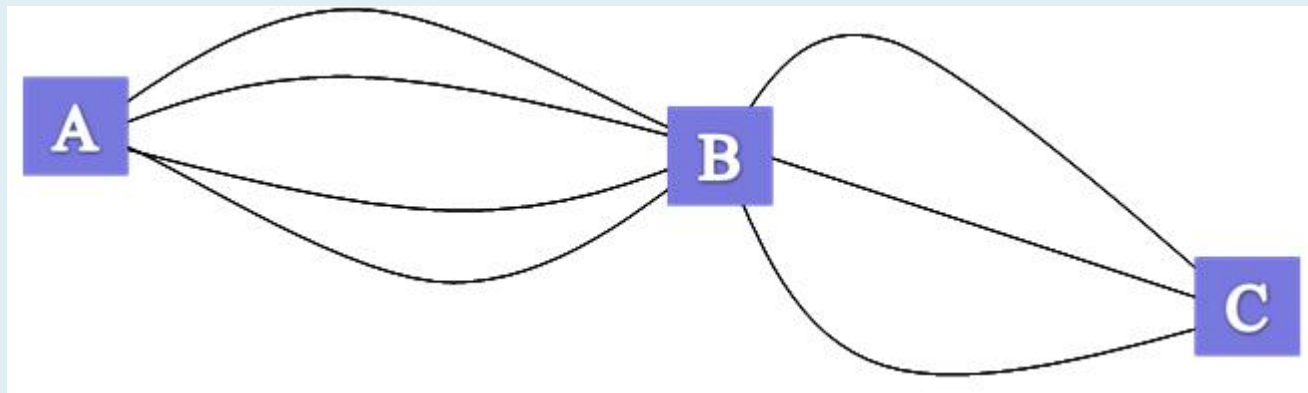
Trasu z A do C lze tedy vybrat 12 způsoby.

Celkový počet tras z C do A, které splňují dané podmínky, je roven 5.

Počet všech způsobů, kterými lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že z daných cest je právě jedna použita dvakrát, je

$$12 \cdot 5 = \underline{60}.$$

8. Z místa A do místa B vedou 4 turistické cesty, z místa B do C tři. Určete kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest je právě jedna použita dvakrát.



Podobné úlohy

Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu z A do C a zpět;

b) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest není žádná použita dvakrát;

c) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest jsou právě dvě použity dvakrát.

Klasická definice pravděpodobnosti

- ❖ **Deterministické procesy** – při určitých vstupních podmínkách nutně nastane určitý výsledek (např. chemické procesy).
- ❖ **Stochastické procesy** – výsledek (náhodný jev) nelze předvídat, při opakované realizaci vstupních podmínek dostaneme různé (náhodné) výsledky.
- ❖ **Teorie pravděpodobnosti** – logická struktura je budována axiomaticky, základ tvoří několik tvrzení (tzv. axiomů), která vyjadřují základní vlastnosti pravděpodobnosti a všechna další tvrzení jsou z nich odvozena deduktivně.
- ❖ **Matematická statistika** – studium dat vykazujících náhodná kolísání
 - ❖ data získaná pečlivě připraveným pokusem provedeným pod stálou kontrolou experimentálních podmínek v laboratoři
 - ❖ data provozní
 - ❖ data získaná počítačovými simulacemi

Klasická definice pravděpodobnosti

- ❖ **Množinu všech možných výsledků** pokusu značíme Ω . Podmnožiny množiny Ω se nazývají **(náhodné) jevy**.
- ❖ Necht' **náhodný pokus** (každý děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za kterých probíhá) splňuje předpoklady:
 - ❖ Možných výsledků je konečný počet.
 - ❖ Všechny výsledky jsou stejně možné.
 - ❖ Všechny výsledky se vzájemně vylučují.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- ❖ kde n je počet všech výsledků náhodného pokusu a m je počet výsledků příznivých jevu A ; $n = |\Omega|$, $m = |A|$.

9. S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet:

a) šest

Řešení

Označení: A ... padne součet šest

Šestka padne v následujících případech

1. kostka	1	2	3	4	5
2. kostka	5	4	3	2	1

Počet příznivých výsledků: 5

Počet všech výsledků: $6 \cdot 6 = 36$ (6 možností na 1.kostce x
6 možností na 2. kostce)

$$P(A) = \frac{5}{36} = \underline{\underline{0,139}}$$

9. S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet:

b) menší než sedm

Řešení

Označení: A ... padne součet menší než sedm

Pro součet šest jsme vypočítali počet možností na 5,
další možnosti:

Součet	5				4			3		2
1. kostka	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
2. kostka	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1

Počet příznivých výsledků: $5+4+3+2+1 = 15$

Počet všech výsledků: $6 \cdot 6 = 36$ (6 možností na 1.kostce x
6 možností na 2. kostce)

$$P(A) = \frac{15}{36} = \underline{\underline{0,417}}$$

10. Máme 230 výrobků mezi nimiž je 20 nekvalitních. Vybereme 15 výrobků, přičemž vybrané výrobky nevracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 15 vybranými bude 10 dobrých?

Řešení

Označení: A ... mezi 15 vybranými bude 10 dobrých

Počet všech možných výsledků: $C(230,15)$

Vybíráme 10 dobrých
výrobků pouze z dobrých

Vybíráme 15-10
výrobků ze špatných

Počet příznivých výsledků: $C(210,10) \cdot C(20,5)$

$$P(A) = \frac{C(210,10) \cdot C(20,5)}{C(230,15)} = \underline{\underline{0,004}}$$

11. Na jedné polici je náhodně rozestaveno deset knih. Určete pravděpodobnost toho, že určité tři knihy jsou postaveny vedle sebe.

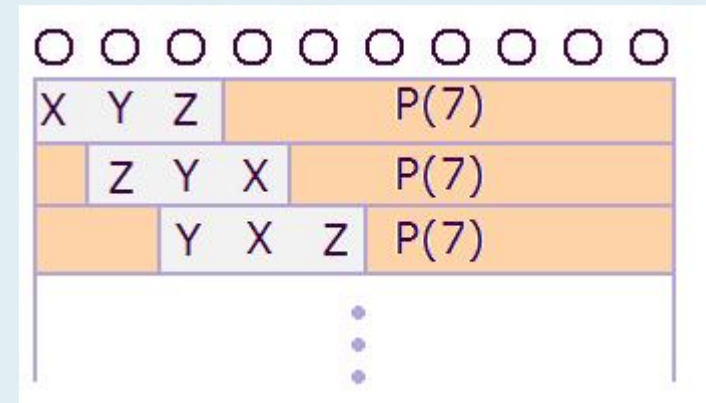
Řešení

Označení: A ... tři určité knihy jsou postaveny vedle sebe

Počet všech možných výsledků: $P(10)$

Počet příznivých výsledků: $8 \cdot P(7) \cdot P(3)$

$$P(A) = \frac{8 \cdot P(7) \cdot P(3)}{P(10)} = \underline{\underline{0,067}}$$



12. Mějme pět vstupenek po 100 Kč, tři vstupenky po 300 Kč a dvě vstupenky po 500 Kč. Vyberme náhodně tři vstupenky. Určete pravděpodobnost toho, že:

a) alespoň dvě z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu

Řešení

Budeme řešit pomocí opačného jevu. Opačný jev k „alespoň dvě mají stejnou hodnotu (ozn. A)“ je „každá má jinou hodnotu (ozn. $\bar{A}$)“ $\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Počet všech možných výsledků: $C(10,3)$

Počet příznivých výsledků: $C(5,1) \cdot C(3,1) \cdot C(2,1)$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C(5,1) \cdot C(3,1) \cdot C(2,1)}{C(10,3)} = \underline{\underline{0,75}}$$

12. Mějme pět vstupenek po 100 Kč, tři vstupenky po 300 Kč a dvě vstupenky po 500 Kč. Vyberme náhodně tři vstupenky. Určete pravděpodobnost toho, že:

b) všechny tři vstupenky stojí dohromady 700 Kč

Řešení

Dohromady za 700 = 100+300+300 nebo = 100+100+500

Počet všech možných výsledků: $C(10,3)$

Počet příznivých výsledků: $C(5,1) \cdot C(3,2) + C(5,2) \cdot C(2,1)$

$$P(A) = \frac{C(5,1) \cdot C(3,2) + C(5,2) \cdot C(2,1)}{C(10,3)} = \underline{\underline{0,292}}$$