

DISKRÉTNÍ TRANSFORMACE

David Horák

Katedra aplikované matematiky
VŠB-Technická univerzita Ostrava

Červenec 2012

Toto dílo by nevzniklo bez paní doc. Ing. Niny Častové, CSc., mé velké Učitelky, jejíž památce je věnováno.

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století*

(reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- 1 Úvod, základní pojmy, obecný pohled na IT
- 2 Konvoluce jako IT
- 3 Diskrétní ortonormální systémy, zobecněná diskrétní Fourierova transformace
- 4 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) a její rychlá verze (FFT)
- 5 Okenní Fourierova transformace (WFT)
- 6 Waveletová (vlnková) transformace (WT)
- 7 Z-transformace (ZT)

1 Úvod, základní pojmy, obecný pohled na IT

Definice 1.1

Vektorový (lineární) prostor je neprázdná množina V , na které je definováno sčítání prvků $f + g$ a násobení skalárem (\mathbb{C}) splňující: sčítání je komutativní a asociativní, existuje nulový prvek a ke každému prvku prvek inverzní (opačný) a násobení je distributivní v obou proměnných vzhledem ke sčítání a vzhledem k první proměnné vzhledem k násobení a $1 \cdot f = f$ pro $\forall f \in V$.

1.1 Základní pojmy

Definice 1.2

Obecný skalární součin definovaný na prostoru V je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, pro které platí (pro $\forall c \in \mathbb{C}$ a $\forall f, g, h \in V$)

1. $\langle cf, g \rangle = c \langle f, g \rangle$,
2. $\langle f + h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$,
3. $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$,
4. $\langle f, f \rangle > 0$ pro $f \neq 0$.

Definice 1.3

Norma $\|\cdot\|$ na vektorovém prostoru V je zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, pro které platí (pro $\forall c \in \mathbb{C}$ a $\forall f, g \in V$):

1. $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \iff f = 0$,
2. $\|cf\| = |c| \|f\|$,
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (tzv. trojúhelníková nerovnost).

1.1 Základní pojmy

Poznámka 1.4

Pro $\forall f, g \in V$ platí tzv. Cauchyho-Schwarzova-Buňakovského nerovnost $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Definice 1.5

Množina vektorů (prvků vektorového prostoru V) $\{f_n, n \in J\} \in V$ je ortogonální, platí-li: $\langle f_m, f_n \rangle = 0$ pro $m \neq n, m, n \in J$. Platí-li navíc pro $\forall n \in J$, že $\|f_n\| = 1$, je množina ortonormální.

1.1 Základní pojmy

Definice 1.6

Množina vektorů $\{f_n, n \in J\} \in V$ je bází vektorového prostoru V právě tehdy, je-li lineárně nezávislá (žáden vektor se nedá vyjádřit pomocí ostatních) a každý vektor $v \in V$ se dá vyjádřit jako jejich lineární kombinace, tj. $v = \sum_{n \in J} \alpha_n f_n$. V případě konečně-dimenzionálního vektorového prostoru V dimenze N vektor α se složkami α_n nazveme souřadnicemi v v dané uspořádané bázi. Báze je ortonormální, pokud vektory báze vyhovují definici 1.5.

Poznámka 1.7

J je množina indexů, např. $J = \{0, 1, \dots, N - 1, \dots\}$ nebo $J = \{0, 1, \dots, N - 1\}$.

1.1 Základní pojmy

Definice 1.8

Ortonormální množinu, pro kterou neexistuje nenulový prvek ve V na ni kolmý, nazveme úplnou.

Poznámka 1.9

Úplný prostor je takový prostor, v němž každá Cauchyovská posloupnost má limitu. Úplný normovaný prostor se nazývá Banachův. Úplný prostor s skalárním součinem se nazývá Hilbertův - má úplnou ortonormální bázi. V Hilbertově prostoru pro ortonormální posloupnost $\{f_n\}$ bude řada $\sum_{n=0}^{\infty} \langle v, f_n \rangle f_n$ vždy konvergovat (pro $v \in V$) a nazveme ji později (zobecněnou) Fourierovou řadou (FŘ) (podmínkou konvergence je tedy úplnost množiny $\{f_n\}$).

1.1 Základní pojmy

Definice 1.10

$L^1([a, b])$ je množina všech měřitelných funkcí (integrovatelných v Lebesgueově smyslu) na intervalu $[a, b]$, tzn.

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty.$$

$L^2([a, b])$ je množina všech funkcí integrovatelných s kvadrátem (v Lebesgueově smyslu) na intervalu $[a, b]$, tzn.

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty.$$

l^2 je množina všech posloupností $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ takových, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 < \infty.$$

$l^2(\mathbb{N}) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ je množina všech konečných posloupností $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$. Prostor $L^2([a, b])$ je isometricky isomorfní s prostorem l^2 .

Poznámka 1.11

Každá funkce po částech spojitá na intervalu $[a, b]$ patří do prostoru $\mathbf{L}^2([a, b]) \subset \mathbf{L}^1([a, b])$. Prostory $\mathbf{L}^2([a, b])$ a $\mathbf{L}^2((a, b))$ můžeme ztotožnit, neboť se jejich funkce liší na množině míry nula. U konečných posloupností (vektorů) $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ je vždy $\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 < \infty$.

1.1 Základní pojmy

Poznámka 1.12

V případě $f(t), g(t) \in \mathbf{L}^2(I)$ budeme pracovat se skalárním součinem

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt,$$

v případě $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{I}^2(N)$ pak se skalárním součinem

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \overline{g_k}$$

a normami indukovanými skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tj.

$$\|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle} \text{ resp. } \|\mathbf{f}\| = \sqrt{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle}.$$

1.1 Základní pojmy

Příklad 1.13

Dokažte, že systém funkcí $\{f_n = e^{int}, n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbf{L}^2([0, 2\pi])$ je ortogonální a není ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení

$f_n = e^{int}$ náleží prostoru $\mathbf{L}^2([0, 2\pi])$:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt = 0, \quad n \neq m.$$

$$\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-int} dt = 2\pi \Rightarrow \|e^{int}\| = \sqrt{2\pi}.$$

Systém funkcí je v zadaném prostoru ortogonální. Ortonormální systém

$$\text{funkcí bude: } \left\{ \frac{f_n}{\|f_n\|} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

1.1 Základní pojmy

Příklad 1.14

Dokažte, že systém funkcí $\{f_n = e^{int}, n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbf{L}^2([0, \pi])$ není ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^\pi e^{int} e^{-imt} dt = \frac{(-1)^{n-m} - 1}{n-m} \neq 0, \quad n \neq m.$$

1.1 Základní pojmy

Příklad 1.15

Rozhodněte, zda funkce $f(t) = \frac{1+2i}{(t-1)^{1/3}}$ je integrovatelná s kvadrátem na intervalu $[1, 2]$, tedy zda-li je prvkem $\mathbf{L}^2([1, 2])$.

Řešení

$\int_1^2 \left| \frac{1+2i}{(t-1)^{1/3}} \right|^2 dt = 5 \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{dt}{(t-1)^{2/3}} = 15$. Funkce $f(t)$ je na intervalu $[1, 2]$ integrovatelná s kvadrátem, tj. $f \in \mathbf{L}^2([1, 2])$.

1.1 Základní pojmy

Příklad 1.16

Ověřte, že systém funkcí

$$\{1/2, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \cos(3t), \sin(3t), \dots\} \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$$

je ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení

Výpočtem se snadno přesvědčíme, že tato soustava (reál.) funkcí je ortogonální:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(nt) dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos(nt) dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \cos(nt) dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = 0 \quad \text{pro } \forall m, n \ (m \neq n).$$

Daná soustava funkcí není však ortonormální, protože již pro první funkci $f_1 = 1/2$

$$\text{je } \|f_1\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} dt \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \neq 1.$$

1.1 Základní pojmy

Příklad 1.17

Zjistěte, zda systém tvořený funkcemi $\{f_n = e^{int}, n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$ je ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení

Zde na rozdíl od předchozího příkladu při vytvoření skalárního součinu dvou funkcí musíme vzít v úvahu druhou funkci komplexně sdruženou:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = 0, \quad n \neq m.$$

Posloupnost funkcí $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$ tvoří ortogonální systém.

Protože $\|e^{int}\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-int} dt \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$, potom posloupnost funkcí

$\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tvoří systém ortonormální.

IT(DT) a systém testovacích funkcí

IT (DT) jsou nástrojem pro analýzu, zpracování a uchování informací z rozsáhlých souborů spojitych (diskrét.) dat představujících zkoumané veličiny z různých inženýr. aplikací.

Společným principem IT je obecně „poměření“ zkoumaného vstupu $f(t) \in \mathbf{L}^2(I)$ s množinou testovacích funkcí tvořících jádro transformace $Q = \{\chi_q(t) = \chi(t, q), q \in \Lambda\}$ na množině I , kde Λ je vybraná množina indexů.

Chceme-li při analýze odlišit dvě funkce, musí být Q nekonečná \Rightarrow výběr vhodného systému testovacích funkcí pro danou aplikaci.

Společné požadavky:

- * jednoduchost algoritmů pro výpočet přímé i zpětné transformace,
- * dostatečná univerzálnost algoritmu,
- * jednoznačnost a stabilita algoritmu (malým změnám ve vstupu odpovídají malé změny na výstupu).

1.2 Obecný pohled na IT

Multiplikativní systém

- umožňuje splnění požadavků skrze multiplikativní integrál, pro analýzu ve smyslu dekompozice tzv. **přímou IT** ve tvaru

$$T\{f\} = (\mathbf{T}f)(q) = \hat{f}(q) = F(q) = \int_I f(t) \overline{\chi(t, q)} dt, \quad (1)$$

pro analýzu ve smyslu syntézy tzv. **zpětnou IT** ve tvaru

$$T^{-1}\{F\} = (\mathbf{T}^{-1}F)(t) = f(t) = \int_{\hat{I}} F(q) \chi(t, q) dq, \quad (2)$$

kde množina funkcí $\chi(t, q)$ tvoří tzv. multiplikativní systém $Q = \{\chi(t, q)\} \subset \mathbf{L}^2(I)$.

Definice 1.18

Multiplikativní systém na $I = [a, b]$ je úplná ortonormální soustava funkcí $Q = \{\chi_n(t), n = 0, 1, \dots\} \subset \mathbf{L}^2(I)$ pro něž platí, že pro každé $\chi_k, \chi_m \in Q, k \neq m$ soustava Q obsahuje jak jejich součin $\chi_k \cdot \chi_m \in Q$, tak podíl $\frac{1}{\chi_k} \in Q$.

Poznámka 1.19

Příklady diskretních ortonormálních systémů: Rademacherova, Haarova, Walshova a Fourierova soustava (detailněji viz. níže).

1.2 Obecný pohled na IT

2 úrovně diskretizace

Diskretizaci IT je třeba vidět na dvou úrovních:

- První - přechod od prostoru $\mathbf{L}^2(I)$ k prostoru \mathbf{l}^2 - spočívá ve formálním nahrazení integrálu integrálním součtem s dělením určeným vzorkovací frekvencí $\frac{1}{T}$ (T je perioda vzorkování)

$$F_n = c_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \overline{\chi_{n,k}}, \quad (3)$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \chi_{n,k}, \quad (4)$$

kde $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je vstupní posloupnost vzniklá vzorkováním $f(t)$ ($f(nT) = f(t_n) = f_n$) posloupností δ -funkcí a $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je výstupní obrazová posloupnost a $\{\chi_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ je diskretizovaná k -tá funkce multiplikativního systému. Vztah (3) nazveme **diskretizovanou přímou IT** a vztah (4) **diskretizovanou zpětnou IT**.

1.2 Obecný pohled na IT

- Druhá - přechod od prostoru \mathbf{I}^2 k prostoru $\mathbf{I}^2(N)$ - mající již význam pro praktické využití při numerickém počítání spočívá v tzv. konečnosti sumace, tj. sumace probíhá v mezích od 0 do $N - 1$, kde N je počet vzorků ($\frac{1}{N} \sim T$). Obdržíme takto

$$F_n = c_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \overline{\chi_{n,k}}, \quad (5)$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \chi_{n,k}, \quad (6)$$

kde $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ je vstupní konečná posloupnost (vektor \mathbf{f}), $\{F_n\}_{n=0}^{N-1}$ je výstupní obrazová konečná posloupnost (vektor \mathbf{F}) a $\{\chi_n\}_{n=0}^{N-1}$ je diskretní multiplikativní systém (množina vektorů χ_n). Vztah (5) nazveme **přímou DT (přímou zobecněnou DFT)** a vztah (6) **zpětnou DT (zpětnou zobecněnou DFT)**. (Pozor! DT - diskretní transformace není totéž co diskretizovaná IT).

Maticový zápis

Snaha o efektivní vyčíslení DT vede k **maticovým zápisům**

$$\mathbf{c} = \mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{f},$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c},$$

kde \mathbf{f} je vektor vstupních dat, \mathbf{F} je vektor výstupních dat (obrazu) a \mathbf{M} je transformační matice, obsahující jakožto řádky diskretizované báze (ortonormální) funkce, tj. n -tý řádek odpovídá χ_n .

Věta 1.20

Nechť $f(t) \in \mathbf{L}^2(I)$, potom rozvoj $f(t)$ podle multiplikativního (úplného ortonormálního) systému $\{\chi_n(t)\} = \{\varphi_n(t)\}$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \chi_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(t), \quad c_n = \langle f, \varphi_n \rangle \quad (7)$$

konverguje k $f(t)$ skoro všude na intervalu I . Vztah (7) nazýváme **zobecněnou FŘ**. Platí, že každý prvek f Hilbertova prostoru (zde $\mathbf{L}^2(I)$) lze vyjádřit ve tvaru zobecněné FŘ.

Poznámka 1.21

- Konvergence $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(t)$ k $f(t)$ skoro všude na intervalu I znamená, že existuje množina $M \subset I$ míry nula taková, že pro $\forall t \in I \setminus M$ a $N \rightarrow \infty$ platí

$$\left\| \sum_{n=0}^N \langle f(t), \varphi_n(t) \rangle \varphi_n(t) - f(t) \right\| = \left[\int_{I \setminus M} \left(\sum_{n=0}^N \langle f(t), \varphi_n(t) \rangle \varphi_n(t) - f(t) \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0.$$

- Z (7) plyne další pohled na IT jako na hledání souřadnic funkce $f(t)$ z vektorového prostoru $\mathbf{L}^2(I)$ v ortonormální bázi tvořené funkcemi $\varphi_n(t)$ - pro nalezení souřadnic vektoru v ortonormální bázi stačí spočítat jen příslušné skalární součiny $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ (jednoduchost algoritmů).
- Relace mezi zobecněnou FRĚ a zobecněnou DFT je pak zřejmá ze vztahů (7) a (5) - n -tý koeficient diskrétní zobecněné FRĚ je totožný s n -tým koeficientem zobecněné DFT.

- Konvoluce je velmi důležitý pojem v teorii IT.
- Tento nástroj se používá k filtraci vstupních signálů, při analýze přenosových jevů, při řešení inverzních úloh apod.
- Lze ukázat (vhodnou substitucí v konvolučním integrálu), že každá IT (Laplaceova, Fourierova, Hilbertova, Stieltjesova) je speciálním případem konvoluce.
- Zároveň na konvoluci dvou funkcí lze nahlížet jako na nejobecnější IT, kde funkce $f(\tau)$ je originálem a $g(t - \tau)$ jádrem IT.

2.1 Konvoluce funkcí

Definice 2.1

Nechť $f(t)$ a $g(t)$ jsou alespoň po částech spojitě komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, +\infty)$. Konvolucí těchto dvou funkcí nazýváme funkci $h(t)$ definovanou konvergentním (konvoluční resp. konvolutorní) integrálem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = (f \star g)(t) = f \star g. \quad (8)$$

Poznámka 2.2

Pokud $t \in (0, +\infty)$, pak konvoluce těchto funkcí je dána

$$h(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (9)$$

postačující podm. pro konverenci konv. integrálu je $f(t)$ a $g(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ resp. $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+)$.

2.1 Konvoluce funkcí

Vlastnosti:

- 1 konvoluce spojitých funkcí $f(t)$ a $g(t)$ na \mathbb{R} je funkce $h = f \star g$ spojitá na \mathbb{R} ,
- 2 linearita (distributivita vzhledem ke sčítání a násobení konstantou):
 $f \star (g_1 + g_2) = f \star g_1 + f \star g_2$ a $f \star (cg) = c(f \star g)$,
- 3 komutativita: $f \star g = g \star f$,
- 4 asociativita: $f \star (g_1 \star g_2) = (f \star g_1) \star g_2 = f \star g_1 \star g_2$,
- 5 $|f \star g| \leq |f| \star |g|$,
- 6 jsou-li funkce $f(t), g(t)$ originály a existují-li jejich integrální obrazy (Laplaceův, Fourierův, apod.) $F(s), G(s)$, pak i konvoluce $h = f \star g$ je originál, jejíž integrální obraz se rovná součinu jejich obrazů, tj.
 $H(s) = F(s)G(s)$ - tzv. konvoluční teorém.
- 7 redukce oscilací funkce $f(t)$ při vhodné volbě jádra $g(t)$, výsledná konvoluce $h(t)$ mění své znaménko na intervalu $(-\infty, +\infty)$ resp. $(0, +\infty)$ nejvíce tolikrát, kolikrát mění své znaménko funkce $f(t)$.

2.2 Konvoluce posloupností

Vycházejme ze dvou funkcí $f(z)$ a $g(z)$ regulárních (holomorfních) na množině Ω , které lze rozvinout na mezikruží $M = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\} \subset \Omega$ se středem v bodě z_0 v konvergentní mocninné Laurentovy řady

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = A(z), \quad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n = B(z).$$

$\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ jsou posloupnosti tvořené koeficienty mocninných řad a na funkce $A(z)$, $B(z)$ můžeme nahlížet jako na obrazy těchto posloupností při tzv. Laurentově transformaci s jádrem $(z - z_0)^n$. V oboru konvergence, tj. pro $\forall z \in M$ lze vytvořit součin těchto řad

$$\begin{aligned} h(z) = f(z)g(z) = A(z)B(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n = C(z), \end{aligned}$$

kde c_n jsou porovnáním koeficientů u stejných mocnin $(z - z_0)^n$ dány vztahem

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} b_k, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

2.2 Konvoluce posloupností

Definice 2.4

Nechť $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ jsou posloupnosti. Posloupnost $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ určenou vztahem (10) nazveme konvolucí dvou posloupností $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ a zapisujeme ji $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{(a \star b)_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Poznámka 2.5

Posloupnost $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, která je konvolucí posloupností $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, má za obraz $C(z)$, který se rovná součinu obrazů příslušných posloupností $A(z)$, $B(z)$, tj. $C(z) = A(z)B(z)$.

2.2 Konvoluce posloupností

Poznámka 2.6

Redukuje-li se Laurent. řada na svou regulární část, tzv. Taylorovu řadu se středem v bodě $z_0 = 0$ a konvergentní na množině $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_2\}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = A(z), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = B(z),$$

pak součin těchto řad, obraz konvoluce posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$, bude

$$h(z) = f(z)g(z) = A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = C(z),$$

kde koeficienty c_n jsou dány vztahem

$$c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n-k} b_k, \quad n - k \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

2.2 Konvoluce posloupností

Poznámka 2.6

Tentýž vztah určuje konvoluci posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$, jejichž obrazy $A(z)$, $B(z)$ jsou bez absolutního členu hlavními částmi Laurent. rozvoji se středem v bodě $z_0 = 0$ a konvergentní na množině $M = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z|\}$ (viz. jednostranná Z-transformace)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} = A(z), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^{-n} = B(z),$$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{-n} = A(z)B(z) = C(z).$$

2.3 Konvoluce vektorů

Definice 2.7

Nechť vektor \mathbf{a} má N_1 složek $(a_0, \dots, a_{N_1-1})^T$, vektor \mathbf{b} má N_2 složek $(b_0, \dots, b_{N_2-1})^T$, pak vektor \mathbf{c} mající $N_1 + N_2 - 1$ složek $(c_0, \dots, c_{N_1+N_2-1})^T$, které vypočteme jako

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k, \quad n - k \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_1 + N_2 - 1 \quad (12)$$

nazveme konvolucí vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} .

Příklad 2.9

Nechť vektor \mathbf{a} má $N_1 = 8$ složek $(1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5)^T$ a vektor \mathbf{b} má $N_2 = 3$ složky $(6, 1, 3)^T$, pak konvoluce \mathbf{c} bude mít $8 + 3 - 1 = 10$ složek $(6, 19, 42, 27, 62, 61, 53, 58, 17, 15)^T$.

2.3 Konvoluce vektorů

Poznámka 2.8

Nechť \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} jsou sloupcové vektory. Konvoluci vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} lze vyjádřit maticově

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{M}_A \mathbf{b} = \mathbf{M}_B \mathbf{a},$$

kde matice \mathbf{M}_A řádu $(N_1 + N_2 - 1, N_2)$ je tvořená komponentami vektoru \mathbf{a} , matice \mathbf{M}_B řádu $(N_1 + N_2 - 1, N_1)$ je tvořená komponentami vektoru \mathbf{b} :

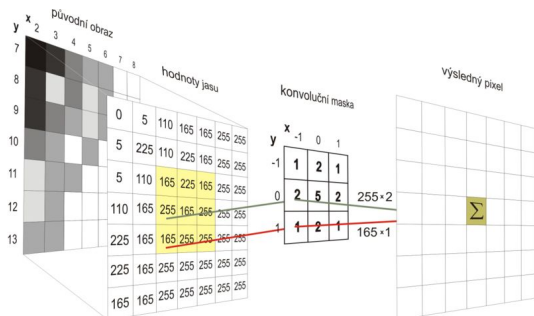
$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N_1-1} & a_{N_1-2} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_{N_1-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N_2-1} & b_{N_2-2} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_{N_2-1} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Vektor \mathbf{a} často reprezentuje vstupní signál, \mathbf{c} výstupní signál a \mathbf{b} diskretní časovou charakteristiku zvanou diskretní filtr, ze kterého většinou sestavujeme matici \mathbf{M}_B pro její výpočet $\mathbf{c} = \mathbf{M}_B \mathbf{a}$.

2.3 Konvoluce dvourozměrných vektorů

Diskrétní 2D konvoluce $\mathbf{c} = \mathbf{a} \star \mathbf{b}$ využívaná při zpracování dvourozměrného obrazu v počítačové grafice má tvar

$$C_{m,n} = \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k a_{m-i,n-j} b_{i,j}.$$



Obrázek: Princip dvourozměrné konvoluce [10]

2.3 Konvoluce dvourozměrných vektorů

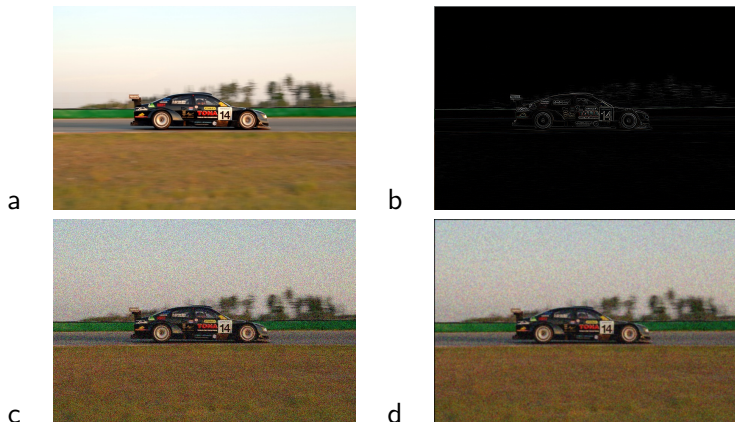
Speciální konvoluční masky mohou sloužit k rozostření obrazu (Gaussovskému zašumění), jeho zaostření (filtraci) či detekci hran (maska aproximuje derivaci):

$$\mathbf{b}_{gauss} = \frac{1}{159} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{filt1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{filt2} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{filt3} = \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{edge1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{edge2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3 Konvoluce dvourozměrných vektorů



Tabulka: Obrázek originální(a), zašuměný(c), odšuměný(d) a s detekovanými hranami(b)

2.3 Konvoluce dvourozměrných vektorů

Algoritmus 2.1

```
-----Gauss.zasumeni -----
a=imread('Tatra.jpg');
b=[2 4 5 4 2; 4 9 12 9 4; 5 12 15 12 5; 4 9 12 9 4; 2 4 6 4 2]/159;
c(:,:,1)=conv2(a(:,:,1),b);
c(:,:,2)=conv2(a(:,:,2),b);
c(:,:,3)=conv2(a(:,:,3),b);
for k=1:size(c,3)
    for j=1:size(c,2)
        for i=1:size(c,1)
            c(i,j,k)=double(c(i,j,k))*195/255+120*(rand(1,1)-0.5);
        end
    end
end
imwrite(c,'TatraGauss.jpg','Quality',100);
-----Filtrace-----
a=c;
%b=[1 1 1; 1 1 1; 1 1 1]/9;
%b=[1 2 1; 2 4 2; 1 2 1]/16;
b=[1 4 6 4 1; 4 16 24 16 4; 6 24 36 24 6; 4 16 24 16 4; 1 4 6 4 1]/256;
c(:,:,1)=conv2(a(:,:,1),b);
c(:,:,2)=conv2(a(:,:,2),b);
c(:,:,3)=conv2(a(:,:,3),b);
imwrite(c,'TatraFilt.jpg','Quality',100);
-----Detekce hran-----
a=imread('Tatra.jpg');
b=[0 1 0; 1 -4 1; 0 1 0];
%b=[1 1 1; 1 -8 1; 1 1 1];
c(:,:,1)=conv2(a(:,:,1),b);
c(:,:,2)=conv2(a(:,:,2),b);
c(:,:,3)=conv2(a(:,:,3),b);
imwrite(c,'TatraEdge.jpg','Quality',100);
```

3 Diskrétní ortonormální systémy, zobecněná diskrétní Fourierova transformace

3.1 Rademacherův systém

Definice 3.1

Rademacherova ortogonální soustava je posloupnost funkcí $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{L}^2(0, 1)$ definovaná na intervalu $x \in [0, 1]$:

$$r_n(x) = \begin{cases} +1 & \text{pro } \frac{k-1}{2^n} < x < \frac{k}{2^n}, \text{ } k \text{ je liché} \\ -1 & \text{pro } \frac{k-1}{2^n} < x < \frac{k}{2^n}, \text{ } k \text{ je sudé} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n.$$

S vyjímkou bodů $x = \frac{k}{2^n}$ pro tuto soustavu platí vztah: $r_n(x) = \text{sgn} \sin(2^n \pi x)$.
Podělíme-li každou funkci $r_n(x)$ hodnotou $\|r_n(x)\|$, získáme soustavu ortonormální.

Definice 3.2

Diskrétní Rademacherův ortogonální systém v $\mathbf{l}^2(N)$, $N = 2^m$ je tvořen

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{1}, \quad \{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^m, \quad \mathbf{r}_n = [-\mathbf{1}]^{\mathbf{p}^{m-n+1}},$$

kde \mathbf{p}_k jsou vektory tvořeny koeficienty p_k z dvoj. rozkladu $z = \sum_{k=1}^m p_k 2^{k-1}$, kde $z = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Podělíme-li vektor \mathbf{r}_n hodnotou \sqrt{N} , získáme soustavu ortonormální.

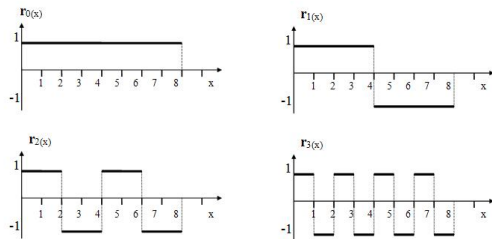
3.1 Rademacherův systém

Pro $N = 8$ pak získáme ortonormální bázi

z	p_3	p_2	p_1	r_0	r_1	r_2	r_3
0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	-1
2	0	1	0	1	1	-1	1
3	0	1	1	1	1	-1	-1
4	1	0	0	1	-1	1	1
5	1	0	1	1	-1	1	-1
6	1	1	0	1	-1	-1	1
7	1	1	1	1	-1	-1	-1
Mocn.	2^2	2^1	2^0				

$$\mathbf{M}_R = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} r_0^T \\ r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.1 Rademacherův systém



Obrázek: Grafická reprezentace ortogonální Rademacherovy báze

Algoritmus 3.1

```
function [R,P]=rad(n)
P=[];
N=2^n;
for i=0:N-1
    p=dec2bin(i,n);
    P(:,i+1)=bin2dec(p');
end
P=[zeros(1,N);P];
R=(-1).^P;
```

3.1 Walshův (Walsh-Paleyho) systém

Definice 3.3

Diskrétní Walshův ortogonální systém v $\mathbb{I}^2(N)$, $N = 2^m$ je tvořen součinem Rademacherových funkcí

$$\{\mathbf{W}_n\}_{n=0}^{N-1}, \quad \mathbf{W}_n = \prod_{n=0}^m [r_n]^{p_n},$$

kde p_k jsou určeny z dvojkového rozkladu čísla $z = \sum_{k=0}^{m-1} p_k 2^{k-1}$, $p_0 = 0$, kde $z = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Podělíme-li každý vektor \mathbf{W}_n hodnotou \sqrt{N} , získáme soustavu ortonormální.

Algoritmus 3.2

```
function [W,P]=walsh(n)
N=2^n;
[R,P]=rad(n);
P=flipud(P);
P=[P(size(P,1),:);
   P(1:size(P,1)-1,:)];

W=ones(N,N);
for i=1:N
    for j=1:size(P,1)
        W(i,:)=W(i,:).*(R(j,:).^P(j,i));
    end
end
```

3.2 Walshův (Walsh-Paleyho) systém

Index bodu	Dvojkový rozklad			$r_0^{p_0}$	$r_1^{p_1}$	$r_2^{p_2}$	$r_3^{p_3}$	$W_n(x)$
	p_3	p_2	p_1					
0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	r_1	1	1	r_1
2	0	1	0	1	1	r_2	1	r_2
3	0	1	1	1	r_1	r_2	1	$r_1 r_2$
4	1	0	0	1	1	1	r_3	r_3
5	1	0	1	1	r_1	1	r_3	$r_1 r_3$
6	1	1	0	1	1	r_2	r_3	$r_2 r_3$
7	1	1	1	1	r_1	r_2	r_3	$r_1 r_2 r_3$

$$\mathbf{M}_W = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_0^T \\ W_1^T \\ W_2^T \\ W_3^T \\ W_4^T \\ W_5^T \\ W_6^T \\ W_7^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.3 Walshův modifikovaný systém

Definice 3.4

Diskrétní Walshova modifikovaná báze vznikne rekurentně z diskrétní Walshovy báze přeuspořádáním podle vzorce

$$\tilde{\mathbf{W}}_n = \tilde{\mathbf{W}}_{2^{j+p}} = \mathbf{W}_j + (-1)^{j+p} \mathbf{W}_j, \quad p = 0, 1; j = 0, 1, \dots, k; N = 2^k.$$

Pro $N = 8$ systém vypadá následovně

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{W}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_0^T \\ \tilde{\mathbf{W}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{W}}_2^T \\ \tilde{\mathbf{W}}_3^T \\ \tilde{\mathbf{W}}_4^T \\ \tilde{\mathbf{W}}_5^T \\ \tilde{\mathbf{W}}_6^T \\ \tilde{\mathbf{W}}_7^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Algoritmus 3.3

```
function [Wm]=walshm(n)
N=2^n;
[W,P]=walsh(n);
for i=1:size(W,2)-1
    S(:,i)=W(:,i)+W(:,i+1);
end
for i=1:N    Z(i)=N-nnz(S(i,:)); end
for i=1:N    Wm(i,:)=W(Z==i,:); end
```

3.4 Haarův systém

Definice 3.5

Haarův ortonormální systém $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{L}^2(0, 1)$ je definován na intervalu $x \in [0, 1]$:

$$h_n(x) = h_{mk}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \frac{2k-2}{2^{m+1}} < x < \frac{2k-1}{2^{m+1}} \\ -\sqrt{2^m}, & \frac{2k-1}{2^{m+1}} < x < \frac{2k}{2^{m+1}} \\ 0 & \text{pro jiná } x \in [0, 1] \end{cases},$$

$$n = 2^m + k, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, 2^m.$$

Definice 3.6

Diskretizací funkcí $h_n(x)$ sestavíme diskrétní Haarovu ortogonální soustavu $\mathbf{h}_n \in \mathbf{l}^2(N)$. Podělíme-li každý vektor \mathbf{h}_n hodnotou \sqrt{N} , získáme diskrétní soustavu ortonormální matice \mathbf{M}_H .

3.4 Haarův systém

Pro $2^3 = 8$ subintervalů:

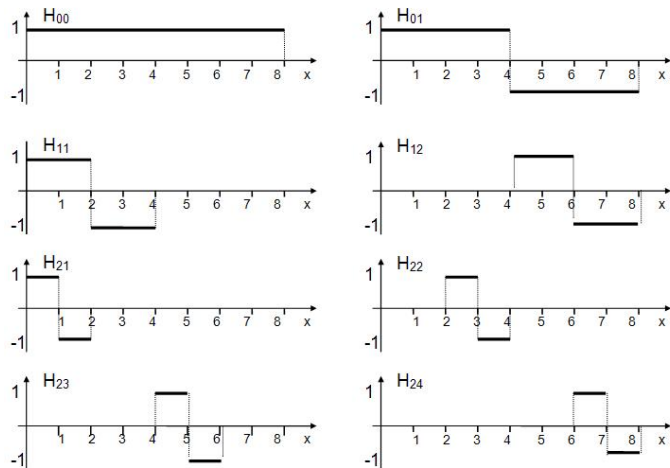
$$\mathbf{M}_H = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} h_0^T \\ h_1^T \\ h_2^T \\ h_3^T \\ h_4^T \\ h_5^T \\ h_6^T \\ h_7^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Algoritmus 3.4

```
function [H]=haar(n)
```

```
N=2^n;
k=1/N;
H=zeros(N);
H(1,:)=1;
x=k/2:k:(1-k/2);
for m=0:n-1
    for k=1:2^m
        H(2^m+k,:)=sqrt(2^m)*(((2*k-2)/(2^(m+1))<x&x<(2*k-1)/(2^(m+1)))-...
            ((2*k-1)/(2^(m+1))<x&x<(2*k)/(2^(m+1))));
    end
end
H=H/sqrt(N);
```

3.4 Haarův systém



Obrázek: Grafická reprezentace ortogonální Haarovy báze

3.5 Diskrétní zobecněná FŘ a zobecněná DFT

Věta 3.7

Nechť $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ je ortonormální báze prostoru $\mathbb{I}^2(N)$ a necht $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$ je libovolná číselná posloupnost (v \mathbb{R} nebo v \mathbb{C}), pak platí

$$\left\| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 < \infty.$$

Důkaz

Zřejmý, plyne z ortonormality $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$:

$$\left\| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n \right\|^2 = \left\langle \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n, \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 < \infty.$$

Věta 3.8

Nechť $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ je ortonormální bázi prostoru $\mathbf{I}^2(N)$, $N \in \mathbb{N}$, pak každý prvek $\mathbf{f} \in \mathbf{I}^2(N)$ lze rozvinout v konvergentní konečnou řadu zvanou **diskrétní zobecněná FŘ**

$$\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi_n, \quad \text{kde} \quad c_n = \langle \mathbf{f}, \varphi_n \rangle, \quad (13)$$

vektor \mathbf{c} koeficientů c_n nazveme **zobecněnou DFT** vektoru \mathbf{f} . Tento mnohočlen s Fourierovskými koeficienty má ze všech mnohočlenů v bázi $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ nejmenší střední kvadratickou odchylku od \mathbf{f} , tj. je nejlepší aproximací funkce \mathbf{f} v normě \mathbf{I}^2

$$\left\| \mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi_n \right\| = \min_{\forall a_n} \left\| \mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n \right\|.$$

3.5 Diskrétní zobecněná FŘ a zobecněná DFT

Důkaz

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n \right\|^2 &= \left\langle \left(\mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n \right), \left(\mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n \right) \right\rangle = \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \langle \mathbf{f}, \varphi_n \rangle - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \langle \varphi_n, \mathbf{f} \rangle + \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle - 2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \langle \mathbf{f}, \varphi_n \rangle + \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = \\ &= \|\mathbf{f}\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 - 2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n c_n + \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 - \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 = \\ &= \|\mathbf{f}\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - c_n)^2 - \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2. \end{aligned}$$

Minima je dosaženo pro $a_n = c_n$, tj. $\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - c_n)^2 = 0$, pak

$$\min_{\forall a_n} \left\| \mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n \right\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 \geq 0 \Rightarrow \|\mathbf{f}\|^2 \geq$$

$\sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2$... Besselova nerovnost přecházející při $N \rightarrow \infty$ v Parsevalovu rovnost $\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$.

3.5 Diskrétní zobecněná FŘ a zobecněná DFT

Definice 3.9

Nechť $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ tvoří ortonormální bázi $\mathbf{I}^2(N)$, $N \in \mathbb{N}$ (Walshovu, modifikovanou Walshovu, Haarovu, Fourierovu) a $\mathbf{f} \in \mathbf{I}^2(N)$. Pak **přímá zobecněná DFT** je definována maticově vztahem

$$\mathbf{c} = \mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{f} \quad (14)$$

a **zpětná zobecněná DFT**

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c}, \quad (15)$$

kde $n + 1$. řádek (indexováno od 1) transformační matice \mathbf{M} je tvořen hodnotami φ_n . Navíc platí, že $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$.

Poznámka 3.10

Spočtením součinu matice a vektoru se vyčíslí N skalárních součinů - v případě diskrétního ortonormálního systému $\langle \mathbf{f}, \varphi_n \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \overline{\varphi_{n,k}}$ vektorů \mathbf{f}, φ_n z $\mathbf{I}^2(N)$ odpovídajících skalárním součinům $\langle f(t), \varphi_n(t) \rangle = \int_I f(t) \overline{\varphi_n(t)} dt$ funkce $f(t)$ a funkce úplného ortonormálního systému $\varphi_n(t)$ z $\mathbf{L}^2(I)$.

3.5 Diskrétní zobecněná FŘ a zobecněná DFT

Příklad 3.11

Zvolme vektor o 8 složkách $\mathbf{f} = (3, 1, 6, 2, 3, 7, 9, 5)^T$. Najděte jeho Walshovu, modifikovanou Walshovu a Haarovu transformaci.

Řešení

Postupně vytvoříme jednotlivé transformační matice \mathbf{M} (Walshovu $\mathbf{M} = \mathbf{M}_W$, modifik. Walshovu $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\tilde{W}}$, Haarovu $\mathbf{M} = \mathbf{M}_H$) a provedeme transformaci $\mathbf{c} = \mathbf{M}\mathbf{f}$ a inverzní transformaci $\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{M}^T\mathbf{c}$, viz. tabulka.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c}$	3	1	6	2	3	7	9	5
\mathbf{c}_{Walsh}	36	-12	-8	0	6	6	-10	6
\mathbf{c}_{MWalsh}	36	-12	0	-8	-10	6	6	6
\mathbf{c}_{Haar}	36	-12	$-4\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	4	8	-8	8

Tabulka: Zobecněné DFT

3.5 Diskrétní zobecněná FŘ a zobecněná DFT

Algoritmus 3.5

```
n=input('Zadej n pro 2^n bodu:'); N=2^n; T=input('Zadej transformaci: ');
if(T=='R') M=rad(n); end; if(T=='W') M=walsh(n); end
if(T=='Wm') M=walshm(n); end; if(T=='H') M=haar(n); end; if(T=='F') M=four(n); end
% Vygenerovani vektoru
x1=0*pi:2*pi/N:2*pi; x2=2*pi:2*pi/N:4*pi; x3=4*pi:2*pi/N:6*pi;
f=sin([x1 x2 x3]'); f=f(1:N);
% f=[sin(13*x1)+0.8*sin(23*x1)+0.6*sin(33*x1)
% sin(13*x2)+0.8*sin(23*x2)+0.6*sin(33*x2)
% sin(13*x3)+0.8*sin(23*x3)+0.6*sin(33*x3)]';
% f=[sin(13*x1) 0.8*sin(23*x2) 0.6*sin(33*x3)]';
figure; plot(f); title('Signal')
% Transformace a Porovnaní s fft
c=M*f; figure; plot(abs(c(1:N))); title('Spektrum')
cf=fft(f); figure; plot(abs(cf(1:N))); title('Spektrum-fft')
% Zanesení 10-procentní chyby
cerr=c+0.1*max(abs(c))*(rand(N,1)-0.5);
figure; plot(abs(cerr(1:N))); title('Spektrum zatiz. chybou')
% Zpetná transformace(rekonstrukce) chybou koef.
ferr=M*cerr; figure; plot(real(ferr)); title('Signal-chyb. koef. ')
% Tichonovova regularizace
e=2;
for i=1:N
    alfa=0.01; creg1(i,1)=(cerr(i,1))/(1+alfa*(i^e));
    alfa=0.001; creg2(i,1)=(cerr(i,1))/(1+alfa*(i^e));
    alfa=0.0001; creg3(i,1)=(cerr(i,1))/(1+alfa*(i^e));
end
freg1=M*creg1; freg2=M*creg2; freg3=M*creg3;
figure; plot(real(freg1)); title('Signal-freg1');
figure; plot(real(freg2)); title('Signal-freg2');
figure; plot(real(freg3)); title('Signal-freg3');
```

4 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) a její rychlá verze (FFT)

4.1 Připomenutí spojité FT

Spojitá přímá a zpětná FT $F(\omega)$ funkce $f(t)$, která byla publikována Josephem Fourierem r. 1822 v Paříži, jsou dány formulemi

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (16)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (17)$$

Tyto vztahy lze odvodit z FŘ skrz limitní proces zvětšování periody $T \rightarrow \infty$, což umožní využít tuto metodu i pro neperiodické signály.

Požadavky na funkci $f(t)$: absolutní integrovatelnost nebo její rozvinutelnost ve FŘ na každém intervalu $[a, b]$ dána tzv. Dirichletovými podmínkami.

Integrál pak vyjadřuje funkci $f(t)$ ve všech bodech spojitosti. Obecně FT může existovat k funkcím, které uvedené podmínky nespĺňují, a dokonce i k distribucím (regulárním, temperovaným).

Definice 4.1

Nechť $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T \in \mathbb{I}^2(N)$ a systém

$\{\varphi_n = (\varphi_{n,0}, \varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,N-1})^T\}_{n=0}^{N-1}$, $\varphi_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}nk}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{I}^2(N)$.

Přímá DFT (klasická, trigonometrická) vektoru \mathbf{f} je definována jako vektor $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T$, jehož n -tá komponenta (koeficient n -té harmonické) je dána vztahem

$$c_n = \langle \mathbf{f}, \varphi_n \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad (18)$$

a **zpětná DFT** vektoru \mathbf{c} je definována jako vektor \mathbf{f} , jehož n -tá komponenta je dána vztahem

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (19)$$

Poznámka 4.2

DFT = numer. výpočet koeficientů FŘ obdélníkovou metodou při ekvidist. vzorkování.

4.2 DFT

Definice 4.3

Nechť \mathbf{c} je DFT signálu \mathbf{f} . Posloupnost $|\mathbf{c}_n|$ nazveme Fourierovským amplitudovým spektrem a posloupnost $\arg \mathbf{c}_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$ Fourierovským spektrem fázovým.

Maticový zápis:

Označíme-li $w = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ a $e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = w^{nk}$, pak transformační matice:

$$\mathbf{M}_F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & \dots & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ w^0 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w^0 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

\mathbf{M}_F je tvořená ortonormální soustavou funkcí na intervalu $[0, (N - 1)\Delta t]$, kde $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Přímá DFT je pak dána vztahem:

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_F \mathbf{f} \quad (20)$$

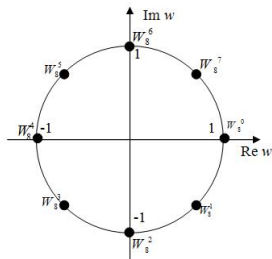
a zpětná DFT:

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}_F^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{M}_F^T \mathbf{F}. \quad (21)$$

4.3 Vlastnosti matice \mathbf{M}_F

- \mathbf{M}_F je regulární, symetrická, tj. $\exists \mathbf{M}_F^{-1} : \mathbf{M}_F \mathbf{M}_F^{-1} = \mathbf{M}_F^{-1} \mathbf{M}_F = \mathbf{I}, \mathbf{M}_F = \mathbf{M}_F^T$.
- \mathbf{M}_F^{-1} lze vyjádřit pomocí vztahu $\mathbf{M}_F^{-1} = \mathbf{M}_F^*$, $w_{kn} = w_{nk}^* = \overline{w_{nk}}$.
- \mathbf{M}_F je unitární tj. $(\mathbf{M}_F^T)^* = \mathbf{M}_F^{-1}$.
- k -tý řádek $\mathbf{w}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} (w^0, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(N-1)k})$, $k = 2, 3, \dots, N-1$ je $\frac{1}{\sqrt{N}}$ násobkem k -té mocniny vektoru $\sqrt{N} \mathbf{w}_1 = (w^0, w^1, w^2, \dots, w^{N-1})$ tvořícího druhý řádek \mathbf{M}_F .
- Prvky w^k , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ jsou kořeny rovnice $z^N - 1 = 0$. Číslo $z = w^k = e^{-\frac{2\pi}{N}ki}$ leží v komplexní rovině na kružnici o poloměru 1 a platí
$$\sum_{k=0}^{N-1} w^{kn} = \begin{cases} N & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0 \end{cases}, \text{ a } \prod_{k=0}^{N-1} w^{kn} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$
- Pro $n = \frac{N}{2}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ resp. $k = \frac{N}{2}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ platí, že $nk = \frac{N}{2}k$ resp. $nk = n\frac{N}{2}$, pak $w^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k\frac{N}{2}} = e^{-i\pi k} = (-1)^k$ resp. $w^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}n\frac{N}{2}} = e^{-i\pi n} = (-1)^n$
- Funkce w^{kn} je periodická s periodou mN , $m \in \mathbb{Z}$ tzn., že
$$w^{kn+mN} = e^{-i\frac{2\pi}{N}(kn+mN)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} e^{-i\frac{2\pi}{N}mN} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \cdot 1 = w^{kn}.$$
- \mathbf{M}_F je permutační periodická matice 4. stupně: $\mathbf{M}_F^2 = \mathbf{P}$, $\mathbf{M}_F^4 = \mathbf{I}$, kde \mathbf{P} je permutační matice řádu N a $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

4.3 Vlastnosti matice M_F



Obrázek: Komponenty báze DFT

Algoritmus 4.1

```
function [F]=four(n)
N=2^n;
w=exp(2i*pi/N);
for i=1:N
    for j=1:N
        F(i,j)=w^((i-1)*(j-1));
    end
end
F=F/sqrt(N);
```

4.3 Vlastnosti matice M_F

Příklad 4.6

Nechť $\mathbf{f} = (1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5)^T$. Nalezni DFT signálu \mathbf{f} a ověř jednoznačnost transformace zpětnou DFT.

Řešení

$$w^0 = 1 = -w^4, \quad w^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = -w^5, \quad w^2 = -i = -w^6, \quad w^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = -w^7$$

$$(w^0, w^1, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6, w^7) = (1, w^1, w^2, w^3, -1, -w^1, -w^2, -w^3)$$

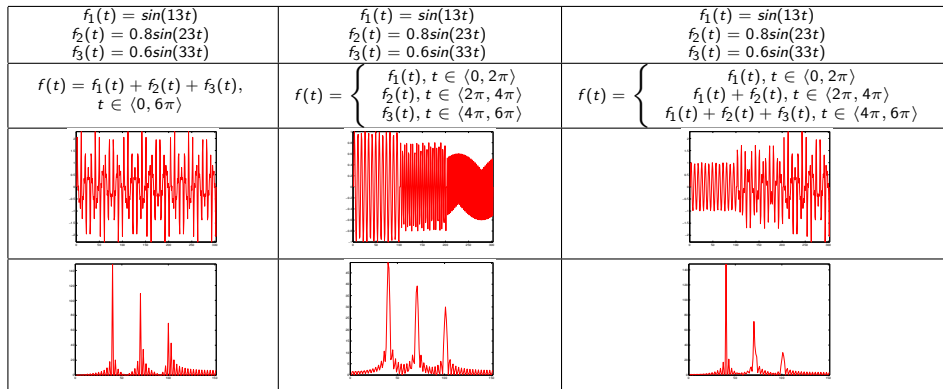
$$M_F = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 & -1 & -w^1 & -w^2 & -w^3 \\ 1 & w^2 & -1 & -w^2 & 1 & w^2 & -1 & -w^2 \\ 1 & w^3 & -w^2 & w^1 & -1 & -w^3 & w^2 & -w^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -w^1 & w^2 & -w^3 & -1 & w^1 & -w^2 & w^3 \\ 1 & -w^2 & -1 & w^2 & 1 & -w^2 & -1 & w^2 \\ 1 & -w^3 & -w^2 & -w^1 & -1 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = M_F \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 36 \\ -7, 4142 + 3, 6569i \\ -2 - 4i \\ -4, 5858 + 7, 6569i \\ 0 \\ -4, 5858 - 7, 6569i \\ -2 + 4i \\ -7, 4142 - 3, 6569i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = M_F^T \mathbf{F} = [1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5]^T.$$

4.3 Vlastnosti matice M_F

Příklad 4.7

DFT poskytuje informaci pouze o zastoupených harmonických a jejich amplitudách - pro 3 odlišné fce obsahující stejné frekvence různě lokaliz. v čase obdržíme identické ampl. spektra



Obrázek: Ukázka funkcí majících stejná ampl. Four. spektra

Poznámka 4.8

Někdy se můžeme setkat s dvoustrannou DFT definovanou

$$\hat{f}_n = c_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{resp.} \quad \hat{f}_n = c_n = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} f_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

v závislosti na tom, zda celkový počet vstupních hodnot N funkce f je sudý (pak $k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$, $n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$) resp. lichý (pak $k = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$, $n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$).

4.5 Dvourozměrná DFT

Definice 4.9

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \Omega$ a necht' $\{\varphi_n(\mathbf{x})\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\varphi_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tvoří úplný ortonorm. systém. Pak pro každou funkci $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ existuje na Ω jednoznačný rozvoj v konverg. řadu (v normě \mathbf{L}^2)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(\mathbf{x}), \quad \text{kde } c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int \dots \int_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}) \overline{\varphi_n(\mathbf{x})} dx_1 \dots dx_D.$$

Tuto řadu nazveme D -rozměrnou zobecněnou FŘ. Numerický výpočet c_n pak vede na D -rozměrnou zobecněnou DFT.

Příklad 4.10

Např. pro $D = 2$, index $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \iint_{(x_1, x_2) \in \Omega} f(x_1, x_2) \overline{\varphi_n(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 = \iint_{(x, y) \in \Omega} f(x, y) \overline{\varphi_n(x, y)} dx dy.$$

Pro funkce $\varphi_n(x, y) = \varphi_{uv}(x, y) = \frac{1}{\|\Omega\|} e^{i(ux+vy)}$ obdržíme klasickou dvourozměrnou FŘ.

4.5 Dvourozměrná DFT

Definice 4.11

Nechť Ω je obdélník diskretizován v matici $\mathbb{R}^{M \times N}$,
 $\mathbf{f}, \varphi_n = \varphi_{uv} = \frac{1}{\sqrt{MN}} e^{i2\pi(\frac{ku}{M} + \frac{lv}{N})} \in \mathbb{I}^2(M \times N)$, kde $k = 0, 1, \dots, M - 1$ je tzv. řádkový index charakterizující první proměnnou, $l = 0, 1, \dots, N - 1$ je tzv. sloupcový index charakterizující druhou proměnnou a $n = 0, 1, \dots, (M - 1)(N - 1)$. Pak **dvourozměrná DFT** je definována jako matice $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{M \times N}$, jejíž prvky c_n jsou dány vztahem

$$c_n = \langle \mathbf{f}, \varphi_n \rangle = \hat{f}_{uv} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} f_{kl} \frac{1}{\sqrt{MN}} e^{-2\pi i(\frac{ku}{M} + \frac{lv}{N})} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} f_{kl} e^{-2\pi i(\frac{ku}{M} + \frac{lv}{N})},$$

kde řádkový index $u = 0, 1, \dots, M - 1$ a sloupcový index $v = 0, 1, \dots, N - 1$.

Poznámka 4.12

Výpočet dvourozměrné DFT lze provést ve dvou krocích:

1. jednorozměrná DFT řádků matice \mathbf{f} : $\mathbf{fM}_{FN}^T = (\mathbf{M}_{FN}\mathbf{f}^T)^T$
2. jednorozměrná DFT sloupců vzniklých po 1. kroku: $\mathbf{M}_{FM}\mathbf{fM}_{FN}^T$,
nebo v opačném pořadí.

Výslednou dvourozměrnou DFT můžeme tedy psát ve tvaru

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}_{FM}\mathbf{fM}_{FN}^T = \mathbf{M}_{FM}(\mathbf{fM}_{FN}^T) = (\mathbf{M}_{FM}\mathbf{f})\mathbf{M}_{FN}^T,$$

nezávislost na pořadí transformací plyne z asociativity násobení matic.

4.6 Rychlá DFT - FFT

- Výpočet DFT dle vztahu (20) není pro praktické úlohy příliš vhodný - značná časová náročnost rostoucí se čtvercem délky vektorů, tj. $\mathcal{O}(N^2)$.
- Výpočet n -té složky DFT vektoru délky N je srovnatelný s vyčíslením hodnoty polynomu stupně $N - 1$ v bodě $e^{-i\frac{2\pi}{N}n}$. I přes použití optimálního Hornerova schématu je potřeba $2N(N - 1) \sim N^2$ operací.
- Tento fakt vedl k vypracování algoritmu založeného na „pěkných“ vlastnostech diskrétních exponenciálních funkcí a redukujícího výrazným způsobem výpočetní dobu skrz minimalizaci počtu násobení a to navíc komplexních čísel - tzv. FFT algoritmus (Fast Fourier Transform) publikován 1965 J. W. Cooleyem a J. W. Tukeyem pod názvem „Butterfly“ (motýlek) nebo též „Splitting method“ pro počet vstupních hodnot $N = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$.

4.6 Rychlá DFT - FFT

- Vyděme z DFT dané vztahem

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{nk}, \quad w = w_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}.$$

- Rozdělením vektoru $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$ majícího N složek na 2 vektory o $\frac{N}{2}$ složkách $\mathbf{y} = (f_0, f_2, \dots, f_{N-2})^T$ a $\mathbf{z} = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})^T$ a to tím způsobem že vezmeme členy se sudým indexem $y_k = f_{2k}$ a členy s lichým indexem $z_k = f_{2k+1}$, pak lze F_n obrazu $\mathbf{F} = (F_0, F_1, \dots, F_{N-1})^T$ rozepsat

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} (f_0 w^0 + f_1 w^n + \dots + f_{N-1} w^{(N-1)n}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[(f_0 w^0 + f_2 w^{2n} + \dots + f_{N-2} w^{(N-2)n}) + w^n (f_1 w^0 + f_3 w^{2n} + \dots + f_{N-1} w^{(N-2)n}) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} [y_k w^{2nk} + z_k w^{(2k+1)n}], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

4.6 Rychlá DFT - FFT

- V důsledku symetrie komplexních čísel (koeficientů na kružnici):

$$w^{2nk} = w_N^{2nk} = w_{N/2}^{nk} = e^{-i\frac{4\pi}{N}nk} = e^{-i\frac{2\pi}{N/2}nk}$$

(obecně $w_N^{pq} = w_{N/q}^p$) platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} y_k w_{N/2}^{nk} + \frac{1}{\sqrt{N}} w_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} z_k w_{N/2}^{nk} = Y_n + w_N^n Z_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (22)$$

kde $\mathbf{Y} = DFT(\mathbf{y})$ a $\mathbf{Z} = DFT(\mathbf{z})$.

- 1. polovinu koeficientů F_n tedy obdržíme pomocí DFT vektorů poloviční velikosti.
- 2. polovinu získáme

$$F_{n+\frac{N}{2}} = Y_n + w_N^{n+\frac{N}{2}} Z_n = Y_n + w_N^n w_N^{\frac{N}{2}} Z_n = Y_n - w_N^n Z_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (23)$$

neboť $w_N^{\frac{N}{2}} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-i\pi} = -1$.

- štěpení opakujeme, dokud nedostaneme 2 vektory o jedné složce

$$DFT(y_0) = Y_0 = \sum_{k=0}^0 y_0 w_N^0 = y_0, \quad DFT(z_0) = Z_0 = \sum_{k=0}^0 z_0 w_N^0 = z_0.$$

4.6 Rychlá DFT - FFT

- Časová náročnost popsaných štěpení ($2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2} < N^2$) je $\mathcal{O}(N \ln N)$.
- Maticový zápis FFT daný vztahy (22), (23) bude

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_{\mathbf{F}, \mathbf{N}} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{D}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & -\mathbf{D}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_N \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{I}_{\frac{N}{2}}$ je jednot. matice, diag. matice $\mathbf{D}_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \text{diag} \left(1, w_{2r}^1, w_{2r}^2, \dots, w_{2r}^{\frac{N}{2}-1} \right)$, obě řádu $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$.

- Další krok bude

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{4}} & \mathbf{D}_{\frac{N}{4}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{4}} & -\mathbf{D}_{\frac{N}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{4}} & \mathbf{D}_{\frac{N}{4}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{4}} & -\mathbf{D}_{\frac{N}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'' \\ \mathbf{Z}'' \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'' \\ \mathbf{Z}'' \end{bmatrix},$$

$\mathbf{I}_{\frac{N}{4}}$ je jednot. matice, diag. matice $\mathbf{D}_{\frac{N}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{4}}} \text{diag} \left(1, w_{2r}^2, w_{2r}^4, \dots, w_{2r}^{\frac{N}{4}-2} \right)$, obě řádu $\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}$.

- V dalším kroku vektory \mathbf{Y}' , \mathbf{Z}' , \mathbf{Y}'' , \mathbf{Z}'' znovu rozdělíme na vektory se sudým a lichým indexem, přeindexujeme a několikerým dalším zopakováním dostaneme

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_N \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\frac{N}{4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{\frac{N}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{\frac{N}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_{\frac{N}{4}} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^T \mathbf{f},$$

(24)

4.6 Rychlá DFT - FFT

- \mathbf{P} je permutační matice vytvořená při vykonávání postupného sudo-lichého přeskupování sloupců jednotkové matice. Vstupní sekvence \mathbf{f} je nejprve přeskupena pomocí permutační matice \mathbf{P}^T a pak prochází jednotlivými kombinačními stupni. Např. pro $N = 8$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}.$$

- Navíc platí, že transformační matice DFT vektoru o 8 složkách bude rovna produktu

$$\mathbf{M}_{F,8} = \mathbf{B}_8 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^T.$$

4.6 Rychlá DFT - FFT

Algoritmus 4.2 - Implementace algoritmu přímé FFT

```
function X=myfft(x);
N=length(x); n=log2(N);

    % Vytvoreni permutacniho vektoru
    pt=(1:N)';
    i_odd=(1:N/2)*2-1;    % liche koeficienty
    i_even=(1:N/2)*2;    % sude
    for i=1:n-1

        m=2^(i-1);K=N/(2*m);
        pt_odd=reshape(pt(i_odd),K,m)
        pt_even=reshape(pt(i_even),K,m)
        pt=reshape([pt_odd;pt_even],N,1)

    end;
% Prenasobovani dilcimi maticemi
X=x(pt);
for i=1:n

    K=2^i; m=N/K; % m je pocet bloku B na diag., K je rad B
    w=exp(2i*pi/K);
    D=sqrt(2/K)*diag(w.^(0:-1:-(K/2-1))); %Diag. matice s prvky w
    I=eye(K/2); % Jednotkova matice
    B=[[I,D];[I,-D]]; % Blok B
    V=diags(B,m); % Matice sestavena z m bloku B
    X=X*X;

end;
```


4.6 Rychlá DFT - FFT

Algoritmus 4.3 - Implementace algoritmu zpětné FFT

```
function x=myifft(X);
N=length(X);

n=log2(N);          % n...pocet urovni
% Vytvoreni permutacniho vektoru pt
pt=(1:N)';
i_odd=(1:N/2)*2-1;  % i_odd..liche indexy
i_even=(1:N/2)*2;   % i_even.. sude indexy
for i=1:n-1
    m=2^(i-1);
    K=N/(2*m);
    pt_odd=reshape(pt(i_odd),K,m); % preusporadani prvku
    pt_even=reshape(pt(i_even),K,m);
    pt=reshape([pt_odd;pt_even],N,1);
end;
% Prenasobovani dilcimi maticemi
x=X;
for i=n:-1:1
    K=2^i;
    m=N/K;      % m je pocet bloku B na diagonale, K je rad B
    w=exp(2i*pi/K);
    D=sqrt(2/K)*diag(w.^(0:-1:-(K/2-1)));% Diag. matice s prvky w
    I=eye(K/2);          % Jednotkova matice
    B=[[I,D];[I,-D]];   % Blok B
    V=diags(B,m);       % Matice sestavena z m bloku B
    x=V'*x;
end;
x=x(pt);
```

4.6 Rychlá DFT - FFT

- Existuje celá řada velmi rychlých a efektivních implementací DFT jako je např. algoritmus s redukcí kmitočtu, sloučený algoritmus, modifikace algoritmu FFT s prvočíselným rozkladem, algoritmus v konečných kruzích a jiné,
- DFT má obrovské využití v různých oborech: ve fyzice při řešení přenosových soustav (charakterizace chování dynamické soustavy pomocí přenosové funkce a převod konvoluce na násobení), úlohách difrakce, v krystalografii při řešení reciproké mřížky, v optice při zobrazování čočkami v tzv. Fraunhoferově aproximaci, v kvantové mechanice v relaci neurčitosti a digitálním zpracování obrazu (restaurování, zkvalitňování, segmentace a komprese obrazu)
- Zpracování zvuku - keprální analýza spočívající v aplikaci FFT na upravené Fourierovské spektrum mající hlavně využití v analýze řeči.

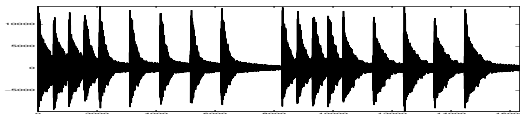
5 Okenní Fourierova transformace (WFT)

5.1 Motivace

- Svět je plný signálů - zvuků (hudba, řeč), obrazů (fotografie, televize), datových řetězců (čísel, znaků), zeměřesení, elmag. vlnění, které musí být analyzovány, syntetizovány, komprimovány, přenášeny nebo vyhlazovány.
- Metody používané k tomuto zpracování signálů jsou FŘ, FT, WFT, WT.
- Skladba "Kočka leze dírou, pes oknem, nebude-li přšet, nezmoknem" - modelovaná fcí $f(t)$ - tlak vzduchu na ušní bubínek - „klavírní skladba“ trvá 17.63 sec, vzorkována 44600 Hz na 777492 bodů a převzorkována na 16384 bodů.



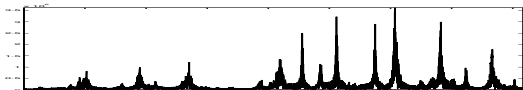
Obrázek: Část skladby reprezentovaná notami



Obrázek: Část skladby reprezentovaná jako funkce času

5.1 Motivace

- Jestliže se hudba skládá z jednotlivých tónů s frekvencí ω_1 , pak $f(t)$ je periodická $T = 1/\omega_1$ a jejím přirozeným popisem je FŘ - Four. koef. určují amplitudy jednotlivých harmonických $\omega_n = n\omega_1$ v $f(t)$.
- Jestliže je hudba řadou takovýchto tónů a melodií, pak obecně tato řada není period. a FŘ nemůže být pro její analýzu použita.
- Teoreticky existuje možnost spočítat FT $F(\omega)$ fce $f(t)$ - musíme integrovat $f(t)$ na celé časové ose $t \in (-\infty, +\infty)$. Pak $F(\omega)$ obsahuje celkové amplit. spektrum v celé skladbě a nikoliv rozdělení harmonických v každém tónu - chybí časová lokalizace. Před výpočtem $F(\omega)$ musíme počkat až $f(t)$ dozní. Skrze FT jsme schopni analyzovat pouze frekv. obsah, nikoli začátek či konec zkoumaného děje.
- Informace o skocích a singularitách je rozložena do celého frekv. spektra, tj. při lib. malých změnách $f(t)$ v okolí lib. bodu t dochází ke změně celého frekv. spektra - příčina: periodicitá báz. fcí $e^{i\omega t}$ nelokalizovaných v ohraničeném intervalu.



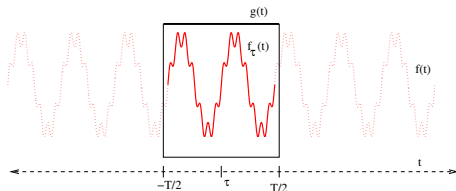
Obrázek: Jednostranné amplitudové Fourierovské spektrum funkce $f(t)$

5.1 Motivace

- Uvažujme nyní model slyšení, z něhož bere okenní transformace inspiraci.
- Lidské ucho může vnímat změny melodie aniž by rozkládalo signál na tóny.
- Poněvadž ucho analyzuje rozdělení frekvencí daného signálu $f(t)$ v reálném čase, musí současně podat informaci o $f(t)$ ve frekvenční i časové oblasti.
- Popišme tedy výstup funkce $\hat{f}(\omega, \tau)$ v závislosti na frekvenci ω a posunutí τ .
- Poněvadž ucho nemůže analyzovat to, co uslyší později, mohou být pro výpočet $\hat{f}(\omega, \tau)$ použity pouze hodnoty $f(t)$, kde $t < \tau + T/2$.
- Ucho má také konečnou paměť - existuje časový interval takový, že pouze hodnoty $f(t)$ pro $t \geq \tau - T/2$ mají vliv na výsledek v čase t . Tedy $\hat{f}(\omega, \tau)$ může záviset jen na $f(t)$ pro $\tau - T/2 \leq t \leq \tau + T/2$.
- Hodnoty signálu blízko konců intervalu mají menší vliv na analýzu než hodnoty uprostřed intervalu.

5.2 Definice okenní funkce a spojité WFT

- Jednou z možností, jak odstranit tento problém, je použití okenních (váhových) funkcí $g(t - \tau)$, které jsou dobře lokalizovány kolem hodnoty τ .
- Spojitá $g(t)$, která je finitní a nenulová na intervalu $-T/2 \leq t \leq T/2$ a nulová vně tohoto intervalu, bude použita k lokalizaci signálu v čase.
- $g(t)$ "klouže" podél časové osy. Pomocí $g(t)$ def. fci $f_\tau(t) = \overline{f(t)g(t - \tau)}$ - má obecně stejný nosič jako $g(t)$ a nazývá se lokalizovaná část fce $f(t)$.
- $\overline{g(t)}$ je funkce komplexně sdružená k $g(t)$.
- WFT = lokální FT s posunutím.



Obrázek: Princip okenní transformace

Definice 5.1

Nechť $f(t), g(t), tg(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $f_\tau(t) = f(t)\overline{g(t-\tau)}$, pak pro $\forall \tau \in \mathbb{R}$ definujeme okenní Fourierovu transformaci (Window Fourier transform - WFT) jako FT funkce $f_\tau(t)$:

$$F(\omega, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \|g(t)\|} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\tau(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \|g(t)\|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t-\tau)} e^{-i\omega t} dt. \quad (25)$$

FT je prováděna pro každou polohu okna určenou parametrem τ .
Zpětná (inverzní) okenní Fourierova transformace je dána formulí:

$$F^{-1}(\omega, \tau) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \|g(t)\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega, \tau) g(t-\tau) e^{i\omega t} d\omega \right) d\tau. \quad (26)$$

5.2 Definice okenní funkce a spojitá WFT

Generování okenní funkce $g(t)$ je založeno na:

- filtračních vlastnostech jádra v konvoluci $(f \star g)(t)$, $g(t)$ je jádrem konvoluce, jestliže $g(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$ a $g(t)$ lze psát ve tvaru

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} E^{-1}(s)e^{st} ds$$

γ - vertikální přímka v oboru abs. konvergence Fourier-Laplace. integrálu a

$$E(s) = e^{bs} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_k}\right) e^{\frac{s}{a_k}}$$

s $b \in \mathbb{R}$ a reálnou posloupností $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ vytvářející konvergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2}$,

- reprezentaci „ δ - funkce” mající tvar

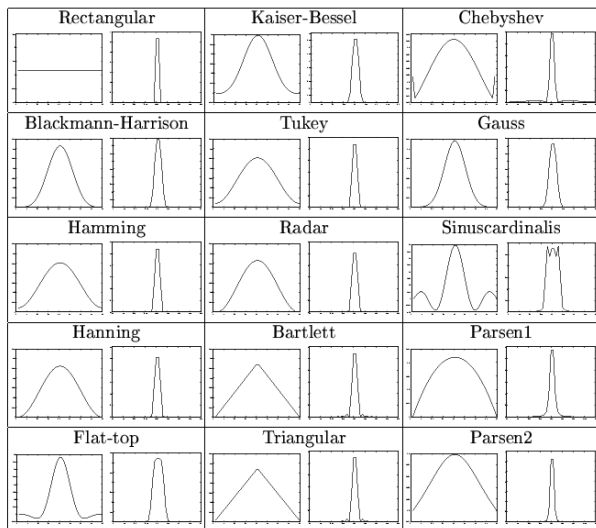
$$g(t, \lambda) = \frac{\lambda K(\lambda t)}{2 \int_0^{+\infty} K(\tau) d\tau},$$

přičemž $\lambda \rightarrow \infty$ a $K(t)$ je sudá funkce s $K(0) \neq 0$,

- lokálních FR - zobecněná kosinová okna mající tvar

$$g(t) = K \sum_{k=1}^n (-1)^k A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), |t| \in \langle 0, T/2 \rangle.$$

5.2 Definice okenní funkce a spojité WFT



Obrázek: Přehled okenních funkcí v čas. a frekv. oblasti

5.3 Diskrétní WFT (DWFT)

- Při numerickém výpočtu budeme tedy vyčíslovat sekvenci DFT resp. FFT vektoru $\mathbf{f}_{\tau_k} = \mathbf{f} \bullet \mathbf{g}_{\tau_k}$, kde nenulové hodnoty okenní funkce doplníme nulami na stejnou délku jako má vektor \mathbf{f} a mohl být vyčíslen součin element po elementu.
- Z maticového zápisu DFT : $\mathbf{c}_{\tau_k} = \mathbf{M}_F \mathbf{f}_{\tau_k}$ obdržíme k -tý sloupec matice \mathbf{c}

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\tau_0} & \mathbf{c}_{\tau_1} & \cdots & \mathbf{c}_{\tau_K} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_F \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\tau_0} & \mathbf{f}_{\tau_1} & \cdots & \mathbf{f}_{\tau_K} \end{bmatrix},$$

kde K je celkový počet okenních lokalizací.

- Abs. hodnoty jednotlivých sloupců \mathbf{c}_{τ_k} tak budou tvořit „řezy“ čas.-frekv. spektra jejichž „seskládáním“ resp. projekcí do jedné roviny dostaneme klasické amplit. Four. spektrum, tj. označíme-li $\mathbf{F} = \text{DFT}(\mathbf{f})$, pak pro n -tou komponentu platí:

$$|F_n| = \max \{ |c_{n,\tau_0}|, |c_{n,\tau_1}|, \dots, |c_{n,\tau_K}| \}.$$

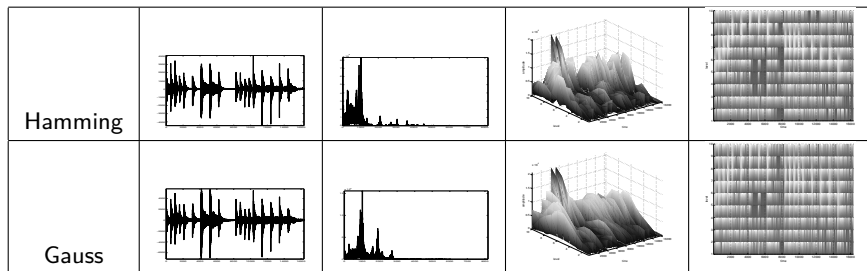
5.3 Diskrétní WFT (DWFT)

Příklad 5.2

S využitím DWFT proveďte časově-frekvenční analýzu hudební skladby 7.

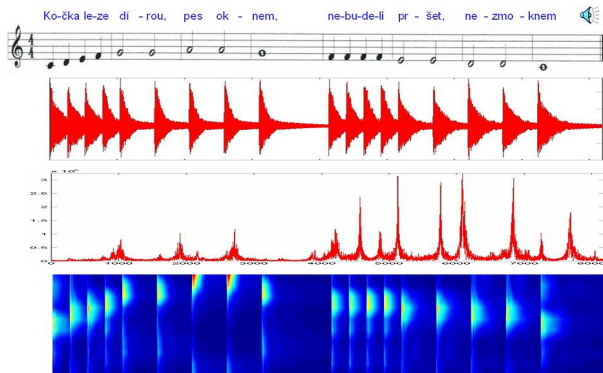
Řešení

Grafy v sloupci představují vyhlazený signál, jednostr. ampl. spektrum, čas.-frekv. spektrum v 3D a při pohledu shora (777492 bodů / 17.63 sec => 44600 bodů / 1 sec => max. frekvence 22300 Hz, při použití oken délky 20 bodů => 10 frekv. hladin => 2230 Hz / 1 frekv. hladinu).



Obrázek: Čas.-frekv. analýza hudební skladby prostřednictvím DWFT

5.3 Diskrétní WFT (DWFT)



Obrázek: Čas. - frekv. spektrum hudeb. skladby

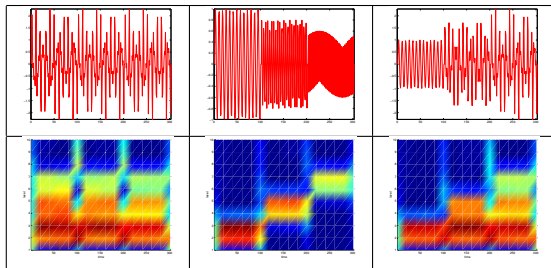
5.3 Diskrétní WFT (DWFT)

Příklad 5.3

S využitím DWFT proveďte časově-frekvenční analýzu tří signálů majících identická amplitud. spektra.

Řešení

Časově-frekvenční spektra při pohledu shora funkcí majících podobná amplitud. spektra získaná pomocí Hammingova okna jsou pro ilustraci vyobrazena na obr.



Obrázek: Čas.-frekv. spektra signálů majících podobná Fourier. spektra při pohledu shora

5.3 Diskrétní WFT (DWFT)

- WFT potlačuje vyšší frekvence - v závislosti na použitém okně - vyhlazování signálů
- WFT může být užita pro analýzu nestacionárních signálů
- Nevýhody WFT: neadaptivita okna - tj. konstantní šířku okna jak v časové, tak i ve frekvenční oblasti (tento nedostatek odstraňuje až waveletová transformace)
- podle Heissenbergova principu neurčitosti také nemožnost přesné lokalizace v časové a ve frekvenční oblasti současně.

5.3 Diskrétní WFT (DWFT)

Algoritmus 5.1 - Generátory okenních funkcí

```
function g=gcw(N,k,a0,a1,a2,a3,a4) % generalized cosine window
t=2*pi/(N-1);
for i=1:N
    g(i)=k*(a0-a1*cos(t*(i-1))+a2*cos(2*t*(i-1))-a3*cos(3*t*(i-1))+a4*cos(4*t*(i-1)));
end

function g=gauss(N,a)
krok=pi/(N-1);
for i=1:N+1
    t(i)=(i-N/2-1)*krok; g(i)=((2*a)^(1/4))*exp(-pi*a*t(i)*t(i));
end

function g=parsen1(N,q)
t=(-N/2:N/2);
for i=1:N+1 g(i)=1-(abs(t(i))/(N/2))^q; end

function g=parsen2(N,q)
t=(-N/2:N/2);
for i=1:N+1 g(i)=1/(1+(abs(t(i))/(N/2))^q); end

function g=radar(N)
krok=2/(N-1);
for i=1:N+1
    t(i)=(i-N/2-1)*krok; g(i)=1+cos(pi*t(i));
end

function g=sincard(N)
t=(-3:(6/(N-1)):3); g=sinc(t);
```


5.3 Diskrétní WFT (DWFT)

Algoritmus 5.2 - Implementace WFT

```
F=fft(f); figure; plot(abs(F(1:n/2))); axis([0 n/2 0 max(F)]); % FT vstupního signálu
N=20; tau=2; % Generování okenní funkce- délka okna a posunutí okna
cg=input('Zadejte pořadové číslo okna pro okenní transformaci: ');
if (cg==1) g=gcw(N,1,1,0,0,0,0); nazev='Obdelnikove okno';end; ...g=g/norm(g,2); figure; plot(g);
G=fft(g); fwin=abs(G(1:N/2)); % Fourierův obraz okna
fw=[]; for i=1:N/2 fw=[fwin(i) fw fwin(i)]; end; figure; plot(1:N,fw);
w1=2*pi/N; c=[];
for l=1:n/tau % Vypocet matice Four. koeficientu c
    for j=1:N/2
        c(l,j)=0;
        for k=1:N
            tk=(l-1)*tau-N/2+k;
            if (tk > 0) & (tk < n) c(l,j)=c(l,j)+f(tk)*g(k)*exp(-i*w1*j*tk)/sqrt(N); end
        end
    end
end
c=c'; fvyhl=[];
for l=1:n/tau % Vyhlazení signálu a jeho ampl. spektrum
    fvyhl(l)=0;
    for k=1:N
        tk=(l-1)*tau-N/2+k;
        if (tk > 0) & (tk < n) fvyhl(l)=fvyhl(l)+f(tk)*g(k); end
    end
end
fconv=interp(fvyhl,tau); figure; plot(fconv);Fconv=fft(fconv); figure; plot(abs(Fconv(1:n/2)));
for i=1:n/tau ctemp(:,2*i-1)=c(:,i); ctemp(:,2*i)=c(:,i); end;
[X,Y] = meshgrid(1:N:n,1:N/2); [x,y] = meshgrid(1:n, 1:N/2);
Z=interp2(x,y,abs(ctemp),X,Y); figure; surf(X,Y,Z); shading interp;
axis([1 n 1 N/2 0 max(max(Z))]); xlabel('time'); ylabel('level'); zlabel('amplitude');
colorbar; view(0,90); % CFS při pohledu shora
```

6 Waveletová (vlnková) transformace (WT)

- Zobecněné FT mají různé vlastnosti dané použitou bází a z toho plynoucí aplikace.
- U řady o jednorozměrných zobec. FT dochází k transformaci prostoru s určitým fyzikálním rozměrem (např. $[r]$ u klasické FT) do prostoru s fyzikálním rozměrem jiným (např. $[r^{-1}]$ u klasické FT)
- U waveletové neboli vlnkové transformace (WT), využívající bázi odvozenou od základní fce pomocí posunutí a změny měřítka, dochází k transformaci jednorozměrného prostoru do dvou rozměrného majícího však tentýž rozměr fyzikální.
- Waveletová analýza je tudíž speciálním případem Fourierovy analýzy.

6 Waveletová (vlnková) transformace (WT)

- K popisu WT potřebujeme složitější matematický aparát, jehož základem bude tzv. víceuřivňová analýza (multirozklad $L^2(\mathbb{R})$) neboli multiresolution analysis - MRA).
- Představme si, že v supermarketu máme regál (Hilbert.prostor $L^2(\Omega)$),
- Označíme podlahu jako nulovou hladinu $m = 0$.
- Máme k dispozici zásilku zboží (funkce $f(t)$), např. zásilka míčů různé velikosti.
- Regál je sestaven z jednotlivých polic, každá police tvoří jednu hladinu (V_m).
- Na každé polici jsou kulaté otvory (jednotlivé básové elementy ϕ_{mn} , m je index police, n je počet otvorů na polici), průměry otvorů jsou stejné na jedné polici (na jedné hladině).
- Při přechodu z jedné police na druhou se mění dle vztahu 2^m , $m = 0, 1, 2, \dots$, tj. otvory na nižší polici tedy jsou 2x menší než o jednu výše.
- Úkolem bude najít optimální rozklad zboží na policích, tj. aby každý míč byl uložen na příslušné místo, odpovídající jeho průměru.
- Řešení: Je-li míč menší než otvor, pak tento míč spadne přes otvor na příslušnou polici (na příslušnou hladinu), kde otvor bude menší než průměr míče. Uložit tento míč na nižší polici je ekonomicky nevýhodné - tam může být umístěn míč o menším průměru. Proceduru právě tohoto rozložení nazýváme víceuřivňovou analýzou.
- Díváme-li se do dalekohledu, mikroskopu, fotoaparátu, snažíme se zachytit ostré a zároveň dostatečně velké zobrazení našeho objektu, přitom provádíme podobnou analýzu.

Definice 6.1

Multirozkladem $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (víceúrovňovou analýzou) budeme nazývat neklesající posloupnost uzavřených škálovacích podprostorů

$V_m \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{Z}$ pro něž platí následující podmínky:

1. $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$ tj. $V_m \subset V_{m+1}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

2. $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$

3. $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m$ je hustý a představuje $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, tj. $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$

4. $f(\mathbf{t}) \in V_m \Leftrightarrow f(2\mathbf{t}) \in V_{m+1}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$

5. existuje funkce $\phi \in V_0$ taková, že $\{\phi(\mathbf{t} - \mathbf{n})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ je ortonorm. bází V_0 .

Funkce $\phi \in V_0$ se nazývá škálovací funkce nebo základní škálová funkce resp. otcovský wavelet.

6.1 Multirozklad

Formálně bychom mohli MRA interpretovat následujícím způsobem.

- Bod 1 představuje rozdělení regálu na police, někteří autoři zapisují $V_{m+1} \subset V_m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, my této indexace využijeme u DWT.
- Bod 3 říká, že sjednocením získáme celý regál, tj. $V_\infty = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ a $V_{-\infty} = \{0\}$, tzn. neexistuje žádné zobčítání, které by se udržovalo na horní polici.
- Bod 4 znamená, že funkce $f \in V_{m+1}$ obsahuje 2x více bodů než $f \in V_m$, což odpovídá proceduře přeložení míče na nejbližší nižší polici za podmínky, že průměr otvoru je 2x menší než na předchozí polici.
- $\phi \in V_0$ v bodě 5 a slouží pro analýzu jednotlivých škálovaných podprostorů V_m - police v horizontálním směru vyplní celý prostor bez překrývání a mezer, tedy bázi prostoru $V_1 : \{\phi(2t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dostaneme z elementů báze prostoru $V_0 : \{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jednoduchým 2x zmenšením posledních.

Existují další definice, které se vztahují k biortogonalizaci waveletů, k waveletům v prostoru \mathbf{L}^p , k waveletům na distribucích apod.

Základem pro vytvoření diskrétní waveletové transformace (DWT) je dilatační rovnice tzv. rovnice soběpodobnosti - škálovací rovnice. Formální řešení této rovnice můžeme sestavit ve tvaru Four. integrálu, avšak analýza vznikajících funkcí není vůbec jednoduchá.

6.2 Definice spojité WT

Definice 6.3

Nechť $f(t), \psi(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Waveletovou (vlnkovou) transformaci funkce $f(t)$ pak definujeme

$$WT(f) = F(a, b) = \hat{f}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (27)$$

kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tzv. dilatační škálový parametr, $b \in \mathbb{R}$ je translační parametr, $\psi(t)$ je mateřský wavelet nebo jen wavelet splňující $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$. Zpětná (inverzní) waveletová transformace je pak dána vztahem

$$WT^{-1}(F) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da \right) db. \quad (28)$$

Poznámka 6.4

Základní mateřský wavelet si můžeme představit jako "vlnku" nabývající kladných a záporných hodnot, která nemusí být vůbec symetrická a může být vytvořena i pomocí neline. kombinací otcovského waveletu. Obraz $F(a, b) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle$.

6.3 Vlastnosti WT

Koeficienty WT obsahují informaci jak o analyzované funkci, tak i o waveletu použitým při analýze. Nechť $WT(f(t)) = F(a, b)$, pak některé vlastnosti WT jsou nezávislé na typu waveletu:

- 1 linearita $WT(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha WT(f_1) + \beta WT(f_2) = \alpha F_1(a, b) + \beta F_2(a, b)$,
- 2 invariance vzhledem k posunutí $WT(f(t - b_0)) = F(a, b - b_0)$,
- 3 invariance vzhledem k dilataci $WT\left(f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right) = \frac{1}{a_0} F\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right)$,
- 4 derivování originálu $WT\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} f\right) = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m} (\bar{\psi}_{ab}(t)) dt$,
- 5 analogie Parsevalovy věty v případě ortogonální waveletovské báze

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \bar{f}_2(t) dt = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(a, b) \bar{F}_2(a, b) a^{-2} da db \Rightarrow$$

energie signálu (funkce)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(a, b)|^2 a^{-2} da db.$$

6.4 WT - Konstrukce ortonormálních waveletů

Matematická konstrukce ortonormálních waveletů s kompaktním nosičem byla provedena I. Daubechies (1988) s použitím teorie MRA. Nástin tvorby báze pomocí MRA je následující:

- Nechť P_m znamená ortogonální projekci f do V_m a D_{2^m} dilatační operátor, tj. $f(\cdot) \in D_{2^m} V_n \Leftrightarrow f(2^m \cdot) \in V_{m+n}$. S rostoucím m pak $P_m f$ lépe aproximuje f , až nakonec

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m f = f.$$

Prostor V_m je tvořen škálovými funkcemi $\{\phi_{mn}\}_{\forall n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

- Jelikož V_m je obsažen ve V_{m+1} , můžeme definovat W_m jako m -tý waveletový prostor obsahující waveletové funkce $\{\psi_{mn}\}_{\forall n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$ tak, aby byl ortogonálním doplňkem V_m do V_{m+1} , tj.

$$V_{m+1} = V_m \oplus W_m,$$

Q_m je projekční operátor do W_m - škálované verze W_0 , kde $f(\cdot) \in W_m \Leftrightarrow f(2^{-m} \cdot) \in W_0$. Tedy obdobně W_m je tvořen waveletovými funkcemi $\{\psi_{mn}\}_{\forall n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Pak

$$P_{m+1} = P_m \oplus Q_m$$

je projekční operátor do V_{m+1} .

6.4 WT - Konstrukce ortonormálních waveletů

- Základní vlastnost MRA je to, že umožňuje sestavit ortonormální waveletovskou bázi $\{\psi_{mn}(t)\}_{\forall n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, kde $\psi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ tak, že pro každou $f(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ platí:

$$P_{m+1}f = P_m f + Q_m f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{mn} \phi_{mn} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{mn} \psi_{mn} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{mn} \rangle \phi_{mn} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{mn} \rangle \psi_{mn}.$$

Koeficienty a_{mn} nazveme aproximačními, trendovými, škálovými nebo nízkofrekvenčními, koeficienty d_{mn} pak detailními, doplňkovými, waveletovými nebo vysokofrekvenčními.

- Hledáme funkci $\psi \in W_0$ tak, aby $\{\psi(t - n)\}_n$ tvořila ortonormální bázi W_0 , $W_{m+1} = D_2 W_m$ a $\{D_{2^m} \psi(t - n)\}_n$ byla ortonormální bázi W_m . Jelikož $W_m \perp V_m$, $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$ a $\mathbf{L}^2 = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m}$, $W_{m+1} \perp W_m$ a $\mathbf{L}^2 = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W_m$, pak $\{D_{2^m} \psi(t - n)\}_{nm}$ je ortonormální bázi \mathbf{L}^2 . Ortonormalita je zde zaručena na jednotlivých úrovních m :

$$\langle \phi_{mk}, \phi_{ml} \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Pro skalární součin mezi sousedními úrovněmi platí

$$\langle \phi_{mk}, \phi_{m+1,l} \rangle = h_{l-2k}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad \sum_k h_k^2 = 1.$$

6.4 WT - Konstrukce ortonormálních waveletů

- Konstrukce ψ je dána následující procedurou. Necht \mathbf{I}^2 je diskrétní analog prostoru $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Je-li $\phi \in V_0 \subset V_1$ a $\{\phi(2t - n)\}$ je ortonormální báze V_1 , pak posloupnost koeficientů $h_n \in \mathbf{I}^2$ splňuje **dilatační rovnici**

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2t - n).$$

Vyřešení této rovnice odstartovalo konstrukci ortonormálních waveletů. Zde h_n jsou škálovací filtrační koeficienty zaručující ortonormalitu, má-li $\phi(t)$ kompaktní nosič, pak počet těchto nenulových koeficientů je nenulový.

- Definujme

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(2t - n),$$

pak právě wavelety $\psi_{mn} = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ tvoří ortonormální waveletové báze prostorů W_m , které nazýváme Daubechiesové (tyto wavelety nemají žádné osy symetrie, ortonormalita waveletů je zaručena i mezi různými úrovněmi m). Pro ortogonální báze $\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2t - n)$, $\psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(2t - n)$.

Některé další podmínky pro sestavení waveletů (nejsou nutné):

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1$, zde ϕ lze chápat jako prostorovou hustotu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny t za podmínky, že $\phi(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Uvažujeme-li, že střední hodnota náhodné veličiny t je 0 a její rozptyl 1, pak $\int_{-\infty}^{+\infty} t\phi(t) dt = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t) dt = 1$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$ nulovost momentů k -tého stupně,
- pro $\psi(t) \geq 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 1$,
- podmínka na symetrii apod.

- Odted' budeme používat v multirozkladu indexaci $V_m \subset V_{m-1}$.
- Nejdříve najdeme filtrační koeficienty, které prostřednictvím dilatační rovnice budou definovat škál. fci s požadovanými vlastnostmi. Kromě ortogonality budeme ještě požadovat kompaktní nosič.
- Číselné hodnoty filtračních koeficientů jako první spočítala Ingrid Daubechies (1988). Ortonormální wavelety s $2M = N$ nenulovými filtračními koeficienty se zanáčí DN(dbN) resp. D2M(db2M). Např. wavelet D1 je ortonormální wavelet 1. řádu tzv. Haarův wavelet.
- Škálovací filtrační koef. h_n (koef. projekčního operátoru P do prostoru škálovacích funkcí) budeme značit: $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_{N-1})^T$.
- Waveletové filtrační koef. g_n (koef. projekčního operátoru Q do prostoru waveletovských funkcí) $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})^T$.
- V důsledku ortogonality vektoru h a g na všech hladinách i mezi hladinami rozkladu koeficienty g_n vypočteme ze vztahu

$$g_n = (-1)^n h_{N-1-n}.$$

Příklad 6.5

Řešením dilatační rovnice určete hodnoty škál. a wavelet. filtr. koeficientů Haarova wav.

Řešení

Ortonorm. báze $L^2(\mathbb{R})$ je tvořená translacemi a dilatacemi mateřského Haarova wav. $\psi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases}$.

Prvky této báze nejsou hladké křivky a mají rozptýl $1/\omega$ frekvenčního rozsahu. Při $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow \omega \rightarrow \infty$, při $t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \omega \rightarrow 0$. Škálovací filtrační koeficienty jsou $\mathbf{h} = (h_0, h_1)^T$, wav. filtrační koeficienty $\mathbf{g} = (g_0, g_1)^T$, jejich hodnoty jsou určeny rovnicemi

$$h_0^2 + h_1^2 = 1, \quad (29)$$

$$g_0 + g_1 = 0. \quad (30)$$

Rovnici (29) sestavíme na základě podmínky ortonormality na hladině s indexem m : $\|\mathbf{h}\|^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = 1$, rovnici (30) sestavíme

požitím požadavku $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ v diskrétním tvaru $\sum_{\forall k} g_k = 0$. Jelikož má platit

$g_n = (-1)^n h_{N-1-n} \Rightarrow g_0 = h_1, g_1 = -h_0$, pak dosazením za g_0, g_1 a dořešením soustavy obdržíme

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, g_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

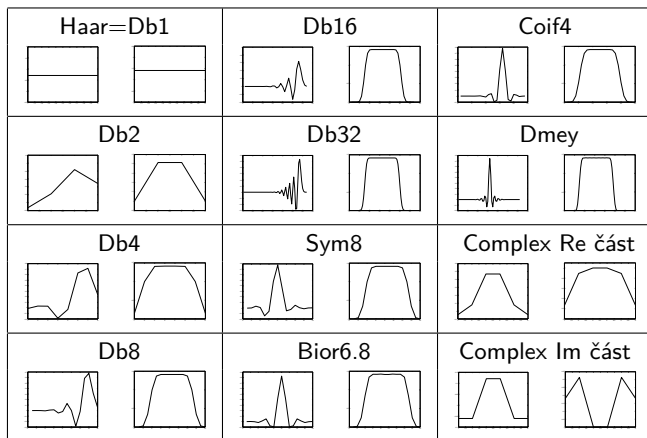
Obecně pro výpočet škálovacích parametrů lze sestavit následující soustavu rovnic:

- v důsledku ortogonality:

$$\sum_{n=0}^{2M-1} h_n h_{n+2m} = \delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}, m = 0, 1, \dots, M-1$$

- z hlediska normování: $\sum_{n=0}^{2M-1} h_n = \sqrt{2}$,
- nulovost momentů k -tého stupně zajistíme:
 $\sum_{n=0}^{2M-1} (-1)^n n^k h_n = 0, k = 0, 1, \dots, M-1$,
- rovnice $\sum_{n=0}^{2M-1} (-1)^n h_n = 0$ je lineárních kombinací výše uvedených.
- V důsledku ortogonality koeficientů pro výpočet doplňkové informace při daných filtračních parametrech vypočteme g_n .

6.5 DWT



Obrázek: Přehled škálových funkcí (otcovských waveletů) v časové a frekvenční oblasti

6.6 Mallatův algoritmus - rychlá DWT - FWT

- Mallatův algoritmus (pyramidální, kaskádový) je sestaven pro případ ortonormálních waveletů a často je nazýván rychlá DWT (FWT - Fast Wavelet Transform).
- Algoritmus vyžaduje, aby vstupní vektor obsahoval počet vstupních hodnot $N = 2^n$ nebo $k2^n$, $k, n \in \mathbb{N}$.
- Necht' vstupní diskretní data jsou $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 = \mathbf{a}_0 = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$.
- Pomocí operátorů ortog. projekcí do diskret. škálového podprostoru V_m a do diskret. wavelet. podprostoru W_m reprezentovaných maticemi $\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_m$ lze prvek $\mathbf{f}_{m-1} = \mathbf{a}_{m-1} \in V_{m-1}$ rozložit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_m \\ \mathbf{Q}_m \end{bmatrix} \mathbf{f}_{m-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} = \mathbf{c}_m,$$

$\mathbf{a}_m = \mathbf{f}_m \in V_m, \mathbf{d}_m \in W_m$ pro $m = 1, 2, \dots$

- Řádky těchto projekčních matic budou tvořeny filtračními škálovými \mathbf{h}^T resp. waveletovskými koeficienty \mathbf{g}^T posouványi o dva body, tedy

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & \dots & \dots & 0 & h_0 & h_1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & 0 & \dots & \dots & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix}$$

6.6 Mallatův algoritmus - rychlá DWT - FWT

- m -tý krok přímé DWT je dán vztahem

$$\mathbf{c}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} = \mathbf{M}_m \mathbf{f}_{m-1}. \quad (31)$$

- Výsledkem této procedury jsou vektory $\mathbf{a}_m, \mathbf{d}_m, \mathbf{d}_{m-1}, \dots, \mathbf{d}_1$ (listy stromu multirozkladu) tvořící waveletovské spektrum popisující časově-frekvenční lokalizaci vstupního signálu.
- Složky aproximačního vektoru $\mathbf{a}_m = (a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,M})^T$ jsou dány skalárním součinem $a_{m,n} = \langle \mathbf{f}_{m-1}, \phi_{mn} \rangle$ a určují celkový trend vstupních dat (nižší frekvence, komprimovaná část).
- Složky doplňkového vektoru $\mathbf{d}_m = (d_{m,1}, d_{m,2}, \dots, d_{m,M})^T$ jsou dány skalárním součinem $d_{m,n} = \langle \mathbf{f}_{m-1}, \psi_{mn} \rangle$ a obsahují doplňující informaci o jemnostech (vyšší frekvence).
- Z ortonormality plyne $\mathbf{M}_m^{-1} = \mathbf{M}_m^T$, pak odpovídající krok zpětné DWT je dán vztahem

$$\mathbf{a}_{m-1} = \mathbf{f}_{m-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} = \mathbf{M}_m^T \mathbf{c}_m. \quad (32)$$

6.6 Mallatův algoritmus - rychlá DWT - FWT

Příklad 6.6

Nechť vstupní vektor $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 = \mathbf{a}_0 = (1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5)^T$. Spočítejte jeho DWT s užitím Haarova waveletu.

Řešení

Nejprve vytvoříme matice $\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k \\ \mathbf{Q}_k \end{bmatrix}$, $k = 1, 2, 3$ pro DWT na k -tou úroveň, která bude tvořena pomocí škálovacích a waveletovských filtračních koeficientů posouvanych o 2 hodnoty a to tak, že matice \mathbf{P}_{k+1} , \mathbf{Q}_{k+1} vzniknou z \mathbf{P}_k , \mathbf{Q}_k „vyřezáním“ horního levého bloku (submatice) o polovičním počtu řádků i sloupců.

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6.6 Mallatův algoritmus - rychlá DWT - FWT

Řešení

Přímá DWT

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{d}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 18 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}.$$

6.6 Mallatův algoritmus - rychlá DWT - FWT

Řešení

Zpětná DWT

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{M}_3^T \mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 18 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{f}_1 = \mathbf{M}_2^T \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{f}_0 = \mathbf{M}_1^T \mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Poznámka 6.7

Vedle uvedeného algoritmu (**standardní DWT**) existuje **stacionární DWT**, kde nedochází ke kompresi.

- Při sestavení algoritmu v matici **M** se nepoužívá posuv o 2 místa, ale posuv jen o 1 místo resp. vložení 0 mezi každé dvě složky vektoru.
- Matici **M** rozložíme na 2 matice **H**, **G**, které sestavíme z filtračních koeficientů s posunem jen o 1 místo resp. při sestavení matic **H**, **G** za každý filtrační koeficient vložíme 0, pak provedeme posun o 2 místa.
- Pak $\mathbf{a}_1 = \mathbf{Hf}$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{Gf}$ budou vektory stejné délky jako vstup. signál **f**.

6.7 Paketový rozklad



- Nechť m značí index transformační hladiny (větší index charakterizuje menší frekv., větší měřítko, tedy hladinu s menší rozliš. schopností) a \mathbf{a}_m komprimovaný signál (aproximace signálu, trendová část) na hladině m a \mathbf{d}_m ortog. doplněk (odlišnosti, jemnosti) na hl. m .
- Podstata paketového rozkladu je v tom, že můžeme stejným způsobem jako s vektory \mathbf{a}_m pracovat s vektory \mathbf{d}_m . Při multirozkladu provádíme sekvenci kroků

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1},$$

u paket. rozkladu budeme navíc provádět v každém kroku pro $k = 1, \dots, K_{m-1}$, kde K_{m-1} je počet doplňků na hladině $m - 1$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m,2k} \\ \mathbf{d}_{m,2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \mathbf{d}_{m-1,k},$$

tj. budeme provádět DWT každého doplňku, budujeme strom paket. rozkladu symetricky do šířky, viz. obr.

Poznámka 6.8

Výběr waveletové báze je velmi důležitý a ovlivňuje výsledky zpracování. Obvykle se waveletová báze volí tak, aby se co nejvíce podobala zpracovávanému signálu - lépe zachycuje frekvence.

Při okenní transformaci jsou odstraněny vysoké frekvence (dochází k vyhlazení), zatímco u waveletové transformace jsou zachyceny všechny frekvence. WT se hodí jak pro stacionární, tak pro nestacionární signály.

Aproximační vlastnosti waveletů - dnes existuje celá řada různých hledisek, dle kterých lze wavelety dělit na spojité, diskrétní, lineární, harmonické, ortogonální, biortogonální, s kompaktním nosičem a jiné. Lze však vyčlenit 3 základní parametry, podle nichž lze hodnotit aproximační vlastnosti waveletů:

- L - stupeň lokalizace,
- C - počet prvních nulových momentů,
- S - hladkost, tj. do které třídy funkcí příslušná škálová funkce patří.

Algoritmus 6.2 - Implementace přímé, zpětné DWT (Haarův wavelet)

```
function [ca, cd]=mydwt(a)
N=length(a);
h(1)=1; h(2)=1; h=h/sqrt(2);
g(1)=1; g(2)=-1; g=g/sqrt(2);
for i=1:N/2
    H(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=h;
    G(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=g;
end
M=[H; G];
b=M*a;
ca=b(1:N/2,1);
cd=b(N/2+1:N,1);
```

```
-----
function [a]=myidwt(ca, cd)
c=[ca; cd]; N=length(a);
h(1)=1; h(2)=1; h=h/sqrt(2);
g(1)=1; g(2)=-1; g=g/sqrt(2);
for i=1:N/2
    H(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=h;
    G(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=g;
end
M=[H; G];
a=M'*c;
```


Algoritmus 6.2 - Použití DWT při filtraci

```
function [C,R]=wavdemo(f,M)
N=length(f); C=f;
for i=1:M
    for j=1:2^(i-1)
        n=N/2^(i-1); %delka paketu na i-te hladine
        % Vypocet komprim.,doplň. koef. pomoci komplex. waveletu
        [ca, cd]=mydwt(C(i,(j-1)*n+1:j*n));
        C(i+1,(j-1)*n+1:j*n)=[ca(1:n/2), cd(1:n/2)];
    end
end
% Vyhlazení
R=C;
for i=1:N
    if(abs(C(M+1,i))<=median(f)) R(M+1,i)=0; nvyhl=nvyhl+1; end
end
% Rekonstrukce vyhl.signalu
for i=M+1:-1:2
    for j=1:2:2^(i-1)
        m=floor(N/2^(i-1));
        fx=myidwt(R(i,(j-1)*n+1:j*n),R(i,j*n+1:(j+1)*n));
        R(i-1,(j-1)*n+1:(j-1)*n+length(fx))=fx;
    end
end
R=real(R); plot(C(1,:)); hold on; plot(R(1,:),'r');
```

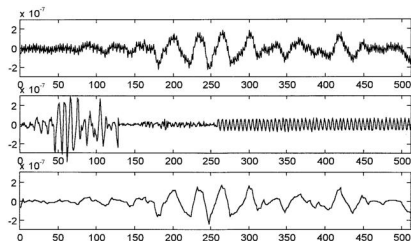
6.7 Paketový rozklad

Příklad 6.9

Proveďte DWT vzorkovaného reálného seismického signálu na 2 hladiny pomocí Meyerovského waveletu a filtraci pomocí kvantilového prahování.

Řešení

Výsledek je zobrazen na následujícím obr.



Obrázek: Reálný seismic.signál, jeho DWT a rekonstrukce po kvantil. prahování

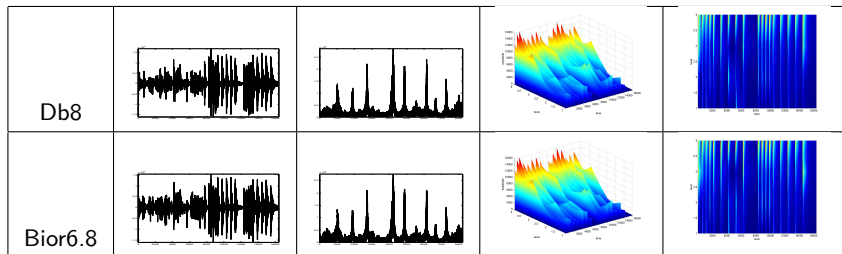
6.7 Paketový rozklad

Příklad 6.10

Pomocí DWT a multirozkladu nalezněte časově-frekvenční spektrum hudební skladby.

Řešení

Provedena 3-úrovňová MRA analýza, čímž jsme obdrželi 4 frekv. hladiny odpovídající koef. a_3, d_3, d_2, d_1 , 1. hl. (a_3) 0-2756,25 Hz, 2. hl. (d_3) 2756,25-5512,5 Hz, 3. hl. (d_2) 5512,5-11025 Hz a 4. hl. (d_1) 11025-22050 Hz. Výsledné multirozklady, jejich Four. amplit. a čas.-frekv. spektra i při pohledu shora získaná pomocí waveletu Db8 a Bior6.8 jsou na obr.



Obrázek: Čas.-frekv. analýza hud. skladby pomocí DWT

6.8 Dvourozměrná WT

Triviální způsob vytvoření 2D ortonorm. wav. báze z ortonorm. 1D wav. báze $\psi_{m,n}(t) = m^{m/2}\psi(2^m t - n)$ je založen na jejich tenzorovém součinu:

$$\psi_{m_1, n_1, m_2, n_2}(t_1, t_2) = \psi_{m_1, n_1, m_2, n_2}(x, y) = \psi_{m_1, n_1}(x)\psi_{m_2, n_2}(y).$$

V nové bázi proměnné x, y mají různé koef. dilatace. Jiná konstrukce 2D waveletu

$$\psi_{m,n}(x, y) = 2^m \psi(2^m x - n, 2^m y - k),$$

kde x, y mají v nové bázi stejné koef. dilatace. Fce ψ v tomto případě je tvořena 3 elementárními wavelety

$$2^m \psi_1(2^m x - n) \psi_2(2^m y - k), \quad 2^m \psi_2(2^m x - n) \psi_1(2^m y - k), \quad 2^m \psi_2(2^m x - n) \psi_2(2^m y - k).$$

Analýza se provádí v horizontálním směru, ve vertikálním a po diagonále.

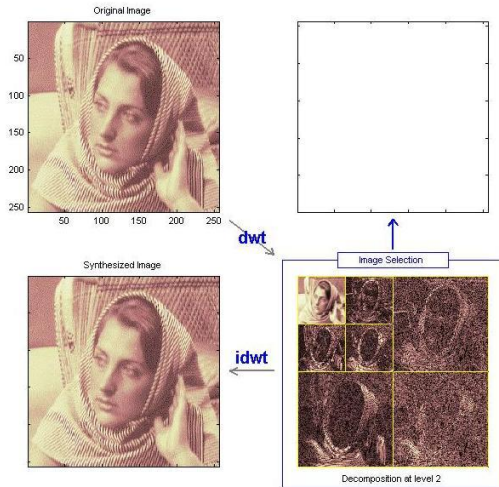
Na obrázku je znázorněno rozložení wav. koef. geometrických objektů při různých úrovních rozkladu $m = 1$ a $m = 2$ ale při stejných dilat. koef. Při dekompozici $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0$ mající M řádků a N sloupců na první úroveň použijeme 1D DWT nejdříve na řádky (sloupce) a pak na sloupce (řádky), 2D DWT na první hladinu rozkladu bude.

$$\mathbf{f}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{mM} \mathbf{f}_{m-1} \mathbf{H}_{mN}^T & \mathbf{H}_{mM} \mathbf{f}_{m-1} \mathbf{G}_{mN}^T \\ \mathbf{G}_{mM} \mathbf{f}_{m-1} \mathbf{H}_{mN}^T & \mathbf{G}_{mM} \mathbf{f}_{m-1} \mathbf{G}_{mN}^T \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{mM} \mathbf{f}_{m-1} \mathbf{M}_{mN}^T, \quad m = 1, 2, \dots,$$

pro $m = 1$

$$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{M \times N}, \mathbf{M}_{1M} \in \mathbb{R}^{M \times M}, \mathbf{M}_{1N} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbf{H}_{1M}, \mathbf{G}_{1M} \in \mathbb{R}^{\frac{M}{2} \times M}, \mathbf{H}_{1N}, \mathbf{G}_{1N} \in \mathbb{R}^{\frac{N}{2} \times N}.$$

6.8 Dvourozměrná WT



Obrázek: 2D DWT - Matlab. příklad

7 Z-transformace (ZT)

7.1 Definice přímé a zpětné ZT

Při studiu spojité LT jsme u originálu $f(t)$ požadovali tzv. ohraničený (omezený) růst a po částech spojitost $f(t)$ i $f'(t)$, pak L-obrazem byla komplex. fce komplex. proměnné $F(s)$. V případě ZT bude originálem posloupnost komplex. resp. reál. čísel $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ a Z-obrazem komplex. fce komplex. proměnné $F(z)$.

Věta 7.1

Nechť pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \exists M \in \mathbb{R}^+$

$$\exists s \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : |f_n| \leq M e^{sn}, \quad (33)$$

pak je řada konvergentní na množině $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > e^s = R\}$ (tj. vně kruhu).

Důkaz

Pro případ jednostranné ZT při platnosti (33) dokážeme abs. konvergenci řady z níž plyne její konvergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| |z^{-n}| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} (e^s z^{-1})^n = \frac{M}{1 - e^s |z|^{-1}} < \infty, |z| > e^s.$$

7.1 Definice přímé a zpětné ZT

Definice 7.2

Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je čísel. posl. v \mathbb{C} resp. \mathbb{R} splňující (33). Jednostranná ZT této posl. je def.

$$F(z) = Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}. \quad (34)$$

Poznámka 7.3

V celém textu budeme mít pod pojmem ZT na mysli vždy jednostrannou ZT.

7.1 Definice přímé a zpětné ZT

Věta 7.4

ZT posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ daná vztahem (34) je v oblasti Ω regulární (holomorfní) fce $F(z)$ komplex. proměnné z . Bod $z = \infty$ je bodem odstran. singularity, nebo v něm $F(z)$ není singulární. Vždy ale platí

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f_0.$$

Poznámka 7.5

Singulární body $F(z)$ leží uvnitř nebo na hranici kruhu s poloměrem R .

Ke všem $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovujícím nerovnosti (33) podle v. 7.1 existuje jejich Z-obraz $F(z)$ na množině Ω . Naskýtá se otázka, zda naopak ke všem fcím $F(z)$, holomorf. (regulár.) na Ω odpovídá právě jedna posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující uvedené podmínky a vztah (34).

7.1 Definice přímé a zpětné ZT

Věta 7.6

Ke každé fci regulární (holomorfní) $F(z)$ na $P(\infty)$ a mající v ∞ buď odstran. singularitu, nebo žádnou, tzn. $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \neq \infty$, existuje právě jedna posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující (33).

Důkaz

Řada (34) reprezentuje regulární část Laurent. rozvoje fce $F(z)$ se středem v bodě ∞ , tedy existuje prstenc. okolí $P(\infty)$, v němž je $F(z)$ regulární. Z jednoznačnosti Laurent. rozvoje plyne

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) z^{n-1} dz \quad (35)$$

pro $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $R \in \mathbb{R}^+$ tak aby obraz křivky $\langle \gamma \rangle \subset P(\infty)$. K důkazu ohraničenosti růstu

$$|f_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} F(z) z^{n-1} dz \right| \leq \frac{2\pi R}{2\pi} MR^{n-1} = MR^n = Me^{n \ln R} = Me^{sn}, M = \max_{z \in \langle \gamma \rangle} |F(z)|.$$

7.1 Definice přímé a zpětné ZT

Definice 7.7

Vztah (35) definuje zpětnou (inverzní) Z-transformaci.

Poznámka 7.8

Při řešení konkrétních úloh je Z-obraz $F(z)$ nejčastěji dán racionální funkcí, jejíž čítel je nejvýše stejného stupně jako jmenovatel. Pak zpětnou ZT lze provést několika snadnějšími způsoby (obdobně jako v případě LT):

1. $F(z)$ rozložíme na funkce, k nimž známe vzory, využíváme vlastností ZT a postupně budujeme „slovník“.
2. má-li $F(z)$ konečný počet k sing. bodů, pak při výpočtu integrálu ve vztahu (35) lze použít základní větu o reziduích

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^k \text{Res} [F(z) z^{n-1}]_{z=z_i}. \quad (36)$$

3. využití věty o obrazu konvoluce dvou posloupností v případě, že $F(z)$ je součinem dvou funkcí.

7.1 Definice přímé a zpětné ZT

Příklad 7.9

Určete ZT posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_0 = a \in \mathbb{C}$, $f_n = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Řešení

$$Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \frac{a}{z^0} + \sum_{n=1}^{\infty} 0 z^{-n} = a.$$

Příklad 7.10

Určete ZT posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_n = a \in \mathbb{C}$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení

$$Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{a}{1-z^{-1}} = \frac{az}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

7.1 Definice přímé a zpětné ZT

Příklad 7.11

Určete ZT posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_n = e^{cn}$, $c \in \mathbb{C}$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení

$$Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{cn} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-n}}{e^{-cn}} \right) = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{e^c}\right)^{-1}} = \frac{z}{z - e^c}, \quad |z| > |e^c|.$$

Příklad 7.12

Dokažte, že originálem ZT k funkci $F(z) = \frac{1}{z^k}$, $k \in \mathbb{N}$ je posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_n = \delta_{kn} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$.

Řešení

$$Z(\{\delta_{kn}\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{kn} z^{-n} = 0 + \frac{0}{z} + \dots + \frac{0}{z^{k-1}} + \frac{1}{z^k} + \frac{0}{z^{k+1}} + \dots = \frac{1}{z^k}, \quad |z| > 0$$

7.1 Definice přímé a zpětné ZT

Příklad 7.13

Najděte zpětnou ZT funkce $F(z) = \frac{z(z-1)}{(z-1)^3}$.

Řešení

Výpočet provedeme pomocí vztahu (36). $F(z)$ má v čitateli polynom 2. stupně, v jmenovateli polynom 3. stupně. f_n můžeme vypočítat jako

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z(z-1)}{(z+1)^3} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^n(z-1)}{(z+1)^3} dz,$$

kde γ je kružnice se středem $0 + 0i$ a poloměrem $R > 1$. Integrovaná funkce má v bodě $-1 + 0i$ pól třetího řádu. Podle věty o reziduích platí

$$\begin{aligned} f_n &= \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^n(z-1)}{(z+1)^3} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (z^n(z-1)) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left((n+1)nz^{n-1} - n(n-1)z^{n-2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left((n+1)n(-1)^{n-1} - n(n-1)(-1)^{n-2} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} (n^2 + n + n^2 - n) = (-1)^{n-1} n^2. \end{aligned}$$

7.2 Vlastnosti ZT

Věta 7.14

(linearita ZT) Necht posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňují podmínky pro sestavení Z-obrazů $F(z)$, $G(z)$. Necht a , b jsou komplexní (reálné) konstanty, pak

$$Z(\{af_n + bg_n\}_{n=0}^{\infty}) = aF(z) + bG(z).$$

Důkaz

Plyne přímo z definice:

$$Z(\{af_n + bg_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} (af_n + bg_n) z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} + b \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} = aF(z) + bG(z).$$

7.2 Vlastnosti ZT

Příklad 7.15

Pomocí věty o linearitě určete ZT posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = \cos(cn) \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, kde $c \in \mathbb{C}$.

Řešení

Z příkladu 7.11 víme, že

$$Z\left(\left\{e^{icn}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = F_1(z) = \frac{z}{z - e^{ic}}, \quad |z| > |e^c|,$$

$$Z\left(\left\{e^{-icn}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = F_2(z) = \frac{z}{z - e^{-ic}}, \quad |z| > |e^{-c}|.$$

Nyní využijeme větu o linearitě

$$Z\left(\left\{\cos(cn)\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{\frac{1}{2}e^{icn} + \frac{1}{2}e^{-icn}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{1}{2}F_1(z) + \frac{1}{2}F_2(z) = \frac{z(z - \cos(c))}{z^2 - 2z \cos(c) + 1}; \quad |z| > \max\{|e^c|, |e^{-c}|\}.$$

Věta 7.16

(o podobnosti obrazů) Je dána posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, její obraz $F(z)$ a $\mathbb{C} \ni a \neq 0$. Pak

$$Z(\{a^n f_n\}_{n=0}^{\infty}) = F\left(\frac{z}{a}\right).$$

Důkaz

Plyne přímo z definice

$$Z(\{a^n f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{a}\right).$$

Věta 7.17

(násobení originálu exponenciální funkcí - tlumení) Nechť $F(z)$ je Z-obraz posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, nechť a je komplexní konstanta, pak

$$Z(\{e^{an} f_n\}_{n=0}^{\infty}) = F\left(\frac{z}{e^a}\right).$$

Důkaz

Plyne přímo z definice:

$$Z(\{e^{an} f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{an} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{z}{e^a}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{e^a}\right).$$

7.2 Vlastnosti ZT

Věta 7.18

(Z-obraz konvoluce originálů (vzorů), věta o součinu obrazů) Mějme posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ a jejich Z-obrazy $F(z)$, $G(z)$. Pak

$$Z\left(\{(f \star g)_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{\sum_{i=0}^n f_i g_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{\sum_{i=0}^n f_{n-i} g_i\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = F(z)G(z).$$

Důkaz

Mějme obrazy $F(z)$, $G(z)$ a jejich originály $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$. Součin $F(z)G(z)$ bude

$$\begin{aligned} F(z)G(z) &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} f^l z^{-l}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} g^k z^{-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n f_i g_{n-i}\right) z^{-n} = \\ &= Z\left(\left\{\sum_{i=0}^n f_i g_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{(f \star g)_n\}_{n=0}^{\infty}\right). \end{aligned}$$

7.2 Vlastnosti ZT

Příklad 7.19

Pomocí věty o součinu obrazů určete ZT posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = 1 + e^c + e^{2c} + \dots + e^{nc}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení

Protože pro posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahy $a_n = e^{cn}$, $b_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\{(a \star b)_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ a protože z předchozích příkladů známe výsledky

$$Z(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{e^{cn}\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{z}{z - e^c}, \quad |z| > |e^c|,$$

$$Z(\{b_n\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{1\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1,$$

plyne z věty o konvoluci vzorů

$$Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{(a \star b)_n\}_{n=0}^{\infty}) = F(z)G(z) = \frac{z^2}{(z - 1)(z - e^c)}, \quad |z| > \max\{|e^c|, 1\}.$$

Definice 7.20

Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost v \mathbb{C} a necht' $k \in \mathbb{N}$. Pod pojmem “posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunutá o k vpravo”, budeme značit $\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}$, rozumíme posloupnost

$$\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 0, \dots, 0, f_1, f_2, f_3, \dots\}$$

a pod pojmem “posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunutá o k vlevo”, budeme značit $\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, rozumíme posloupnost

$$\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty} = \{f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots\}.$$

Věta 7.21

(posunutí vzoru (originálu) vpravo) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$ a $k \in \mathbb{N}$. Pro posloupnost posunutou o k vpravo, tj. $\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}$ pak platí

$$Z(\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}) = z^{-k}F(z).$$

Důkaz

Posunutou posloupnost rozložíme na dvě posloupnosti, a provedeme přeindexování

$$\begin{aligned} Z(\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}) &= \sum_{n=0}^{k-1} f_{n-k}z^{-n} + \sum_{n=k}^{\infty} f_{n-k}z^{-n} = \sum_{n=0}^{k-1} 0z^{-n} + \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-(i+k)} = \\ &= z^{-k} \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} = z^{-k}F(z). \end{aligned}$$

7.2 Vlastnosti ZT

Příklad 7.22

Pomocí věty o posunutí vzoru vpravo určete ZT posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = e^{c(n-k)}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{C}$.

Řešení

Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ získáme z posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $g_n = e^{cn}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ posunutím o k vpravo. Z příkladu 7.11 víme, že

$$Z(\{e^{cn}\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{z}{z - e^c} = G(z), \quad |z| > |e^c|.$$

Použitím věty o posunutí vpravo dostaneme:

$$Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{e^{c(n-k)}\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{g_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{G(z)}{z^k} = \frac{z}{z^k(z - e^c)}, \quad |z| > |e^c|.$$

7.2 Vlastnosti ZT

Věta 7.23

(posunutí vzoru vlevo) Necht posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$ a $k \in \mathbb{N}$. Pro posloupnost posunutou o k vlevo, tj. $\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$ pak platí

$$Z(\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}) = z^k \left(F(z) - \sum_{n=1}^{k-1} f_n z^{-n} \right).$$

Důkaz

Z tvaru posloupnosti posunuté o k vlevo dostáváme

$$\begin{aligned} Z(\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} = \sum_{i=k}^{\infty} f_i z^{-(i-k)} = z^k \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i} \right) = \\ &= z^k \left(F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right). \end{aligned}$$

7.2 Vlastnosti ZT

Příklad 7.24

Pomocí věty o posunutí vzoru vpravo určete ZT posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = e^{c(n+k)}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{C}$.

Řešení

Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ získáme z posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $g_n = e^{cn}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ posunutím o k vlevo. Z příkladu 7.11 víme, že

$$Z(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{e^{cn}\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{z}{z - e^c} = G(z).$$

Použitím věty o posunutí vpravo dostaneme

$$Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{g_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}) = z^k \left(G(z) - \sum_{n=0}^{k-1} g_n z^{-n} \right) = z^k \left(\frac{z}{z - e^c} - \sum_{n=0}^{k-1} e^{cn} z^{-n} \right).$$

Definice 7.25

Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost v \mathbb{C} a $k \in \mathbb{N}$. Dopřednou resp. zpětnou diferencí posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, budeme označovat $\{\Delta f_n\}_{n=0}^{\infty}$ resp. $\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty}$, rozumíme posloupnost

$$\{\Delta f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_{n+1} - f_n\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{resp.} \quad \{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n - f_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}.$$

Dopřednou resp. zpětnou diferencí k -tého řádu posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, budeme označovat $\{\Delta^k f_n\}_{n=0}^{\infty}$ resp. $\{\nabla^k f_n\}_{n=0}^{\infty}$, definujeme rekurentně pomocí první dopředné resp. zpětné difference

$$\{\Delta^k f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\Delta (\Delta^{k-1} f_n)\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{resp.} \quad \{\nabla^k f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\nabla (\nabla^{k-1} f_n)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Věta 7.26

(obraz dopředných diferencí 1. řádu) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Pro obraz její první dopředné diference pak platí

$$Z(\{\Delta f_n\}_{n=0}^{\infty}) = (z-1)F(z) - f_0z.$$

Důkaz

Z linearity ZT a věty o posloupnosti posunutě o k vlevo dostáváme

$$\begin{aligned} Z(\{\Delta f_n\}_{n=0}^{\infty}) &= Z(\{f_{n+1} - f_n\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{f_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}) - Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \\ &= z(F(z) - f_0) - F(z) = (z-1)F(z) - f_0z. \end{aligned}$$

7.2 Vlastnosti ZT

Věta 7.27

(obraz dopředných diferencí k -tého řádu) Nechť posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Pro obraz její k -té dopředné diference pak platí

$$Z\left(\left\{\Delta^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = (z-1)^k F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-i-1} \Delta^i f_0.$$

Důkaz

Matematickou indukcí: pro $k=1$: $Z\left(\left\{\Delta^1 f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = (z-1)F(z) - f_0 z = (z-1)^1 F(z) - z \sum_{i=0}^{1-1} (z-1)^{1-i-1} \Delta^0 f_0$,
předpokládáme platnost vztahu pro k a z předpokladu dokazujeme platnost pro $k+1$

$$\begin{aligned} Z\left(\left\{\Delta^{k+1} f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) &= (z-1)Z\left(\left\{\Delta^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) - z \Delta^k f_0 = (z-1) \left[(z-1)^k F(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-i-1} \Delta^i f_0 \right] - z \Delta^k f_0 \\ &= (z-1)^{k+1} F(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{(k+1)-i-1} \Delta^i f_0 - z \Delta^k f_0 (z-1)^{(k+1)-k-1} = (z-1)^{k+1} F(z) - z \sum_{i=0}^k (z-1)^{(k+1)-i-1} \Delta^i f_0. \end{aligned}$$

7.2 Vlastnosti ZT

Věta 7.28

(obraz zpětných diferencí 1. řádu) Necht posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Pro obraz její první zpětné diference pak platí

$$Z(\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{z-1}{z}F(z).$$

Důkaz

Z linearity ZT a věty o posloupnosti posunutě o k vpravo dostáváme

$$\begin{aligned} Z(\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty}) &= Z(\{f_n - f_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) - Z(\{f_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}) = \\ &= F(z) - z^{-1}F(z) = \frac{z-1}{z}F(z). \end{aligned}$$

Věta 7.29

(obraz zpětných diferencí k -tého řádu) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Pro obraz její k -té zpětné diference pak platí

$$Z(\{\nabla^k f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^k F(z).$$

Důkaz

Matematickou indukcí: pro $k = 1$

$$Z(\{\nabla^1 f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^1 F(z),$$

předpokládáme platnost vztahu pro k a z předpokladu dokazujeme platnost pro $k + 1$

$$Z(\{\nabla^{k+1} f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{z-1}{z} Z(\{\nabla^k f_n\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z-1}{z}\right)^k F(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{k+1} F(z).$$

7.2 Vlastnosti ZT

Věta 7.30

(derivace obrazu) Necht' posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Potom platí

$$Z(\{nf_n\}_{n=0}^{\infty}) = -z \frac{dF(z)}{dz}.$$

Důkaz

Podívejme se blíže na první derivaci $F(z)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F(z) &= \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} -n f_n z^{-n-1} = \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n f_n}{z^n} = -\frac{1}{z} Z(\{n f_n\}_{n=0}^{\infty}) \Rightarrow \frac{d}{dz} F(z) = -\frac{1}{z} Z(\{n f_n\}_{n=0}^{\infty}). \end{aligned}$$

Vynásobíme-li obě strany posledního výrazu $-z$, $z \neq 0$ dostaneme dokazovaný vztah.

7.2 Vlastnosti ZT

Příklad 7.31

Pomocí věty o derivaci obrazu určete ZT posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení

Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ získáme z posl. $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $g_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ násobením každého n -tého členu číslem n . Z-obraz posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ (viz. př. 7.10, $a = 1$) bude

$$Z(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{1\}_{n=0}^{\infty}) = \frac{z}{z-1} = G(z), \quad |z| > 1.$$

Použitím věty o derivaci obrazu dostáváme

$$Z(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) = Z(\{n1\}_{n=0}^{\infty}) = -z \frac{dG(z)}{dz} = -z \left(\frac{z}{z-1} \right)' = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1.$$

Věta 7.32

(integrace obrazu) Necht' posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_0 = 0$ má obraz $F(z)$. Jako posloupnost $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ označme posloupnost danou vztahem $g_0 = 0$, $g_n = \frac{f_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Pro tuto posloupnost platí

$$Z(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}) = \int_z^{\infty} \frac{F(w)}{w} dw.$$

7.2 Vlastnosti ZT

Příklad 7.33

Pomocí v. o integr. obrazu určete ZT posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = 0, f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Řešení

Pro Z-obraz posloupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $c_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$Z\left(\{c_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{-1}{z}} = \frac{z}{z+1}, |z| > 1.$$

Posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots\}$ vzniká z posl. $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunutím o jeden člen doprava a má Z-obraz

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = F(z) = \frac{C(z)}{z} = \frac{1}{z+1}, |z| > 1.$$

Pro posl. $\{g_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{2}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots\right\}$ bude Z-obraz na základě v.7.32: $Z\left(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = G(z) =$

$$= \int_z^{\infty} \frac{F(w)}{w} dw = \int_z^{\infty} \frac{1}{w(w+1)} dw = \lim_{w \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{w}{w+1}\right) - \ln\left(\frac{z}{z+1}\right) = \ln(1) - \ln\left(\frac{z}{z+1}\right) = \ln\left(\frac{z+1}{z}\right).$$

7.2 Vlastnosti ZT

Věta 7.34

(derivace podle parametru) Necht posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Potom pro derivaci f_n podle parametru w platí

$$Z \left(\left\{ \frac{\partial f_n(w)}{\partial w} \right\}_{n=0}^{\infty} \right) = \frac{\partial F(z, w)}{\partial w}.$$

Věta 7.35

(integrace podle parametru) Necht posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Potom pro integraci f_n podle parametru w platí

$$Z \left(\left\{ \int_a^b f_n(w) dw \right\}_{n=0}^{\infty} \right) = \int_a^b F(z, w) dw.$$

7.2 Vlastnosti ZT

Věta 7.36

(obraz částečných součtů) Nechť posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Potom pro posl. částečných součtů $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ platí

$$\left\{ \sum_{i=0}^n f_i \right\}_{n=0}^{\infty} = \{g_n\}_{n=0}^{\infty} \Rightarrow Z\left(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{ \sum_{i=0}^n f_i \right\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z}{z-1} F(z) = G(z).$$

Důkaz

Nechť částečné součty jsou $g_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} f_i$, $g_n = \sum_{i=0}^n f_i$.
První dopředná diference a její Z-obraz (věta 7.26) bude

$$\Delta g_n = f_{n+1} \Rightarrow Z\left(\{\Delta g_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = (z-1)G(z) - zg_0 = z(F(z) - f_0) = Z\left(\{f_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}\right).$$

Použitím věty o posunutí doleva a z platnosti vztahu $f_0 = g_0$ dostaneme

$$(z-1)G(z) = zF(z).$$

7.3 Vztah mezi diskrétní LT a ZT

LT je zobrazení definované vztahem

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

kde originál $f(t)$ je komplexní fce reál. proměnné: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, obraz $F(s)$ je holomorfní (analytická, regulární) fce komplex. proměnné $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a jádro LT $e^{-st} = K(s, t)$ je zobrazení $K: [\mathbb{R} \times \mathbb{C}] \rightarrow \mathbb{C}$.

Při pohledu na ZT def. vztahem (34), tj. $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ se nabízí zavedení nové nezávislé proměnné substitucí

$$z = e^s. \quad (37)$$

$$F(z) = F(e^s) = \widehat{F}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-ns},$$

což je obraz posl. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ při diskrétní LT. Když budeme zcela analogicky postupovat při zpětné ZT dané vztahem (35), tj. $f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z)z^{n-1} dz$, kde $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ a $\langle \gamma \rangle \subset P(\infty)$, při substituci (37) se křivka γ transformuje na křivku $\widetilde{\gamma}$, kterou je úsečka spojující body $\mu - \pi i$ a $\mu + \pi i$, $\mu > \ln R$, tj. $\widetilde{\gamma}(t) = \mu + it$, $t \in [-\pi, \pi]$. Pak po dosazení $dz = e^s ds$, dostaneme

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu - \pi i}^{\mu + \pi i} \widehat{F}(s) e^{ns} ds,$$

což je vztah pro nalezení originálu def. zpětnou diskrétní LT.

7.4 Využití ZT při řešení (soustav) diferenčních rovnic

LT jsme použili při řešení lin. diferenciálních rovnic s konst. koef. ZT použijeme při řešení diferenčních rovnic s konst. koef.

Definice 7.38

Lin. diferenční rovnice s konst. koef. k -tého řádu je def.

$$\Delta^k y_n + a_1 \Delta^{k-1} y_n + \dots + a_{k-1} \Delta y_n + a_k y_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (38)$$

kde a_1, a_2, \dots, a_k jsou konstanty, f je pravá strana rovnice, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ je hledané řešení diferenční rovnice, f, y nazýváme mřížkové funkce, které jsou dány ve tvaru posl. fčnich hodnot, $\Delta^k y_n$ je dopředná diference k -tého řádu posl. $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Poznámka 7.39

Použijeme-li pro diference vztahy z definice 7.25 lze diferenční rovnici přepsat ve tvaru

$$y_{n+k} + b_1 y_{n+k-1} + \dots + b_{k-1} y_{n+1} + b_k y_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

zde b_1, b_2, \dots, b_k jsou konstanty. Oba vztahy jsou rovnocenné.

7.4 Využití ZT při řešení (soustav) diferenčních rovnic

Použití ZT při řešení diferenčních rovnic je obdobné jako použití LT při řešení diferenciálních rovnic:

Na základě podmínek a předpokladů, že k dané diferenční rovnici lze sestavit její Z-obraz

- 1 sestavíme Z-obraz diferenční rovnice s použitím věty o linearitě,
- 2 vypočteme obraz řešení $Y(z)$,
- 3 pomocí zpětné ZT nalezneme řešení $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

7.4 Využití ZT při řešení (soustav) diferenčních rovnic

Příklad 7.40

S využitím ZT určete partikulární řešení diferenční rovnice

$$\begin{cases} \Delta^2 y_n - y_n = 1, & \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ y_0 = 0, & \Delta y_0 = 1 \end{cases}.$$

Řešení

Nejdříve ukážeme, že danou rovnici lze přepsat do ekviv. tvaru bez použití diferencí

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_n - y_n &= \Delta(y_{n+1} - y_n) - y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n - y_n = \\ &= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) - y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1}. \end{aligned}$$

Diferenční rovnici teď obdržíme ve tvaru:

$$\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} = 1, & \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ y_0 = 0, & \Delta y_0 = 1 \end{cases}.$$

Oba tvary jsou rovnocenné, popisují stejný problém.

7.4 Využití ZT při řešení (soustav) diferenčních rovnic

Řešení: 1.

Předpokládáme, že existuje Z-obraz $Y(z) = Z\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ řešení této diferenční rovnice, pak na základě vět o posunutí vlevo nebo vět o obrazech diferencí sestavíme Z-obraz diferenční rovnice. Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1^n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená a její Z-obraz je

$$Z\left(\{1\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1z^{-1} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

Z-obraz levé strany diferenční rovnice bude

$$Z\left(\Delta^2 y_n - y_n\right) = Z(y_{n+2} - 2y_{n+1}) = Z(y_{n+2}) - Z(2y_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Jelikož na základě vět o posunutí vlevo

$$Z(y_{n+1}) = z(Y(z) - y_0) = z(Y(z) - 0) = zY(z),$$

$$Z(y_{n+2}) = z(Z(y_{n+1}) - y_1) = (Z(y_{n+1}) - 1) = z^2 Y(z) - z, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

potom Z-obraz diferenční rovnice bude

$$Z(y_{n+2}) - 2Z(y_{n+1}) = \frac{z}{z-1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow z^2 Y(z) - 2zY(z) - z = \frac{z}{z-1}.$$

7.4 Využití ZT při řešení (soustav) diferenčních rovnic

Řešení: 2.

Vyřešíme transformovanou rovnici

$$(z^2 - 2z) Y(z) = \frac{z}{z-1} + z \Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z(z-1)(z-2)} + \frac{z}{z(z-2)} = \frac{z + z(z-1)}{z(z-1)(z-2)},$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}, \quad |z| > 2.$$

7.4 Využití ZT při řešení (soustav) diferenčních rovnic

Řešení: 3.a)

Hledáme originál - řešení diferenční rovnice $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ k nalezenému obrazu $Y(z)$ rozkladem obrazu na funkce, k nimž známe vzory (rozklad na parciální zlomky)

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^{\ln 2}}\right) = \{e^{n \ln 2}\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n\}_{n=0}^{\infty},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^0}\right) = \{e^{n \cdot 0}\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) - Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 3, 7, \dots).$$

7.4 Využití ZT při řešení (soustav) diferenčních rovnic

Řešení: 3.b)

podle definičního vztahu (36), kde γ je kružnice se středem v bodě 0 a poloměru $R > 2$, integrovaná funkce má v bodech $1 + 0i$ a $2 + 0i$ póly prvního řádu, proto

$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^{n-1}z}{(z-1)(z-2)} dz = \operatorname{Res}_{z=1} \frac{z^n}{(z-1)(z-2)} + \operatorname{Res}_{z=2} \frac{z^n}{(z-1)(z-2)} \Rightarrow$$

$$y_n = -1 + 2^n \Rightarrow \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty}.$$

7.4 Využití ZT při řešení (soustav) diferenčních rovnic

Řešení: 3.c)

použitím konvoluce dvou posloupností: $Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z-2} \cdot \frac{1}{z-1}$,

$$Z^{-1} \left(\frac{z}{z-2} \right) = Z^{-1} \left(\frac{z}{z - e^{\ln 2}} \right) = \left\{ e^{n \ln 2} \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 2^n \right\}_{n=0}^{\infty} = \{g_n\}_{n=0}^{\infty},$$

$$Z^{-1} \left(\frac{z}{z-1} \right) = Z^{-1} \left(\frac{z}{z - e^0} \right) = \left\{ e^{n \cdot 0} \right\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty}.$$

Na základě v. o posunutí vpravo $Z^{-1} \left(\frac{1}{z-1} \right) = Z^{-1} \left(z^{-1} \frac{z}{z-1} \right) = \{0, 1, 1, 1, \dots\} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$. Partikul. řešení bude

$$Z^{-1} \left(\frac{z}{(z-1)(z-2)} \right) = \left\{ (g * h)_n \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=0}^n h_k g_{n-k} \right\}_{n=0}^{\infty}, \quad y_0 = \sum_{k=0}^0 h_0 g_0 = 0 = 1 - 1 = 2^0 - 1,$$

$$\begin{aligned} \{y_n\}_{n=1}^{\infty} &= \left\{ \sum_{k=0}^n h_k g_{n-k} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=1}^n 1 \cdot 2^{n-k} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 2^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 2^n \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \left\{ 2^n \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 2^n - \left(\frac{2}{2} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 2^n - 1 \right\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 2^n - 1 \right\}_{n=1}^{\infty} = (0, 1, 3, 7, \dots). \end{aligned}$$



N. Častová, D. Horák: Okenní transformace, Sborník z 7. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, Ostrava, 1998.



N. Častová, E. Dršťáková, D. Horák: Časově-frekvenční analýza modelovaného signálu, Sborník z 8. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, Ostrava, 1999.



T. P. Kraus, L. Shure, J. N. Little: Signal Processing Toolbox, MathWorks, Inc.



B. Torrèsani: An Overview of Wavelet Analysis and Time-Frequency Analysis, Universite de Provence, Marseille.



K. Rektorys: Přehled užití matematiky, Prometheus, 1995.



J. Bouchala: Funkce komplexní proměnné, učební text, www.am.vsb.cz/bouchala.



N. Častová, T. Kozubek: Integrální transformace, www.am.vsb.cz/studium.



D. Horák: Sylaby k předmětům Integrální transformace a Diskrétní transformace, www.am.vsb.cz/horak/ITDT.



P. Galajda, Š. Schrötter: Funkcie komplexnej premennej a operátorový počet, Alfa, Bratislava, ISBN 80-05-00800-7, 1991.



wikipedie - konvoluce.



N. Častová, D. Horák, Z. Kaláb: Description of seismic events using wavelet transform, International journal of wavelets multiresolution and information processing, Volume 4, Issue 3, 405-414, 2006.