SBÍRKA ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ Z INTEGRÁLNÍCH A DISKRÉTNÍCH TRANSFORMACÍ

David Horák

16. července 2018

1 Úvod

Výpočet integrálního obrazu souvisí s hledáním Fourierovských koeficientů, resp. souřadnic zadaného originálu v dané ortogonální resp. ortonormální bázi. Je to právě ortogonalita resp. ortonormalita, která přináší mnoho "příjemných" vlastností a významně zjednodušuje výpočet jak přímé tak zpětné transformace, který u konečnědimenzionálních prostorů může být vyjádřen pomocí násobení transformační matice a vektoru originálu. Proto se první příklady věnují ortonormalizačním procesům, ověřování ortonormality vůči zadanému skalárnímu součinu, sestavování transformačních matic apod. Následují příklady na výpočet Fourierova rozvoje, amlitudového a fázového spektra, diskrétní Fourierovy transformace (zobecněné i klasické), konvoluce funkcí a vektorů, waveletovy transformace. Pro studenta budou taktéž přínosem i aplikace Laplaceovy transformace na řešení diferenciálních rovnic a Z-transformace na řešení diferenčních rovnic.

Máme-li ortonormální bázi k dispozici, k nalezení obrazu $\mathbf{F}$ (někdy též označovanému $\mathbf{c}$) tj. souřadnicového vektoru nám místo komplikovaného řešení soustavy lineárních rovnic stačí vyčíslit N skalárních součinů (skalární součin je symetrická bilineární forma, jíž odpovídající kvadratická forma je pozitivně definitní)

$$\left\langle \mathbf{r}_n^{\mathbf{M}}, \mathbf{f} \right\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} r_{n,i}^{\mathbf{M}} \overline{f_i} = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{r_{n,i}^{\mathbf{M}}} f_i, \; n = 0, ..., N-1,$$

které je realizovatelné jako násobení matice a sloupcového vektoru s originálem $\mathbf{f}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{r}_0^{\mathbf{M}}} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{r}_{N-1}^{\mathbf{M}}} \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \left\langle \mathbf{r}_0^{\mathbf{M}}, \mathbf{f} \right\rangle & \ldots & \left\langle \mathbf{r}_{N-1}^{\mathbf{M}}, \mathbf{f} \right\rangle \end{bmatrix}^T = \sum_{i=0}^{N-1} f_i \mathbf{s}_i^{\mathbf{M}},$$

kde matice $\mathbf{M}$ jako řádky $\mathbf{r}_i^{\mathbf{M}}$ obsahuje komplexně sdružené vektory ortonormální báze. Při zpětné (inverzní) transformaci, tj. nalezení originálu $\mathbf{f}$ ze zadaného obrazu $\mathbf{F}$, nepotřebujeme pracně hledat inverzní transformační matici $\mathbf{M}^{-1}$, neboť ta s ortonormálními bázovými vektory je rovna transpozici transformační matice, tedy $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$ a $\mathbf{r}_i^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{s}_i^{\mathbf{M}^T}}$. Když touto transpozicí $\mathbf{M}^T$přenásobíme sloupcový vektor obrazu $\mathbf{F}$, obdržíme originál $\mathbf{f}$ jako lineární kombinaci sloupců $\mathbf{s}_i^{\mathbf{M}^T}$ matice $\mathbf{M}^T$, tj. vektorů ortonormální báze

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{r}_0^{\mathbf{M}^T}} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{r}_{N-1}^{\mathbf{M}^T}} \end{bmatrix} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \left\langle \mathbf{r}_0^{\mathbf{M}^T}, \mathbf{F} \right\rangle & \ldots & \left\langle \mathbf{r}_{N-1}^{\mathbf{M}^T}, \mathbf{F} \right\rangle \end{bmatrix}^T = \sum_{i=0}^{N-1} F_i \mathbf{s}_i^{\mathbf{M}^T}.$$

2 Příklad:

Určete ortonormální bázi $E = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ prostoru V majícího bázi $F = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \mathbf{f}_0 = (1,0,1), \mathbf{f}_1 = (0,1,2), \mathbf{f}_2 = (2,1,0)$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_0\overline{y_0} + x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = \sum_{i=0}^{2} x_i \overline{y_i}.$$

Řešení:

Jedna možnost je Gram-Schmidtovým procesem nejprve ortogonalizovat vektory

$$\widetilde{\mathbf{e}_0} = \mathbf{f}_0 = (1,0,1)$$

$$\widetilde{\mathbf{e}_1} = \mathbf{f}_1 - \alpha\widetilde{\mathbf{e}_0},$$

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{f}_1, \widetilde{\mathbf{e}_0}\rangle}{\langle \widetilde{\mathbf{e}_0}, \widetilde{\mathbf{e}_0}\rangle} = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1}{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \Longrightarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{e}_1} = (0,1,2) - 1\cdot(1,0,1) = (-1,1,1)$$

$$\widetilde{\mathbf{e}_2} = \mathbf{f}_2 - \alpha_0\widetilde{\mathbf{e}_0} - \alpha_1\widetilde{\mathbf{e}_1},$$

$$\alpha_0 = \frac{\langle \mathbf{f}_2, \widetilde{\mathbf{e}_0}\rangle}{\langle \widetilde{\mathbf{e}_0}, \widetilde{\mathbf{e}_0}\rangle} = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle \mathbf{f}_2, \widetilde{\mathbf{e}_1}\rangle}{\langle \widetilde{\mathbf{e}_1}, \widetilde{\mathbf{e}_1}\rangle} = \frac{2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 0\cdot 1}{(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1} = -\frac{1}{3} = 1 \Longrightarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{e}_2} = (2,1,0) - 1\cdot(1,0,1) - (-\frac{1}{3})\cdot(-1,1,1) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$$

a následně každý z nich podělit jeho normou $\|\widetilde{\mathbf{e}_i}\| = \sqrt{\langle \widetilde{\mathbf{e}_i}, \widetilde{\mathbf{e}_i}\rangle}, i$=0,1,2

$$\mathbf{e}_0 = \frac{\widetilde{\mathbf{e}_0}}{\|\widetilde{\mathbf{e}_0}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,0,1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\widetilde{\mathbf{e}_1}}{\|\widetilde{\mathbf{e}_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-1,1,1) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\widetilde{\mathbf{e}_2}}{\|\widetilde{\mathbf{e}_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} + (-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{2}{3})}}\cdot(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{3}{\sqrt{24}}\cdot(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot (2,4,-2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1,2,-1) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}).$$

Vektory $\mathbf{e}_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), \mathbf{e}_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), \mathbf{e}_2 = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$ tak tvoří ortonormální bázi prostoru V.

Druhá možnost by byla normovat ortogonální vektory průběžně a využít tak vlastnosti, že $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1$, tedy

$$\widetilde{\mathbf{e}_0} = \mathbf{f}_0 = (1,0,1)$$

$$\mathbf{e}_0 = \frac{\widetilde{\mathbf{e}_0}}{\|\widetilde{\mathbf{e}_0}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\widetilde{\mathbf{e}_1} = \mathbf{f}_1 - \alpha \mathbf{e}_0,$$

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{e}_0 \rangle}{\langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle} = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{e}_0 \rangle = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Longrightarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{e}_1} = (0,1,2) - \sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (0,1,2) - (1,0,1) = (-1,1,1)$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\widetilde{\mathbf{e}_1}}{\|\widetilde{\mathbf{e}_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-1,1,1) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$\widetilde{\mathbf{e}_2} = \mathbf{f}_2 - \alpha_0 \mathbf{e}_0 - \alpha_1 \mathbf{e}_1,$$

$$\alpha_0 = \frac{\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_0 \rangle}{\langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle} = \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_0 \rangle = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} = \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{3}) + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{e}_2} = (2,1,0) - \sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{\sqrt{3}}{3}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) =$$

$$= (2,1,0) - (1,0,1) + (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\widetilde{\mathbf{e}_2}}{\|\widetilde{\mathbf{e}_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}+(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{2}{3})}}\cdot(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}) = \frac{3}{\sqrt{24}}\cdot(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot(2,4,-2) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(1,2,-1) = (\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}) = (\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6}).$$

3 Příklad:

Nalezněte souřadnice vektoru $\mathbf{f} = (1,2,3)$ v bázi $F = (\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2)$ z Příkladu 1.

Řešení:

Potřebujeme vyjádřit vektor $\mathbf{f}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2$ tj.

$$\mathbf{f} = \sum_{i=0}^{2}\alpha_i\mathbf{f}_i = \alpha_0\mathbf{f}_0 + \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2,$$

což představuje řešit soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}.$$

Neznámé souřadnice tedy může vypočítat

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_F\mathbf{f},$$

kde

$$\mathbf{M}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

V našem případě budeme např. Gaussovou eliminační metodou řešit soustavu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim^{r_3-r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim^{r_3-2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

a zpětnou substitucí ze soustavy s maticí ve schodovém tvaru obdržíme

$$\alpha_2 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}, \alpha_1 = 2-\alpha_2 = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \alpha_0 = 1-2\alpha_2 = 1-2\cdot\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Kdybychom soustavu řešili pomocí matice **M**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim^{r_3-r_1\to r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim^{r_3-2r_2\to r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim^{r_3/(-4)\to r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \sim^{r_2-r_3\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \sim^{r_1-2r_3\to r_1}$$

$$
\left[\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}
\end{array}\right] = [\mathbf{I} \,\vdots\, \mathbf{M}_F]
$$

souřadnicový vektor bychom získali následovně

$$
\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_F \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
$$

4 Příklad:

Nalezněte souřadnice vektoru $\mathbf{f} = (1,2,3)$ v bázi $E = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{e}_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), \mathbf{e}_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), \mathbf{e}_2 = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$ z Příkladu 1.

Řešení:

Potřebujeme vyjádřit vektor $\mathbf{f}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ tj.

$$
\mathbf{f} = \sum_{i=0}^{2} c_i \mathbf{e}_i = c_0 \mathbf{e}_0 + c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2.
$$

Řešit soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}
$$

je nyní zbytečné. Víme, že báze E je ortonormální a $i-$tá souřadnice je rovna

$$c_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_i \rangle, i = 0, 1, 2.$$

V důsledku ortonormality je nyní matice

$$\mathbf{M}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^T \\ \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix}.$$

Souřadnice $\mathbf{c}$ pak bez řešení soustavy lineárních rovnic získáme

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}_E \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^T \\ \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}.$$

Souřadnicový vektor $\mathbf{c}$ nazveme obrazem vektoru $\mathbf{f}$ a transformační matice obsahuje jako řádky komplexně sdružené vektory k vektorům ortonormální báze, násobení $\mathbf{M}_E \mathbf{f}$ pak odpovídá vyčíslení příslušných skalárních součinů.

5 Příklad:

Ortonormalizujte bázi $F = (1, x, x^2)$ vektorového prostoru P_3 všech polynomů stupně nejvýše 2 vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx.$$

Řešení

Mějme tedy vektory $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = x^2$. Gram-Schmidtovým ortonormalizačním procesem obdržíme

$$\widetilde{e_0} = f_0 = 1$$

$$e_0 = \frac{\widetilde{e_0}}{\|\widetilde{e_0}\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dx}} = \frac{1}{\sqrt{[x]_{-1}^{1}}} = \frac{1}{\sqrt{1-(-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\widetilde{e_1} = f_1 - \alpha e_0,$$

$$\alpha = \frac{\langle f_1, e_0\rangle}{\langle e_0, e_0\rangle} = \langle f_1, e_0\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \left[\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2\sqrt{2}} - \frac{(-1)^2}{2\sqrt{2}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\widetilde{e_1} = f_1 = x$$

$$e_1 = \frac{\widetilde{e_1}}{\|\widetilde{e_1}\|} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x \cdot x dx}} = \frac{x}{\sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

$$\widetilde{e_2} = f_2 - \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1,$$

$$\alpha_0 = \frac{\langle f_2, e_0\rangle}{\langle e_0, e_0\rangle} = \langle f_2, e_0\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \left[\frac{x^3}{3\sqrt{2}}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3\sqrt{2}} - \frac{(-1)^3}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle f_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} = \langle f_2, e_1\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = \left[\frac{x^4}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^4}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{(-1)^4}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\widetilde{e_2} = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$e_2 = \frac{\widetilde{e_2}}{\|\widetilde{e_2}\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3}) \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) dx}} =$$

$$= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9})dx}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1}}} =$$

$$= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1}}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{1^3}{3} + \frac{1}{9}1 - (\frac{(-1)^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{(-1)^3}{3} + \frac{1}{9}(-1))}} =$$

$$= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{18-10}{45}}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 5}{4 \cdot 2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

6 Příklad:

Ortonormalizujte bázi $F = (1, x, x^2)$ vektorového prostoru P_3 všech polynomů stupně nejvýše 2 vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Řešení

Mějme tedy vektory $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = x^2$. Gram-Schmidtovým ortonormalizačním procesem (nyní však s jiným skalárním součinem než v předchozím příkladu) obdržíme

$$\widetilde{e_0} = f_0 = 1$$

$$e_0 = \frac{\widetilde{e_0}}{\|\widetilde{e_0}\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1 \cdot 1dx}} = \frac{1}{\sqrt{[x]_0^1}} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$\widetilde{e_1} = f_1 - \alpha e_0,$$

$$\alpha = \frac{\langle f_1, e_0 \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} = \langle f_1, e_0 \rangle = \int_0^1 x \cdot 1dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\widetilde{e_1} = f_1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$e_1 = \frac{\widetilde{e_1}}{\|\widetilde{e_1}\|} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^1}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{4 - 6 + 3}}(x - \frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2})$$

$$\widetilde{e_2} = f_2 - \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1,$$

$$\alpha_0 = \frac{\langle f_2, e_0\rangle}{\langle e_0, e_0\rangle} = \langle f_2, e_0\rangle = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle f_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} = \langle f_2, e_1\rangle = \int\limits_0^1 x^2 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) dx = \left[2\sqrt{3}\frac{x^4}{4} - \sqrt{3}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \sqrt{3}(\frac{1^4}{2} - \frac{1^3}{3}) = \frac{3-2}{6}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Longrightarrow$$

$$\widetilde{e_2} = x^2 - \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) = x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{3-2}{6} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$e_2 = \frac{\widetilde{e_2}}{\|\widetilde{e_2}\|} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}) dx}} =$$

$$= \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{36}x\right]_0^1}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1^5}{5} - \frac{1^4}{2} + \frac{4 \cdot 1^3}{9} - \frac{1^2}{6} + \frac{1}{36} \cdot 1}} =$$

$$= \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{36 - 90 + 80 - 30 + 5}{180}}} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{180}}} = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) =$$

$$= 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

7 Příklad:

Dokažte, že systém funkcí $f_n = e^{int}$ pro $n \in \mathbb{Z}$ je ortogonální a není ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Řešení:

U komplexních funkcí komplexní proměnné budeme ve standardním skalárním součinu brát druhou funkci komplexně sdruženou stejně jako jsme brali komplexně sdružené vektory u těch Euklidovských. Funkce $f_n = e^{int}$ náleží prostoru $\mathbf{L}^2([0, 2\pi])$

$$\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = \int_0^{2\pi} 1^2 dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi < \infty.$$

Ověřme nyní ortogonalitu

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}dt = \int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)}dt =$$

$$= \left[\frac{e^{it(n-m)}}{i(n-m)} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i(n-m)} \left(e^{i2\pi(n-m)} - e^{i0(n-m)} \right) =$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} \left(\cos(2\pi(n-m)) + i\sin(2\pi(n-m)) - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} (1 + 0 - 1) = 0, \quad n \neq m.$$

Systém funkcí je tedy ortogonální. Spočteme nyní normu každé funkce

$$\| e^{int} \| = \sqrt{\langle e^{int}, e^{int} \rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} e^{int} e^{-int} dt} = \sqrt{\int_0^{2\pi} 1 dt} = \sqrt{[t]_0^{2\pi}} = \sqrt{2\pi}.$$

Normováním každé funkce obdržíme systém ortonormální $\left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

8 Příklad:

Dokažte, že systém funkcí $f_n = e^{int}$ pro $n \in \mathbb{Z}$ není ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int\limits_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Řešení:

Funkce $f_n = e^{int}$ náleží prostoru $\mathbf{L}^2([0, \pi])$

$$\int_0^{\pi} |e^{int}|^2 dt = \int_0^{\pi} 1^2 dt = [t]_0^{\pi} = \pi - 0 = \pi < \infty.$$

Ověřme nyní ortogonalitu

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^{\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \int_0^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \int_0^{\pi} e^{it(n-m)} dt =$$

$$= \left[\frac{e^{it(n-m)}}{i(n-m)} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{i(n-m)} \left(e^{i\pi(n-m)} - e^{i0(n-m)} \right) =$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} (\cos(\pi(n-m)) + i\sin(\pi(n-m)) - 1) =$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} \left((-1)^{n-m} + 0 - 1\right) = \begin{cases} 0, & n-m = sudé \\ \frac{-2}{i(n-m)}, & n-m = liché \end{cases}.$$

Systém funkcí tedy ortogonální není.

9 Příklad:

Ověřte, že systém funkcí: $1/2, \cos(t), \sin(t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt), \ldots$ je ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Řešení:

Funkce tvořící tento systém jsou na zadaném intervalu integrovatelné s kvadrátem. K tomu stačí určit $\| 1/2 \|, \| \cos(nt) \|, \| \sin(nt) \|$. Výpočtem následujících integrálů se snadno přesvědčíme, že tato soustava funkcí je ortogonální na intervalu $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin(nt)dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2n}(\cos(n\pi) - \cos(n(-\pi))) =$$

$$= -\frac{1}{2n}(\cos(n\pi) - \cos(n\pi)) = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos(nt)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2n}(\sin(n\pi) - \sin(n(-\pi))) =$$

$$= \frac{1}{2n}(\sin(n\pi) + \sin(n\pi)) = \frac{1}{2n}(0+0) = 0.$$

Obdobně spočteme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\cos(nt)dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\cos(nt)dt = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)\sin(nt)dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt = 0 \quad \text{pro } \forall m, n \ (m \neq n).$$

Daná soustava funkcí není však ortonormální, protože již pro první funkci $f_0 = 1/2$ je $\| f_0 \| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} dt\right]^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} \neq 1$.

10 Příklad:

Zjistěte, zda systém tvořený funkcemi $f_n = e^{int}$ pro $n \in \mathbb{Z}$ je ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Řešení:

Funkce $f_n = e^{int}$ náleží prostoru $\mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{int}|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dt = [t]_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi < \infty.$$

Ověřme nyní ortogonalitu

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(n-m)}dt =$$

$$= \left[\frac{e^{it(n-m)}}{i(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(n-m)}\left(e^{i\pi(n-m)} - e^{i(-\pi)(n-m)}\right) =$$

$$= \frac{1}{i(n-m)}(\cos(\pi(n-m)) + i\sin(\pi(n-m))$$

$$-\cos((-\pi)(n-m)) - i\sin((-\pi)(n-m))) =$$

$$= \frac{1}{i(n-m)}(\cos(\pi(n-m)) + i\sin(\pi(n-m))$$

$$-\cos(\pi(n-m)) + i\sin(\pi(n-m))) =$$

$$= \frac{2i\sin(\pi(n-m))}{i(n-m)} = 0, \quad n \neq m.$$

Systém funkcí je tedy ortogonální. Spočteme-li nyní normu každé funkce

$$\| e^{int} \| = \sqrt{\langle e^{int}, e^{int} \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-int}dt} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1dt} =$$

$$= \sqrt{[t]_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\pi - (-\pi)} = \sqrt{2\pi}.$$

Normováním každé funkce obdržíme systém ortonormální $\left\{\frac{e^{int}}{\|e^{int}\|}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

11 Příklad:

Je dána funkce $f(t) = -t$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Nalezněte koeficient c_4 klasického (trigonometrického) Fouriorova rozvoje této funkce v komplexním tvaru (tj. s využitím systému funkcí z předchozího příkladu) včetně amplitudy $|c_4|$ a fáze $\varphi_4 = \arg c_4$.

Řešení:

Ověřme, zda vůbec naše funkce patří do prostoru $\mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$, tj. zda ji lze rozvinout ve Fourierovu řadu

$$\int_{-\pi}^{\pi} |-t|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} |t|^2 dt = \int_{-\pi}^{0} (-t)^2 dt + \int_{0}^{\pi} t^2 dt = \left[\frac{-t^3}{3}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{-0^3}{3} + \frac{(-\pi)^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 0 < \infty,$$

tedy $f(t) \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$ a příslušný Fourierův rozvoj má tvar

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{i\omega nt}}{\sqrt{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}},$$

neboť $T = 2\pi$ a $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Z předchozího příkladu vidíme, že systém $\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je na intervalu $[-\pi, \pi]$ ortonormální a tudíž pro n-tý koeficient platí

$$c_n = \left\langle f(t), \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle.$$

Naším úkolem je vypočítat c_4

$$c_4 = \left\langle f(t), \frac{e^{4it}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (-t)\overline{\frac{e^{4it}}{\sqrt{2\pi}}} dt = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} te^{-4it} dt =^{Per\, partes}$$

$$u = t, u' = 1$$

$$v' = e^{-4it}, v = \tfrac{e^{-4it}}{-4i}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[t\frac{e^{-4it}}{-4i} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{e^{-4it}}{-4i} dt \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\pi e^{-4i\pi}}{4i} + \frac{(-\pi)e^{4i\pi}}{4i} + \frac{1}{4i} \left[\frac{e^{-4it}}{-4i} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\pi}{4i} \left(e^{-4i\pi} + e^{4i\pi} \right) + \frac{1}{16} \left(e^{-4i\pi} - e^{4i\pi} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{\pi}{4i} \left(\cos(4\pi) - i\sin(4\pi) + \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) \right) +$$

$$+ + \frac{1}{16} \left(\cos(4\pi) - i\sin(4\pi) - \cos(4\pi) - i\sin(4\pi) \right)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{4i} (1 - 0 + 1 + 0) + \frac{1}{16} (1 - 0 - 1 - 0) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{4i} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{8}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Pak amplituda a fáze 4. harmonické je

$$|c_4| = \left| -i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \right| = \sqrt{0^2 + \left(-\sqrt{\frac{\pi}{8}} \right)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}},$$

$$\varphi_4 = \arg c_4 = \arg \left(-i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

12 Příklad:

Určete první tři členy amplitudového a fázového spektra Fourierovy řady v reálném tvaru

$$5 - 2\cos(t) - \cos(2t) - \sqrt{3}\sin(2t) - 2\cos(3t) + 2\sin(3t) + \dots .$$

Řešení:

K tomuto určení budeme potřebovat identifikovat koeficienty a_n a b_n. Klasická trigonometrická Fourierova řada má v reálném oboru tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) +$$

$$+ a_3\cos(3\omega t) + b_3\sin(3\omega t) + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right).$$

Porovnáním zadané Fourierovy řady s jejím obecným tvarem získáme příslušné koeficienty a_n a b_n a

$$\omega = 1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi.$$

Pro přehlednost si vypíšeme koeficienty a_n a b_n do tabulky. Amplituda a fáze je pak definována

$$A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right|, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ n \geq 1,$$

$$\varphi_n = \arg\left(a_n + ib_n\right),\ n \geq 1.$$

n	a_n	b_n	A_n	φ_n
0	10	-	5	-
1	-2	0	$\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$	$\arg(-2+0i)=\pi$
2	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$	$\arg\left(-1-\sqrt{3}i\right)=\frac{-\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}\pi$
3	-2	2	$\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$	$\arg(-2+2i)=\frac{3}{4}\pi$

13 Příklad:

Nechť je dána funkce $f(t) = e^t$ a $g(t) = t$ na intervalu $[0, \infty)$. Spočtěte konvoluci

$$h(t) = (f \star g)(t) = \int_0^t f(\tau)\overline{g(t-\tau)}d\tau$$

a ověřte komutativitu konvoluce spočtením konvoluce $(g \star f)(t)$.

Řešení:

Nejprve spočteme konvoluci

$$h(t) = (f \star g)(t) = e^t \star t = \int_0^t e^\tau (t-\tau) d\tau \overset{Per\,partes}{=} \begin{matrix} u = t-\tau, u' = -1 \\ v' = e^\tau, v = e^\tau \end{matrix}$$

$$= [e^\tau(t-\tau)]_0^t - \int_0^t (-1)\cdot e^\tau d\tau = [e^\tau(t-\tau+1)]_0^t =$$

$$= e^t(t-t+1) - e^0(t-0+1) = e^t - t - 1.$$

Pro ověření komutativity spočteme

$$h(t) = (g \star f)(t) = t \star e^t = \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau =^{Per\,partes}_{\substack{u=\tau,\, u'=1 \\ v'=e^{t-\tau},\, v=-e^t e^{-\tau}}}$$

$$= \left[\tau(-e^t e^{-\tau})\right]_0^t - \int_0^t 1 \cdot (-e^t e^{-\tau}) d\tau = \left[-\tau e^t e^{-\tau} - e^t e^{-\tau}\right]_0^t =$$

$$= \left[-e^t e^{-\tau}(\tau+1)\right]_0^t = -e^t e^{-t}(t+1) + e^t e^0(0+1) = e^t - t - 1.$$

14 Příklad:

Nechť vektor $\mathbf{a}$ má $N_1 = 8$ složek $(1,3,6,2,7,8,4,5)^T$ a vektor $\mathbf{b}$ má $N_2 = 3$ složky $(6,1,3)^T$. Spočtěte konvoluci $\mathbf{c} = \mathbf{a} \star \mathbf{b}$.

Řešení:

Teorie říká, že když vektor $\mathbf{a}$ má N_1 složek $(a_0, ..., a_{N_1-1})^T$, vektor $\mathbf{b}$ má N_2 složek $(b_0, ..., b_{N_2-1})^T$, pak vektor $\mathbf{c}$ jsouce konvolucí vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ má $N_1 + N_2 - 1$ složek $(c_0, ..., c_{N_1+N_2-2})^T$, které vypočteme jako

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{M_A b} = \mathbf{M_B a},$$

kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou sloupcové vektory, matice $\mathbf{M_A}$ je tvořená komponentami vektoru $\mathbf{a}$ řádu $(N_1 + N_2 - 1, N_2)$, matice $\mathbf{M_B}$ je tvořená komponentami vektoru **b** řádu $(N_1 + N_2 - 1, N_1)$:

$$\mathbf{M_A} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N_1-1} & a_{N_1-2} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_{N_1-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N_2-1} & b_{N_2-2} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_{N_2-1} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Konvoluce **c** bude mít $N_1 + N_2 - 1 = 8 + 3 - 1 = 10$ složek. Ty je možné počítat podle vzorečku

$$c_n = \sum_{k=\max(0,n-(N_1-1))}^{\min(n,N_2-1)} a_{n-k} b_k = \sum_{k=\max(0,n-(N_2-1))}^{\min(n,N_1-1)} a_k b_{n-k},$$

tedy

$$c_0 = a_0 b_0 = 1 \cdot 6 = 6$$

$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 19$$

$$c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 6 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 42$$

$$c_3 = a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 = 2 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 27$$

$$c_4 = a_4b_0 + a_3b_1 + a_2b_2 = 7 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 62$$

$$c_5 = a_5b_0 + a_4b_1 + a_3b_2 = 8 \cdot 6 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 61$$

$$c_6 = a_6b_0 + a_5b_1 + a_4b_2 = 4 \cdot 6 + 8 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 53$$

$$c_7 = a_7b_0 + a_6b_1 + a_5b_2 = 5 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 58$$

$$c_8 = a_7b_1 + a_6b_2 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 17$$

$$c_9 = a_7b_2 = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\Rightarrow \mathbf{c} = (6, 19, 42, 27, 62, 61, 53, 58, 17, 15)^T.$$

Tento výpočet vyžaduje opatrnost při výběru indexů koeficientů. Přehlednější způsob je pomocí konvoluční matice

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{M_A b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 7 \\ 5 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \\ 42 \\ 27 \\ 62 \\ 61 \\ 53 \\ 58 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix},$$

nebo

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} \star \mathbf{a} = \mathbf{M_A a} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \\ 42 \\ 27 \\ 62 \\ 61 \\ 53 \\ 58 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

15 Příklad:

Je dán vektor o 8 složkách $\mathbf{f} = (3, 1, 6, 2, 3, 7, 9, 5)^T$. Najděte jeho Walshovu, modifikovanou Walshovu a Haarovu transformaci.

Řešení:

Postupně vytvoříme jednotlivé transformační matice $\mathbf{M}$ (Walshovu $\mathbf{M} = \mathbf{M_W}$, modifik. Walshovu $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\widetilde{\mathbf{W}}}$, Haarovu $\mathbf{M} = \mathbf{M_H}$) a provedeme transformaci $\mathbf{c} = \mathbf{Mf}$.

$$\mathbf{c_W} = \mathbf{M_W f} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0^T \\ \mathbf{W}_1^T \\ \mathbf{W}_2^T \\ \mathbf{W}_3^T \\ \mathbf{W}_4^T \\ \mathbf{W}_5^T \\ \mathbf{W}_6^T \\ \mathbf{W}_7^T \end{bmatrix} \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 36 \\ -12 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \\ -10 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 18 \\ -6 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_{\widetilde{\mathbf{W}}} = \mathbf{M}_{\widetilde{\mathbf{W}}}\mathbf{f} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}}_0^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_1^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_2^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_3^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_4^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_5^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_6^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_7^T \end{bmatrix} \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 36 \\ -12 \\ 0 \\ -8 \\ -10 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 18 \\ -6 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c_H} = \mathbf{M_H f} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0^T \\ \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \mathbf{h}_3^T \\ \mathbf{h}_4^T \\ \mathbf{h}_5^T \\ \mathbf{h}_6^T \\ \mathbf{h}_7^T \end{bmatrix} \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 36 \\ -12 \\ -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} \\ 4 \\ 8 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 18 \\ -6 \\ -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \\ 2 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Inverzní transformace je pak dána vztahem $\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{M}^T\mathbf{c}$.

16 Příklad:

Nechť $\mathbf{f} = (1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5)^T$. Nalezni diskrétní Fourierovu transformaci (DFT) signálu $\mathbf{f}$ a ověř jednoznačnost transformace zpětnou DFT.

Řešení:

$$w^0 = 1 = -w^4, \quad w^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = -w^5, \quad w^2 = -i = -w^6, \quad w^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -w^7$$

$$\left(w^0, w^1, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6, w^7\right) = \left(1, w^1, w^2, w^3, -1, -w^1, -w^2, -w^3\right)$$

Ortonormální transformační matice pro $N = 8$ je

$$\mathbf{M_F} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 & -1 & -w^1 & -w^2 & -w^3 \\ 1 & w^2 & -1 & -w^2 & 1 & w^2 & -1 & -w^2 \\ 1 & w^3 & -w^2 & w^1 & -1 & -w^3 & w^2 & -w^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -w^1 & w^2 & -w^3 & -1 & w^1 & -w^2 & w^3 \\ 1 & -w^2 & -1 & w^2 & 1 & -w^2 & -1 & w^2 \\ 1 & -w^3 & -w^2 & -w^1 & -1 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix}.$$

Přímá DFT a zpětná DFT je

$$\mathbf{c_F} = \mathbf{F} = \mathbf{M_F f} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 36 \\ -7,4142 + 3,6569i \\ -2 - 4i \\ -4,5858 + 7,6569i \\ 0 \\ -4,5858 - 7,6569i \\ -2 + 4i \\ -7,4142 - 3,6569i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{M_F^T F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Druhá polovina vektoru $\mathbf{F}$ je komplexně sdružená k té první.

17 Příklad:

Nechť vstupní vektor $\mathbf{f} = \mathbf{f}_o = \mathbf{a}_0 = (1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5)^T$. Spočtěte jeho diskrétní waveletovou transformaci (DWT) s užitím Haarova waveletu.

Řešení:

Nejprve vytvoříme matice $\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k \\ \mathbf{Q}_k \end{bmatrix}, k = 1, 2, 3$ pro DWT na k-tou úroveň, která bude tvořena pomocí škálovacích a waveletovských filtračních koeficientů posouvaných o 2 hodnoty a to tak, že matice $\mathbf{P}_{k+1}, \mathbf{Q}_{k+1}$ vzniknou z $\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k$ „vyřezáním" horního levého bloku (submatice) o polovičním počtu řádků i sloupců

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Přímá DWT

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{d}_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

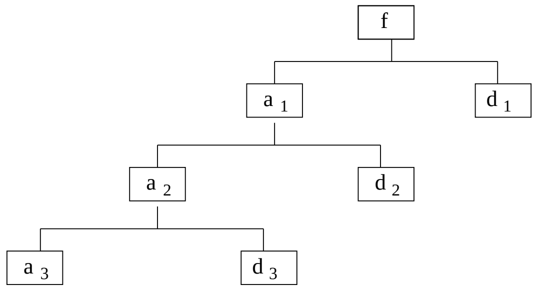
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{M}_3\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix}\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 18 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}.$$

Pro kontrolu proveďme zpětnou DWT

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{M}_3^T\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 18 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{f}_1 = \mathbf{M}_2^T\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix},$$



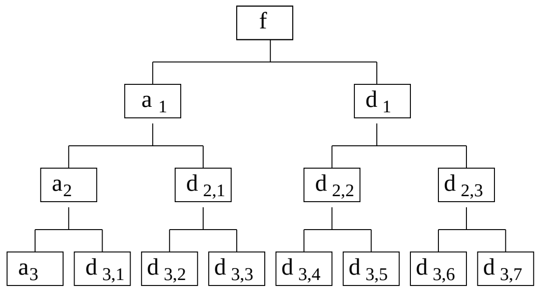
Obrázek 1: 3-úrovňový multirozklad

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{f}_0 = \mathbf{M}_1^T \mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{d}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{d}_3$ pak tvoří multirozklad na 3 úrovně.

18 Příklad:

Sestavte paketový rozklad k vektoru z předchozího příkladu se stejnou waveletovskou bází.



Obrázek 2: 3-úrovňový paketový rozklad

Řešení:

V předchozím příkladu jsme spočetli vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_{2,1}, \mathbf{a}_3, \mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_{3,1}$. Stejně, jak jsme transformovali aproximační koeficienty $\mathbf{a}_k$ abychom získali aproximační a detailní koeficienty na další hladině $\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1,1}$, budeme nyní transformovat i detailní koeficienty $\mathbf{d}_{k,i}$, čímž získáme vektory (pakety) $\mathbf{d}_{k+1,m}, \mathbf{d}_{k+1,n}$. V našem případě tedy musíme dopočítat

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{2,2} \\ \mathbf{d}_{2,3} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{d}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{3,2} \\ \mathbf{d}_{3,3} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3\mathbf{d}_{2,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{3,4} \\ \mathbf{d}_{3,5} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3\mathbf{d}_{2,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{3,6} \\ \mathbf{d}_{3,7} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3\mathbf{d}_{2,3} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

19 Příklad:

S využitím Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{cases} y^{(4)}(t) - y(t) = \sinh(t) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1 \end{cases}.$$

Řešení:

Funkci $\sinh(t)$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\sinh(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right).$$

Tuto funkci můžeme dodefinovat jako nulovou pro $t < 0$ a evidentně její absolutní hodnota má omezený růst. tj.

$$\exists M, \sigma \in \mathbb{R} : |\sinh(t)| \leq Me^{\sigma t},$$

tudíž existuje její L-obraz, k jehož určení můžeme použít tabulkového vzorce

$$L(\sinh(\alpha t)) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}.$$

V našem případě $\alpha = 1$, tj.

$$L(\sinh(t)) = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Tento L-obraz je holomorfní na množině $Re\, s > 1$. K nalezení L-obrazu můžeme taktéž využít linearity a věty o tlumení

$$L(e^{\alpha t} f(t)) = F(s - \alpha).$$

Platí totiž, že $L(1) = \frac{1}{s}$, $L(e^t \cdot 1) = \frac{1}{s-1}$ a $L(e^{-t} \cdot 1) = \frac{1}{s+1}$. Potom

$$L(\sinh(\alpha t)) = L(\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)) = \frac{1}{2}L(e^t) - \frac{1}{2}L(e^{-t}) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{2}\frac{s+1-s+1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2-1} = \frac{1}{s^2-1}.$$

Dále předpokládáme, že k hledané funkci $y(t)$ existuje L-obraz, který si označíme jako $Y(s)$, tj.

$$L(y(t)) = Y(s)$$

a jelikož jsou počáteční podmínky zadány v bodě $t_0 = 0$, můžeme použít pro nalezení L-obrazu 1. až 4. derivace větu o L-obrazu derivace

$$L(y'(t)) = sY(s) - y(0_+) = sY(s),$$

$$L(y''(t)) = s^2Y(s) - y'(0_+) = s^2Y(s),$$

$$L(y'''(t)) = s^3Y(s) - y''(0_+) = s^3Y(s),$$

$$L(y^{(4)}(t)) = s^4Y(s) - y'''(0_+) = s^4Y(s) - 1.$$

S využitím linearity L-transformace sestavíme L-obraz diferenciální rovnice

$$L(y^{(4)}(t) - y(t)) = L(y^{(4)}(t)) - L(y(t)) = L(\sinh(t)).$$

Po dosazení za jednotlivé L-obrazy získáme následující algebraickou rovnici

$$s^4Y(s) - 1 - Y(s) = \frac{1}{s^2-1},$$

kterou upravíme na

$$(s^4-1)Y(s) = \frac{1}{s^2-1} + 1$$

a podělením tzv. charakteristickým polynomem $s^4 - 1$ získáme L-obraz hledaného řešení

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s^2-1} + 1}{s^4-1} = \frac{1+s^2-1}{(s^2-1)(s^4-1)} = \frac{s^2}{(s+1)^2(s-1)^2(s+i)(s-i)}.$$

Ze jmenovatele vidíme. že $s_1 = -1$ a $s_2 = 1$ jsou 2-násobné póly a $s_3 = -i$ a $s_4 = i$ jsou jednoduché póly a funkce $Y(s)$ je tak holomorfní na množině $Re\, s > 1$, což je polorovina neobsahující žádnou singularitu.

Můžeme tedy přistoupit k výpočtu originálu $y(t)$ z L-obrazu $Y(s)$ např.

s využitím residuové věty

$$y(t) = L^{-1}\left(Y(s)\right) = \sum_{k=1}^{4} Res_{s=s_k} \frac{s^2 e^{st}}{(s+1)^2(s-1)^2(s+i)(s-i)} =$$

$$= \left(\frac{s^2 e^{st}}{(s-1)^2(s+i)(s-i)}\right)'_{s=-1} + \left(\frac{s^2 e^{st}}{(s+1)^2(s+i)(s-i)}\right)'_{s=1} +$$

$$+ \left(\frac{s^2 e^{st}}{(s+1)^2(s-1)^2(s-i)}\right)_{s=-i} + \left(\frac{s^2 e^{st}}{(s+1)^2(s-1)^2(s+i)}\right)_{s=i} =$$

$$= \left(\frac{(2se^{st} + s^2te^{st})(s-1)^2(s^2+1) - s^2e^{st}(2(s-1)(s^2+1) + (s-1)^2 2s}{((s-1)^2(s^2+1))^2}\right)_{s=-1} +$$

$$+ \left(\frac{(2se^{st} + s^2te^{st})(s+1)^2(s^2+1) - s^2e^{st}(2(s+1)(s^2+1) + (s+1)^2 2s}{((s+1)^2(s^2+1))^2}\right)_{s=1} +$$

$$+ \frac{-1 \cdot e^{-it}}{(-1-1)^2(-2i)} + \frac{-e^{-it}}{(-1-1)^2 2i} =$$

$$= \frac{(-2e^{-t} + te^{-t}) \cdot 8 - e^{-t}(-8-8)}{(4 \cdot 2)^2} + \frac{(2e^{-t} + te^{-t}) \cdot 8 - e^{-t}(8+8)}{8^2} + \frac{e^{-it}}{8i} - \frac{e^{it}}{8i} =$$

$$= \frac{-2e^{-t} + te^{t} + 2e^{-t}}{8} + \frac{2e^{-t} + te^{t} - 2e^{-t}}{8} + \frac{1}{4}\frac{e^{-it} - e^{it}}{2i} =$$

$$= \frac{t}{4}\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} - \frac{1}{4}\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{4}\left(t\cosh(t) - \sin(t)\right), t \geq 0.$$

Následovat může zkouška. tj. kontrola, zda nalezené řešení vyhovuje diferenciální rovnici a současně splňuje počáteční podmínky.

20 Příklad:

S využitím Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{cases} y'''(t) + y''(t) = t \\ y(1) = 1, y'(1) = 0, y''(1) = 0 \end{cases}.$$

Řešení:

Jelikož jsou počáteční podmínky nyní zadány v bodě $t_0 = 1$, nemůžeme použít pro nalezení L-obrazu derivace větu o L-obrazu derivace, neboť v ní figuruje počáteční podmínka v bodě $t_0 = 0$. Musíme tedy provést substituci, tedy posunutí souřadnicového systému

$$\tau = t - 1 \Longrightarrow t = \tau + 1.$$

Po této substituci a zavedení si nové funkce $u(\tau) = y(t-1) = y(\tau)$ obdržíme novou diferenciální rovnici, která má již počáteční podmínky v $\tau_0 = 0$

$$\begin{cases} u'''(\tau) + u''(\tau) = \tau + 1 \\ u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = 0 \end{cases}.$$

Funkci $\tau + 1$ můžeme dodefinovat jako nulovou pro $\tau < 0$ a evidentně její absolutní hodnota má omezený růst. tj.

$$\exists M, \sigma \in \mathbb{R} : |\tau + 1| \leq M e^{\sigma \tau},$$

tudíž existuje její L-obraz, k jehož určení můžeme použít linearity a tabulky vzorců

$$L(\tau + 1) = L(\tau) + L(1) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Tento L-obraz je holomorfní na množině $Re\, s > 0$.

Dále předpokládáme, že k hledané funkci $u(\tau)$ existuje L-obraz, který si označíme jako $U(s)$, tj.

$$L(u(\tau)) = U(s)$$

a jelikož jsou počáteční podmínky zadány v bodě $\tau_0 = 0$, můžeme použít pro nalezení L-obrazu 1. až 3. derivace větu o L-obrazu derivace

$$L(u'(\tau)) = sU(s) - u(0_+) = sU(s) - 1,$$

$$L(u''(\tau)) = s^2U(s) - s - u'(0_+) = s^2U(s) - s,$$

$$L(u'''(\tau)) = s^3U(s) - s^2 - u''(0_+) = s^3U(s) - s^2.$$

S využitím linearity L-transformace sestavíme L-obraz diferenciální rovnice

$$L(u'''(\tau) + u''(\tau)) = L(u'''(\tau)) + L(u''(\tau)) = L(\tau + 1).$$

Po dosazení za jednotlivé L-obrazy získáme následující algebraickou rovnici

$$s^3U(s) - s^2 + s^2U(s) - s = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s},$$

kterou upravíme na

$$(s^3 + s^2)U(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + s + s^2$$

a podělením charakteristickým polynomem $s^3 + s^2$ získáme L-obraz hledaného řešení

$$U(s) = \frac{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + s + s^2}{s^3 + s^2} = \frac{1 + s + s^3 + s^4}{s^2(s^3 + s^2)} = \frac{1 + s + s^3(1 + s)}{s^4(1 + s)} = .$$

$$= \frac{s^3 + 1}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^4} = U_1(s) + U_2(s).$$

Ze jmenovatele vidíme. že $s_1 = 0$ je 4-násobný pól a funkce $U(s)$ je tak holomorfní na množině $Re\, s > 0$.

Můžeme tedy přistoupit k výpočtu originálu $u(\tau)$ z L-obrazu $U(s)$ rozloženého na parciální zlomky pomocí věty o derivaci obrazu a tabulkových vzorců

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = L^{-1}\left(U_1(s)\right) = 1 = u_1(\tau),$$

$$L^{-1}\left(-\frac{1}{s^2}\right) = -\tau,$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \tau^2,$$

$$L^{-1}\left(-\frac{6}{s^4}\right) = -\tau^3 \Longrightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) = \frac{1}{6}\tau^3 = L^{-1}\left(U_2(s)\right) = u_2(\tau).$$

Hledané řešení pak má tvar

$$u(\tau) = u_1(\tau) + u_2(\tau) = 1 + \frac{1}{6}\tau^3, \tau \geq 0.$$

Nesmíme zapomenout na zpětnou substituci $\tau = t - 1$, po které obdržíme finální řešení

$$y(t) = 1 + \frac{1}{6}(t-1)^3, t \geq 1.$$

Následovat by mohla opět zkouška.

21 Příklad:

S využitím Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) = f(t) = \begin{cases} 1, \; 0 < t \leq 1 \\ 0, \; t > 1 \end{cases} \\ x(0_+) = 1 \end{cases} .$$

Řešení:

Tentokrát nespojitou funkci $f(t)$ můžeme dodefinovat jako nulovou pro $t < 0$ a její absolutní hodnotu omezenit

$$\exists M, \sigma \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Me^{\sigma t},$$

např $M = 1, \sigma = 0$, tudíž existuje její L-obraz, k jehož určení můžeme použít tabulky vzorců, neboť

$$f(t) = \mu(t) - \mu(t-1),$$

tj. $f(t)$je rozdílem Heavisideovy fukce a posunuté Heavisideovy fukce do bodu 1. Pak v důsledku linearity

$$L(f(t)) = L(\mu(t) - \mu(t-1)) = L(\mu(t)) - L(\mu(t-1)) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right).$$

Tento L-obraz je holomorfní na množině $Re\, s > 0$.

Samozřejmě lze L-obraz vypočítat podle definice

$$L(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^1 1\cdot e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 = -\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right).$$

Dále předpokládáme, že k hledané funkci $x(t)$ existuje L-obraz, který si označíme jako $X(s)$, tj.

$$L(x(t)) = X(s)$$

a jelikož jsou počáteční podmínky zadány v bodě $t_0 = 0$, můžeme použít pro nalezení L-obrazu 1. derivace větu o L-obrazu derivace

$$L(x'(t)) = sX(s) - x(0_+) = sX(s) - 1.$$

S využitím linearity L-transformace sestavíme L-obraz diferenciální rovnice

$$L(x'(t) - x(t)) = L(x'(t)) - L(x(t)) = L(f(t)).$$

Po dosazení za jednotlivé L-obrazy získáme následující algebraickou rovnici

$$sX(s) - 1 - X(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right),$$

kterou upravíme na

$$(s-1)X(s)=\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)+1$$

a podělením charakteristickým polynomem $s-1$ získáme L-obraz hledaného řešení

$$X(s)=\frac{\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)+1}{s-1}=\frac{\left(1-e^{-s}\right)}{s(s-1)}+\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s(s-1)}-\frac{e^{-s}}{s(s-1)}+\frac{1}{s-1}=$$

$$=X_1(s)+X_2(s)+X_3(s).$$

Ze jmenovatele vidíme. že $s_1=0$ a $s_2=1$ jsou jednoduché póly a funkce $U(s)$ je tak holomorfní na množině $Re\,s>1$.

Můžeme tedy přistoupit k výpočtu originálu $x(t)$ z L-obrazu $X(s)$ pomocí věty o linearitě, věty o tlumení originálu a věty o posunutí originálu vpravo

$$x_1(t)=L^{-1}\left(X_1(s)\right)=\sum_{k=1}^{2}Res_{s=s_k}\frac{e^{st}}{s(s-1)}=\frac{e^0}{-1}+\frac{e^t}{1}=e^t-1,t\geq 0,$$

$$x_2(t)=L^{-1}\left(X_2(s)\right)=-x_1(t-1)=-e^{t-1}+1,t\geq 1,$$

$$x_3(t)=L^{-1}\left(X_3(s)\right)=Res_{s=1}\frac{e^{st}}{s-1}=e^t,t\geq 0.$$

Hledané řešení pak má tvar

$$x(t)=\begin{cases} x_1(t)+x_3(t)=2e^t-1,\ 0<t\leq 1 \\ x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)=2e^t-e^{-1}e^t=\left(2-\frac{1}{e}\right)e^t,\ t>1 \end{cases}.$$

Následovat by mohla opět zkouška.

22 Příklad:

Určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_0 = a \in \mathbb{C}$, $f_n = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Řešení:

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \frac{a}{z^0} + \sum_{n=1}^{\infty} 0 z^{-n} = a.$$

23 Příklad:

Určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_n = a \in \mathbb{C}$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení:

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{a}{1 - z^{-1}} = \frac{az}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

24 Příklad:

Určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_n = e^{cn}, c \in \mathbb{C}$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení:

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{cn} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{e^c}\right)^{-n} =$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{z}{e^c}\right)^{-1}} = \frac{z}{z-e^c}, \quad |z| > |e^c|.$$

25 Příklad:

Najděte zpětnou Z-transformaci funkce $F(z) = \frac{z(z-1)}{(z+1)^3}$.

Řešení:

$F(z)$ má v čitateli polynom 2. stupně, v jmenovateli polynom 3.stupně. f_n můžeme vypočítat jako

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z(z-1)}{(z+1)^3} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^n(z-1)}{(z+1)^3} dz,$$

kde γ je kružnice se středem $0+0i$ a poloměrem $R>1$. Integrovaná funkce má v bodě $-1+0i$ pól třetího řádu. Podle věty o reziduích platí

$$\begin{aligned}
f_n &= \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^n(z-1)}{(z+1)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(z^n(z-1)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left((n+1)nz^{n-1} - n(n-1)z^{n-2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left((n+1)n(-1)^{n-1} - n(n-1)(-1)^{n-2}\right) = \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(n^2+n+n^2-n\right) = (-1)^{n-1}n^2.
\end{aligned}$$

26 Příklad:

Pomocí věty o linearitě určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = \cos(cn)\ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, kde $c\in\mathbb{C}$.

Řešení:

Víme, že

$$Z\left(\left\{e^{icn}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = F_1(z) = \frac{z}{z-e^{ic}}, \quad |z| > |e^c|,$$

$$Z\left(\left\{e^{-icn}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = F_2(z) = \frac{z}{z-e^{-ic}}, \quad |z| > |e^{-c}|.$$

Nyní využijeme větu o linearitě

$$Z\left(\{\cos(cn)\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{\frac{1}{2}e^{icn} + \frac{1}{2}e^{-icn}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{1}{2}F_1(z) + \frac{1}{2}F_2(z) =$$

$$= \frac{z(z-\cos(c))}{z^2 - 2z\cos(c) + 1}; \quad |z| > \max\left\{|e^c|, |e^{-c}|\right\}.$$

27 Příklad:

Pomocí věty o součinu obrazů určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = 1 + e^c + e^{2c} + \ldots + e^{nc}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení:

Protože pro posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahy $a_n = e^{cn}$, $b_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\{(a \star b)_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ a protože z předchozích příkladů známe výsledky

$$Z\left(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{e^{cn}\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z}{z-e^c}, \quad |z| > |e^c|,$$

$$Z\left(\{b_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{1\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z}{z-1},\ |z| > 1,$$

plyne z věty o konvoluci vzorů

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{(a \star b)_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = F(z)G(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^c)},\ |z| > \max\{|e^c|, 1\}.$$

28 Příklad:

Pomocí věty o integraci obrazu určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_0 = 0,\ f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Řešení:

Pro Z-obraz posloupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $c_n = (-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$Z\left(\{c_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots,\}\right) = C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{-1}{z}} = \frac{z}{z+1}, \quad |z| > 1.$$

Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ vzniká z posloupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunutím o jeden člen doprava a má Z-obraz

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{0, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots,\right\}\right) = F(z) = \frac{C(z)}{z} = \frac{1}{z+1},\ |z| > 1.$$

Pro posloupnost $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ bude Z-obraz na základě věty o integraci obrazu

$$Z\left(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{2}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots, \right\}\right) =$$

$$= G(z) = \int_z^{\infty} \frac{F(w)}{w} dw = \int_z^{\infty} \frac{1}{w(w+1)} dw =$$

$$= \lim_{w \to \infty} \ln\left(\frac{w}{w+1}\right) - \ln\left(\frac{z}{z+1}\right) = \ln(1) - \ln\left(\frac{z}{z+1}\right) = -\ln\left(\frac{z}{z+1}\right).$$

29 Příklad:

S využitím Z-transformace určete partikulární řešení diferenční rovnice

$$\begin{cases} \triangle^2 y_n - y_n = 1, & \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ y_0 = 0, & \triangle y_0 = 1 \end{cases}.$$

Řešení:

Nejdříve ukážeme, že danou rovnici lze přepsat do ekvivalentního tvaru bez použití diferencí

$$\begin{aligned} \triangle^2 y_n - y_n &= \triangle\left(y_{n+1} - y_n\right) - y_n = \triangle y_{n+1} - \triangle y_n - y_n = \\ &= \left(y_{n+2} - y_{n+1}\right) - \left(y_{n+1} - y_n\right) - y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1}. \end{aligned}$$

Diferenční rovnici teď obdržíme ve tvaru:

$$\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} = 1, & \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ y_0 = 0, & y_1 = 1 \end{cases}.$$

Oba tvary jsou rovnocenné, popisují stejný problém.

1. Předpokládáme, že existuje Z-obraz $Y(z) = Z(\{y_n\}_{n=0}^{\infty})$ řešení této diferenční rovnice, pak na základě vět o posunutí vlevo nebo vět o obrazech diferencí sestavíme Z–obraz diferenční rovnice, přičemž nezáleží na tom, jestli pracujeme s diferenční rovnicí v prvním nebo druhém tvaru. Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1^n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená a její Z–obraz je

$$Z\left(\{1\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\, z^{-1} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

Z–obraz levé strany diferenční rovnice bude

$$Z\left(\triangle^2 y_n - y_n\right) = Z\left(y_{n+2} - 2y_{n+1}\right) = Z\left(y_{n+2}\right) - 2Z\left(y_{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Jelikož na základě vět o posunutí vlevo

$$Z\left(y_{n+1}\right) = z\left(Y(z) - y_0\right) = z\left(Y(z) - 0\right) = zY(z),$$

$$Z\left(y_{n+2}\right) = z\left(Z\left(y_{n+1}\right) - y_1\right) = \left(Z\left(y_{n+1}\right) - 1\right) = z^2Y(z) - z, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

potom Z-obraz diferenční rovnice bude

$$Z\left(y_{n+2}\right) - 2Z\left(y_{n+1}\right) = \frac{z}{z-1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow z^2Y(z) - 2zY(z) - z = \frac{z}{z-1}.$$

2. Vyřešíme transformovanou algebraickou rovnici

$$\left(z^2 - 2z\right) Y(z) = \frac{z}{z-1} + z \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{z}{z(z-1)(z-2)} + \frac{z}{z(z-2)} = \frac{z + z(z-1)}{z(z-1)(z-2)} =$$

$$= \frac{z}{(z-1)(z-2)}, \quad |z| > 2.$$

3. Hledáme originál - řešení diferenční rovnice $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ k nalezenému obrazu $Y(z)$:

a) rozkladem obrazu na funkce, k nimž známe vzory (rozklad na parciální zlomky)

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^{\ln 2}}\right) = \left\{e^{n \ln 2}\right\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n\}_{n=0}^{\infty},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^{0}}\right) = \left\{e^{n\,0}\right\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) - Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 3, 7, \ldots).$$

b) podle definičního vztahu pro inverzní Z-transformaci, kde γ je kružnice se středem v bodě 0 a poloměru $R > 2$, integrovaná funkce má v bodech $1+0i$ a $2+0i$ póly prvního řádu, proto

$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^{n-1} z}{(z-1)(z-2)} dz = \mathrm{Res}_{z=1} \frac{z^n}{(z-1)(z-2)} + \mathrm{Res}_{z=2} \frac{z^n}{(z-1)(z-2)} \Rightarrow$$

$$y_n = -1 + 2^n \Rightarrow \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty}.$$

c) použitím konvoluce dvou posloupností

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z-2}.\frac{1}{z-1},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^{\ln 2}}\right) = \left\{e^{n\ln 2}\right\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n\}_{n=0}^{\infty} = \{g_n\}_{n=0}^{\infty},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^{0}}\right) = \left\{e^{n\,0}\right\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty}.$$

Na základě věty o posunutí vpravo

$$Z^{-1}\left(\frac{1}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(z^{-1}\frac{z}{z-1}\right) = \{0,1,1,1,\ldots\} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Partikulární řešení bude

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right) = \{(g\star h)_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k}\right\}_{n=0}^{\infty},$$

$$y_0 = \sum_{k=0}^{0} h_0 g_0 = 0 = 1 - 1 = 2^0 - 1,$$

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{n} 1.2^{n-k}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2^n \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \left\{2^n \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2^n - \left(\frac{2}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=1}^{\infty} = (0,1,3,7,\ldots).$$