

Integrální (a diskrétní) transformace

David Horák, Nina Častová

Požadavky

- 10 bodů – test – teorie, důkazy, příklady
- 10 bodů – dovednost aplikovat poznatky na počítači
- 10 bodů – 1. projekt na Fourierovu transformaci a Four. řadu
- 10 bodů – 2. projekt na Laplaceovu transformaci a Z-transformaci

- 40 bodů – celkem, minimum 20 bodů
- 60 bodů – zkouška
- 5 bodů – prémie – referát na určené téma

- 105 bodů - celkem

Literatura

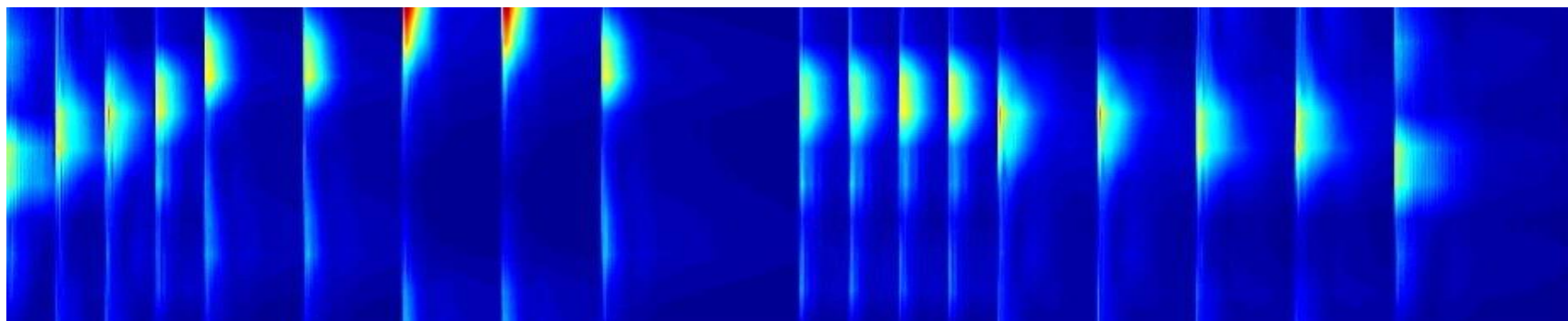
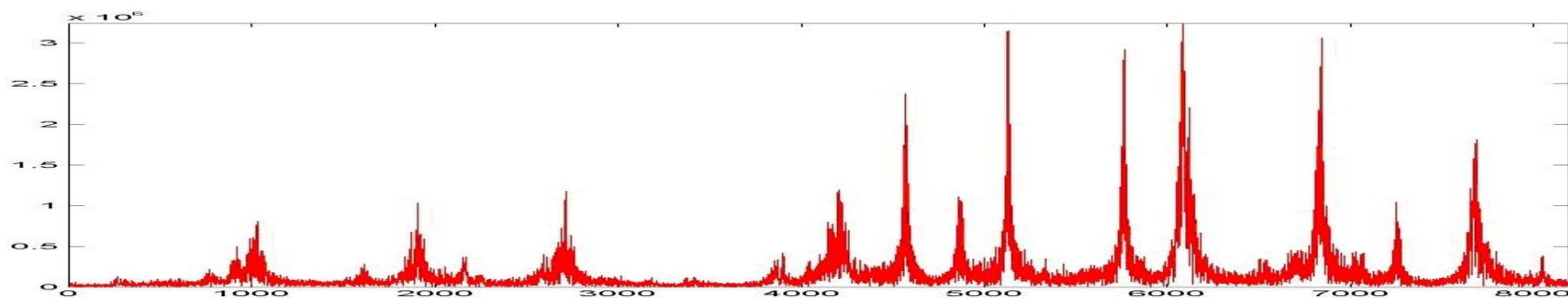
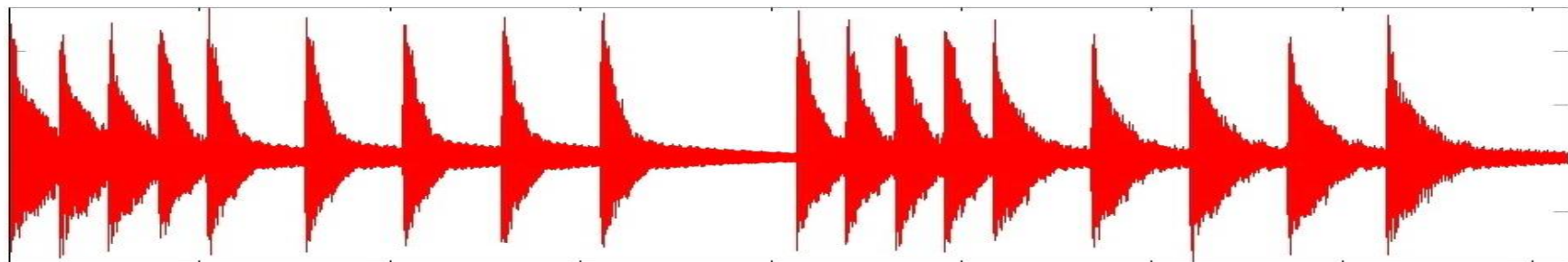
- Bouchala: Funkce komplex. proměnné – uč. text
www.am.vsb.cz/bouchala
- Častová, Kozubek: Integrální transformace,
www.am.vsb.cz/studium
- Galajda, Schroetter: Funkcie komplex. promennej a operátorový počet
- Horák: Sylaby, přednášky, programy
www.am.vsb.cz/horak

Významné osobnosti

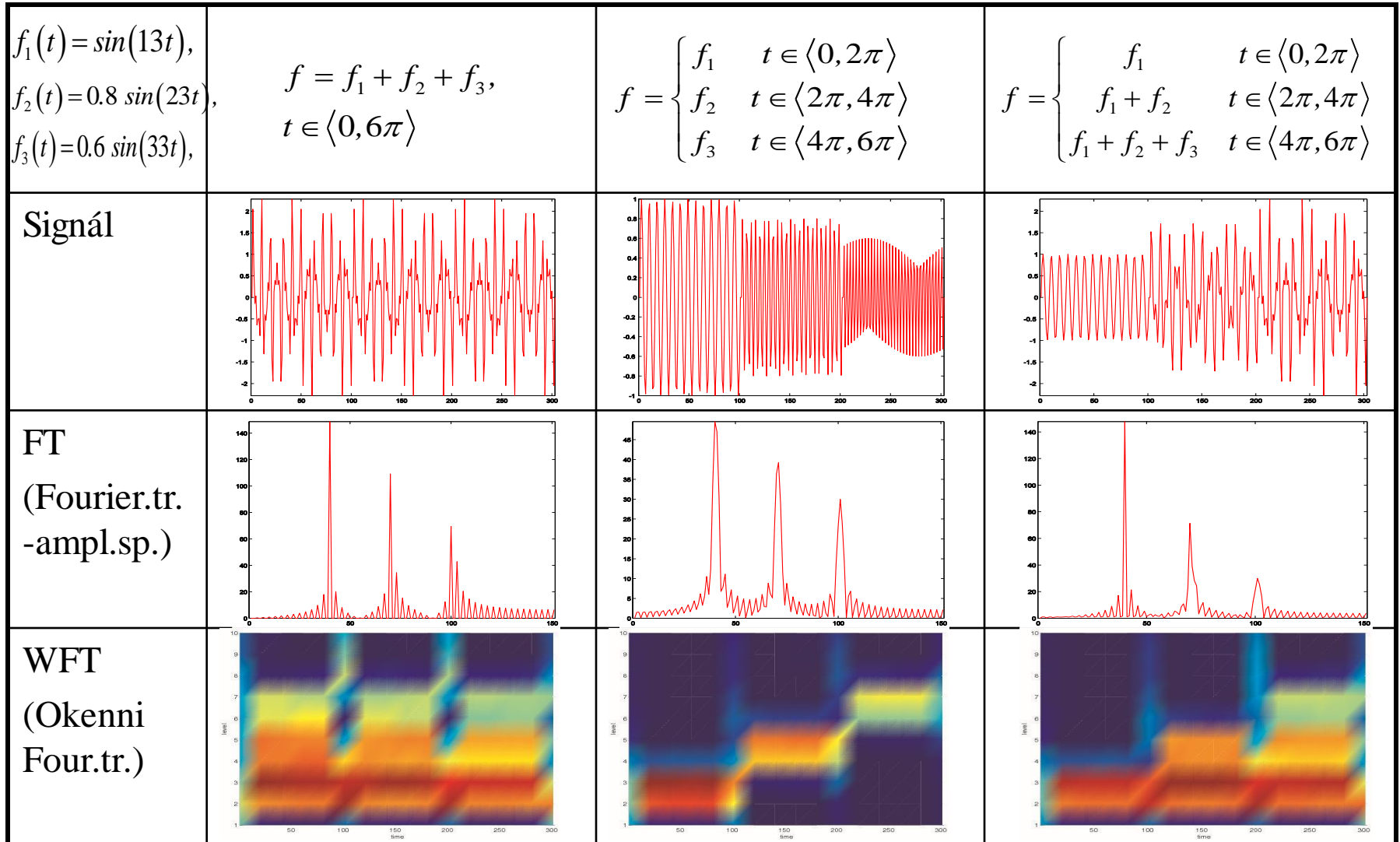
Gauss	Fourier	Laplace	Haar
Walsh	Rademacher		Daubechays
Malat	Fejer	Hankel	Hamming
Bartlet	...		

Motivace – časově-frekvenční analýza s WFT

Ko-čka-le-ze dí - rou, pes ok - nem, ne-bu-de-li pr - šet, ne - zmo - knem



Motivace – časově-frekvenční analýza s WFT



$$FT\{f\} = F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

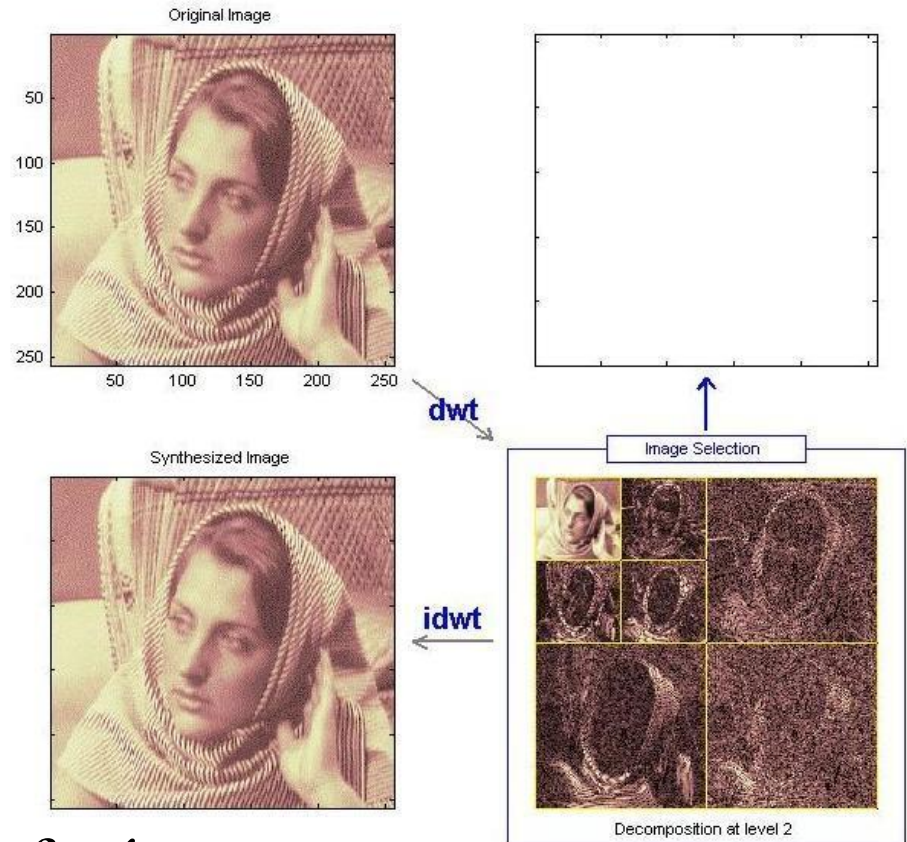
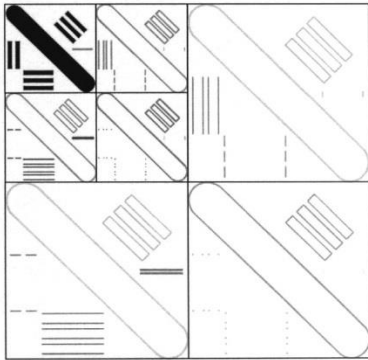
$$WFT\{f\} = F(\omega, \tau) = \hat{f}(\omega, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f_{\tau}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-\tau)} e^{-i\omega t} dt$$

Motivace – komprese obrázků s WT

1D waveletová tr.= WFT s adaptivním oknem

$$WT \{f\} = F(a, \tau) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbf{R}} f(t) \psi(a, \tau) dt = \int_{\mathbf{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$

2D waveletová transformace



JPEG, MPEG, MP3, MP4 - referáty

Motivace – řešení diferenciál. rovnic s LT

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

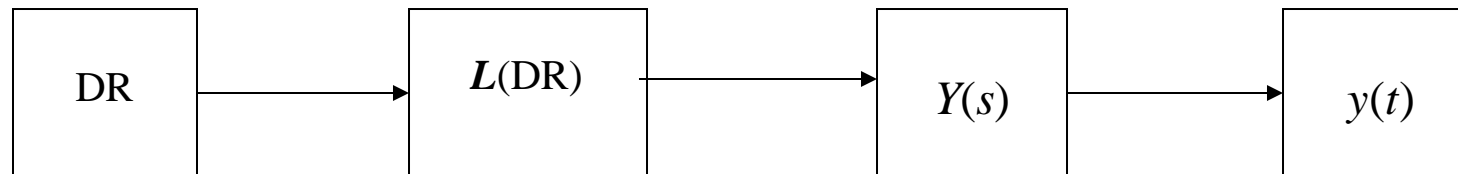
počáteční podmínky: $y(t_0) = c_0, y'(t_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$.

a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) jsou reálné konstanty ($a_n \neq 0$),

$f(t)$ je zadaná fce, k níž existuje L -obraz,

$y = y(t)$ je hledaná fce, o níž předpokládáme, že k ní existuje L -obraz

$y^{(k)} = y^{(k)}(t)$ jsou derivace k -tého řádu, k nimž taktéž existuje L -obraz



Laplaceova transformace: $LT\{f\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt,$

Úvod – obecný pohled na IT a DT

$$T\{f\} = (Tf)(q) = F(q) = \int_I f(t) \bar{\chi}_q(t) dt$$

společným principem IT je obecně "poměření" (**dekompozice**) zkoumaného vstupu $f(t)$ množinou testovacích fcí $Q = \{\chi_q(t), q \in \Lambda\}$ na I , Λ je vybraná množina indexů, $f(t) \in L^2(I)$

$\bar{\chi}$ značí komplexně sdruženou veličinu tvořící **jádro transformace** Q musí být nekonečná aby $f(t)$ šla rekonstruovat z hodnot $F(q)$ a dvě fce byly rozlišitelné

Inverzní IT (rekonstrukce) je pak **syntézou** $f(t)$ z veličin $F(q)$ a píšeme $T^{-1}\{F\} = (T^{-1}F)(t) = f(t)$

Požadavky na Q =požadavky na algoritmy:jednoduchost, univerzálnost, jednoznačnost, stabilita (malým změnám f odpovídají malé změny F)

Úvod – obecný pohled na IT a DT

Požadavky splňuje **multiplikativní systém fcí na I** : $Q = \{\chi(t, q)\}$

tj. **ortonormální soustava** nenulových fcí na I obsahující s každými dvěma fcemi jejich součin i podíl

$$T\{f\} = (Tf)(q) = F(q) = \int_I f(t) \bar{\chi}(t, q) dt \quad \dots \text{multiplikativní integrál}$$

Číselná realizace integrálu (za podmínky jeho konvergence) je dána přímo hodnotou integrálu vypočtenou obdélníkovou metodou:

$$F_n(q) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \cdot \bar{\chi}(t_n, q) \cdot h_n, \quad \mathbf{F} = \mathbf{Xf} \quad \dots \text{maticový zápis}$$

N je počet bodů, $f(t_n)$ jsou fční hodnoty v diskretních bodech, h_n je krok vzorkování, $\{\chi(t_n, q)\}$ je diskretní multiplikativní systém

Základní pojmy – integrovatelnost fcí

Definice: Fce $f(t)$ je na intervalu $I \equiv [a, b]$ integrovatelná s kvadrátem (s druhou mocninou), jestliže existují - tj. mají konečnou hodnotu integrály $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b |f(t)|^2 dt$.

Množinu těchto fcí značíme $\mathbf{L}_2(I)$, resp. \mathbf{L}_2 nebo \mathbf{L}^2 .

Definice: Množina všech fcí integrovatelných na intervalu I tvoří lineární prostor fcí a značíme ho $\mathbf{L}(I)$.

Věty: Každá alespoň po částech spojitá fce na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Platí, že je-li $f \in \mathbf{L}^2 [a, b]$, pak existuje i integrál $\int_a^b |f(t)| dt$

a říkáme, že fce $f(t)$ je na $[a, b]$ *absolutně integrovatelná*.

Příklady integrovatelnosti fcí

$$f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in \mathbf{L}^2[1,2], \quad f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \notin \mathbf{L}^2(0,1], \quad f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in \mathbf{L}(0,1], \quad f(t) = \frac{1+i}{\sqrt[4]{t}} \in \mathbf{L}^2(0,1].$$

Příklad: Rozhodni, zda $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem na $[1,2]$

Řešení: Vypočteme integrály

$$\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = 2, \quad \int_1^2 \frac{dt}{(\sqrt{t-1})^2} = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{dt}{t-1} = [\ln|t-1|]_1^2 = +\infty,$$

Takže $f(t)$ je v intervalu $[1,2]$ integrovatelná, ale není v tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem, tj. $f \in \mathbf{L}^1[1,2]$ ale $f \notin \mathbf{L}^2[1,2]$.

$$|f_1(t)| = \left| \frac{1+i}{\sqrt{t}} \right| \in \mathbf{L}[1,2], \quad |f_2(t)| = \left| \frac{1+i}{\sqrt{t}} \right| \notin \mathbf{L}(0,1], \quad |f_3(t)| = \left| \frac{1+i}{\sqrt[4]{t}} \right| \in \mathbf{L}(0,1].$$

f_1, f_3 na příslušných intervalech jsou absolutně integrovatelné a tedy integrovatelné s kvadrátem

Základní pojmy (kap.4) – skalární součin

Definice: Necht' fce $f, g \in \mathbf{L}^2[a,b]$, pak *skalární součin* těchto dvou fci na daném intervalu definujeme:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(t) \cdot \bar{g}(t) dt = \int_a^b f(t) \cdot g^*(t) dt$$

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t) f^*(t) dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt \stackrel{\text{označ.}}{=} \|f\|^2$$

Platí:

- $\langle c \cdot f, g \rangle = c \cdot \langle f, g \rangle$, zde c je libovolná konstanta,
- $\langle f+h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$, zde fce $h(t) \in \mathbf{L}^2[a,b]$,
- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$, zde $\langle g, f \rangle^*$ je číslo komplexní sdružené k $\langle f, g \rangle$.
- $\langle f, f \rangle = \|f\|^2$
- Schwarzova-Buňakovského nerovnost: $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Norma, ortogonální a ortonormální systémy

Definice: Normou fce $f \in \mathbf{L}^2[a,b]$ rozumíme číslo $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, pro které

- $\|f\| > 0$, přičemž $\|f\| = 0$ jedině tehdy, je-li $f(t)$ nulová fce.
- $\|c \cdot f\| = |c| \cdot \|f\|$, zde c je konstanta.
- $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, trojúhelníkové pravidlo, zde fce $f, g \in \mathbf{L}^2[a,b]$.

Normu fce f chápeme tedy jako vzdálenost této fce od fce nulové.

Definice: Fce $f \in \mathbf{L}^2[a,b]$, $g \in \mathbf{L}^2[a,b]$ se nazývají *ortogonální* na $[a,b]$ platí-li, že jejich skalární součin je roven nule: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g^*(t) dt = 0$.

Definice: Systém fcí $\{f_n\}_1^\infty \in \mathbf{L}^2[a,b]$ je *ortogonální* na $[a,b]$, jsou-li ortogonální každé dvě jeho fce: $\langle f_m, f_n \rangle = \int_a^b f_m(t) \cdot f_n^*(t) dt = 0 \quad \forall m, n (m \neq n)$.

Definice: Je-li každá fce $f_n(t)$ z ortog. systému normovaná $\|f_n(t)\| = 1$ pro $\forall n$ nazýváme tento *systém ortonormovaný* nebo *ortonormální*:

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_a^b f_m \cdot f_n^* dt = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n, \end{cases}$$

Ortogonalní a ortonormální systémy - příklady

Příklad 1: Systém fcí $f_n = e^{int}$ pro $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonalní není však ortonormální.

$$f_n = e^{int} \text{ na zadaném intervalu náleží prostoru } L^2: \\ \int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0 = \textit{konst.} \quad \int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = \langle f_n, f_n \rangle = \int_0^{2\pi} e^{int} \cdot e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

systém fcí na zadaném intervalu je ortogonalní:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{int} \cdot e^{-imt} dt = 0, \quad n \neq m.$$

Příklad 2: Systém fcí $f_n = e^{int}$ na intervalu $[0, \pi]$ není ortogonalní:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^{\pi} e^{int} \cdot e^{-imt} dt = \frac{(-1)^{n-m} - 1}{n - m}, \quad n \neq m.$$

Příklad 3: Systém fcí $f_n = e^{int}$ pro $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ je na $[0, 2\pi]$ ortogonalní není ortonormální: $\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n \rangle = \int_0^{2\pi} e^{int} \cdot e^{-int} dt = 2\pi \Rightarrow \|e^{int}\| = \sqrt{2\pi}$

Systém fcí bude ortonormální: $\left\{ \frac{f_n}{\|f_n\|} \right\}_{\forall n} = \left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{\forall n} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{\forall n}$

Diskrétní ortogonální systémy

Rademacherova soustava (báze)

Definice: Posloupnost fcí $\{r_n\}_0^\infty$ definovaná na intervalu $x \in [0,1]$:

$$r_0(x) = 1, r_n(0) = 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

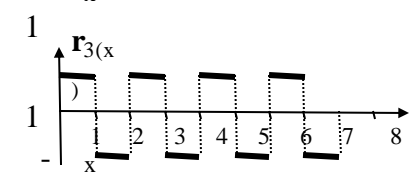
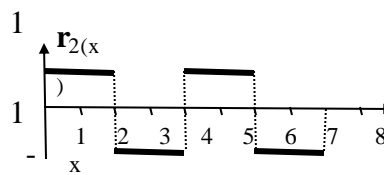
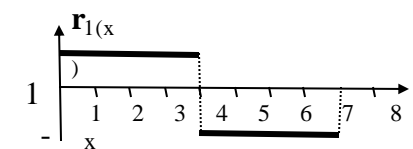
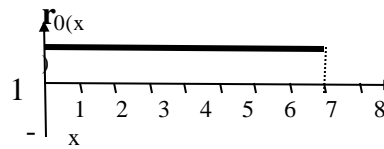
$$r_n(x) = \begin{cases} +1 & \text{pro } \frac{k-1}{2^n} < x \leq \frac{k}{2^n}, \quad k \text{ je liché} \\ -1 & \text{pro } \frac{k-1}{2^n} < x \leq \frac{k}{2^n}, \quad k \text{ je sudé} \end{cases}$$

S výjimkou bodů $x = \frac{k}{2^n}$ pro tuto soustavu platí vztah: $r_n(x) = \text{sgn} \sin(2^n \pi x)$

Konstrukce: Rozdělíme interval $x \in [0,1]$ na $N = 2^n$ stejných dílků v příslušných dílčích intervalech položíme $r_n(x)$ střídavě rovno +1 a -1

Např. při $N = 2^n = 8, n = 3$ systém bude tvořen $\{r_n\}_0^3$ bodů je 8, indexy $p = 0, 1, 2, \dots, n-1$

r_0	1	1	1	1	1	1	1	1
r_1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
r_2	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
r_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1



n-k Z	0	1	2	3	4	5	6	7	Mocn
P_2	0	0	0	0	1	1	1	1	2^2
P_1	0	0	1	1	0	0	1	1	2^1
P_0	0	1	0	1	0	1	0	1	2^0

Konstrukce2: na základě dvojkového rozkladu čísla $z = p_0 2^0 + p_1 2^1 + p_2 2^2 + \dots = \sum_{k=0}^{n-1} p_k 2^k$; $z = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$r_0(x) = 1$$

$$r_n(x) = (-1)^{P_n}$$

R. soustava je tvořena stochasticky nezávislými fcemi a v důsledku své jednoduchosti je velice rozšířená a používá se v teorii pravděp. při analýze náhod. procesů. Velkou výhodou báze je, že index řádku matice souvisí s počtem nulových bodů

Diskrétní ortogonální systémy

Walshův systém (Walsh-Paley báze)

Definice: Walshův systém je ortogonální v L^2 a je tvořen součinem

Rademacherových funkcí

$$W_0(x) = r_0(x) = 1 \quad \left\{ W_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty} \quad W_n(x) = \prod_{k=0}^m [r_k(x)]^{p_k} \quad x \in [0,1]$$

m, p_k jsou určeny z dvojkového rozkladu čísla n : $n = \sum_{k=1}^m p_k 2^{k-1} \quad p_0 = 0$
pro $N=2^m=8$ dostaneme

Index bodů n	Dvojkový rozklad			r_0	$r_1^{p_1}$	$r_2^{p_2}$	$r_3^{p_3}$	$W_n(x)$
	p_3	p_2	p_1					
0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	r_1	1	1	r_1
2	0	1	0	1	1	r_2	1	r_2
3	0	1	1	1	r_1	r_2	1	$r_1 r_2$
4	1	0	0	1	1	1	r_3	r_3
5	1	0	1	1	r_1	1	r_3	$r_1 r_3$
6	1	1	0	1	1	r_2	r_3	$r_2 r_3$
7	1	1	1	1	r_1	r_2	r_3	$r_1 r_2 r_3$

$$W = \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \\ W_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$W^* = \begin{pmatrix} W_0^* \\ W_1^* \\ W_2^* \\ W_3^* \\ W_4^* \\ W_5^* \\ W_6^* \\ W_7^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Walshův modifikovaný systém

Výhodou Walshovy báze je, že je úplná, oproti Rademacherově má nevýhodu, že index řádku není totožný s počtem nulových bodů a proto ji lze obtížně přímo využít pro analýzu náhodných procesů => přeusporádání:

$$W_n^* = W_{2j+p}^*(x) = W_j^*(2x) + (-1)^{j+p} \cdot W_j^*(2x-1) \quad p=0,1; j=0,1,2,3,\dots,k; N=2^k$$

Diskrétní ortogonální systémy

Haarova soustava

Definice: Haarův systém je ortog. v L^2 a je definován na intervalu $x \in [0,1]$

$$h_0(x) = H_{00} = 1 \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 2^m + k$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 2^m.$$

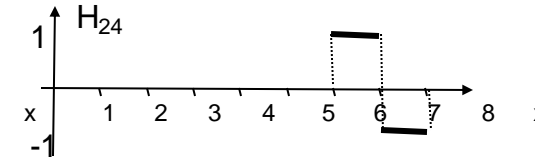
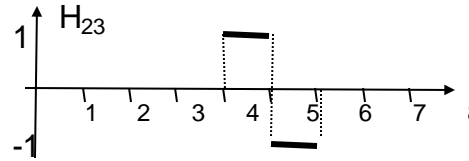
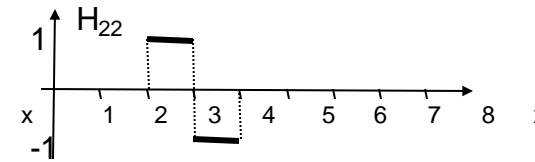
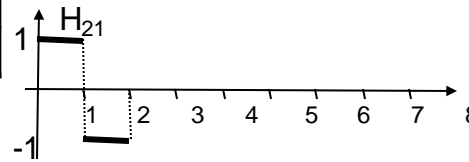
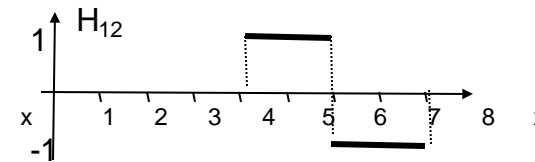
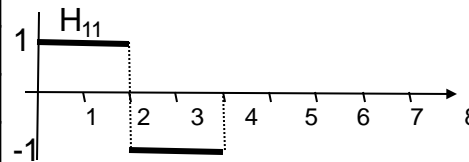
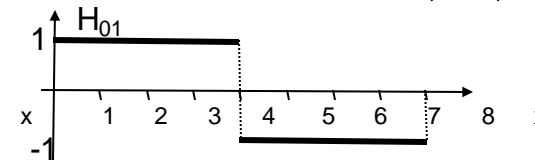
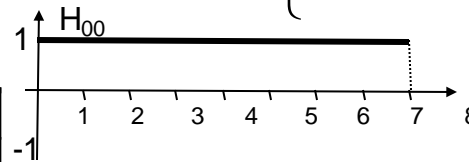
$$h_n(x) = h_{mk} = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \frac{2k-2}{2^{m+1}} < x < \frac{2k-1}{2^{m+1}}, \\ -\sqrt{2^m}, & \frac{2k-1}{2^{m+1}} < x < \frac{2k}{2^{m+1}}, \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

Pomocí h_{mk} sestavíme matici H

h_0	1	1	1	1	1	1	1	1
h_1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
h_2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	0	0
h_3	0	0	0	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
h_4	2	-2	0	0	0	0	0	0
h_5	0	0	2	-2	0	0	0	0
h_6	0	0	0	0	2	-2	0	0
h_7	0	0	0	0	0	0	2	-2

nebo

$$H_{mk}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{2k-2}{2^{m+1}} < x < \frac{2k-1}{2^{m+1}}, \text{ (levá část)} \\ -1, & \frac{2k-1}{2^{m+1}} < x < \frac{2k}{2^{m+1}} \text{ (pravá část)} \\ 0 & \text{pro ostatní } x \end{cases}$$



Abychom obdrželi Haarův systém **ortonormální** stačí H , popisující ortogonální systém vydělit \sqrt{N} , N je počet bodů

CVIČENÍ 1

Příklad: Rozhodněte, zda fce $f(t)$ je integrovatelná s kvadrátem na intervalu $[1,2]$ $f(t) = \frac{1+2i}{(t-1)^{1/3}}$

Řešení: Vypočteme integrály

$$\int_1^2 \frac{1+2i}{(t-1)^{1/3}} dt = (1+2i) \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{dt}{(t-1)^{1/3}} = \frac{3}{2}(1+2i), \quad \int_1^2 \left| \frac{1+2i}{(t-1)^{1/3}} \right|^2 dt = 5 \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{dt}{(t-1)^{2/3}} = 15.$$

Takže fce $f(t)$ je v intervalu $[1,2]$ integrovatelná a integrovatelná s kvadrátem, tj.

$$f \in \mathbf{L}^1[1,2], f \in \mathbf{L}^2[1,2].$$

Příklad: Ověřte, že systém fcí: $1/2, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$ je na intervalu $[-\pi; +\pi]$ ortogonální, ale není ortonormální.

Řešení: Fce tvořící tento systém jsou na zadaném intervalu integrovatelné s kvadrátem. K tomu stačí určit $\|1/2\|, \|\cos nt\|, \|\sin nt\|$.

Výpočtem následujících integrálů se snadno přesvědčíme, že tato soustava fcí je ortogonální na intervalu $[-\pi; +\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(nt) dt = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos(nt) dt = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = 0, \quad \text{pro } \forall m, n (m \neq n).$$

Daná soustava fcí není však ortonormální, protože již pro první fci $f_1=1/2$ je $\|f_1\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} dt \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \neq 1$.

CVIČENÍ 1

Příklad: Zjistěte, zda systém tvořený fcemi $f_n = e^{int}$ pro $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ je na intervalu $[-\pi, +\pi]$ ortogonální.

Řešení: Zde, na rozdíl od předchozího příkladu, při vytvoření skalárního součinu dvou fcí integrovatelných s kvadrátem (ověřte), musíme vzít v úvahu funkce komplexně sdružené:
$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \cdot e^{-imt} dt = 0, \quad n \neq m.$$

To znamená, že posloupnost fcí $f_n = \{ e^{int} \}_{\forall n}$ tvoří na daném intervalu ortogonální systém.

Protože
$$\|e^{int}\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-int} dt \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi},$$
 , potom posloupnost fcí $\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{-\infty}^{\infty}$

tvoří ortonormální systém na intervalu $[-\pi, +\pi]$.

Příklad: Definuje zadaný předpis skalární součin?

Příklad: „Výroba“ ortogonální báze – Gram-Schmidtův proces

Konvergence posloupnosti fcí

Definice: Necht' $\{f_n\}_{\forall n}$ je posloupnost fcí $f_n \in \mathbf{L}^2[a,b]$ pro $\forall n$.

Existuje-li fce $f \in \mathbf{L}^2[a,b]$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$

říkáme, že posloupnost fcí $\{f_n\}_{\forall n}$ *konverguje v průměru k f na intervalu $[a,b]$ = konverguje ve smyslu střední kvadr. odchylky = konverguje v normě \mathbf{L}^2 .*

Pozn.: Statistická charakteristika-odpovídá „disperzi“; nestac. procesy

Skutečně, je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|^2 = 0$

pak $\|f_n - f\|^2 = \int_a^b |f_n - f|^2 dt \longrightarrow \mathbf{0}$ při $n \rightarrow \infty$

Definice: Posloupnost fcí $\{f_n(z)\}$ *konverguje na množině M stejnoměrně k funkci f(z), platí-li:*

pro $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, že pro $\forall n > n_0, \forall z \in M$ $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

Pozn.: Význam definice $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in M} |R_n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in M} |f_n(z) - f(z)| = 0$

Funkční řady

Definice: Necht' $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních fci, potom *funkční řada* je matematický předpis

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \stackrel{\text{ozn}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

Příklady fčních řad:

- Mocninné řady $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$
- Taylorova $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$
- Laurentova $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \cdot (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$;
- Fourierova řada $f(t) = \sum_0^{\infty} c_n \varphi_n(t)$, kde $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$.
 $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega n t}$, $C_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cdot e^{-i\omega n t} \cdot dt$

Konvergence funkčních řad $\sum_{\forall n} f_n(z), z \in \mathbb{C}$ resp. $\sum_{\forall n} f_n(t), t \in \mathbb{R}$

- Bodová (absolutní, relativní)

- Cauchyova $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$

- Cesarova $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = S^{(1)}, \quad S_n^{(1)}(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(z)$

- Na množině M (na intervalu)

- absolutní: $\sum_{\forall n} |f_n(z)|$ je konverg. $\forall z \in M$

- relativní

Význam této definice: , tj. počínajíc jistým n se grafy fcí „blíží k sobě“ i v bodě, kde je největší vzdálenost mezi nimi

- stejnoměrná: $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\forall z \in M} |f_n(z) - f(z)| = 0$

- v normě \mathbf{L}^2 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(z) - f_n(z)\|^2 = 0$ pro $\forall z \in M$

Zobecněná Fourierova řada

Definice: Necht' posloupnost fci $\{\varphi_n(t)\}$, $n=0,1,2,\dots$ na uzavřeném intervalu tvoří *ortonormální systém* $\mathbf{L}^2(I)$ (tj. $\varphi_n(t) \in \mathbf{L}^2(I)$ pro $\forall n$, $\|\varphi_n\|=1$), necht' další fce $f(t) \in \mathbf{L}^2(I)$ je taková, že na intervalu I platí vztah

$$f(t) = \sum_0^{\infty} c_n \varphi_n(t), \quad \text{kde } c_n = \langle f, \varphi_n \rangle.$$

Řada se nazývá *zobecněná Fourierova řada* příslušná k fci $f(t)$ na intervalu I .

Pozn.: Geometrický význam koeficientů

koeficienty $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ jsou *projekce* $f(t)$ na příslušnou *bázovou* φ_n .

Klasická Fourierova řada v komplexním tvaru je speciálním případem zobecněné Fourierovy řady.

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega n t}, \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cdot e^{-i\omega n t} \cdot dt$$

Aproximační vlastnosti Fourierova polynomu a Fourierových řad, konvergence v normě L^2 .

Úkol: určit polynom $T_n(t)$, který **nejlépe** aproximuje danou fci $f(t)$ na určitém intervalu I v normě L^2 při zvoleném ortogonálním (ortonormálním) systému báзовých funkcí.

Předpoklady (jednodušší z hlediska přehlednosti):

1. $\{\varphi_n(t)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ - ortonormální systém báзовých funkcí (reálných).

2. $f(t)$ je reálná funkce reálné proměnné.

3. $T_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(t)$ - aproximující polynom, a_0, a_1, \dots je posloupnost reálných koeficientů.

4. Koeficienty určíme z podmínky

$$\min_{\forall t \in I} \|f(t) - T_n(t)\|^2 = \int_a^b [f(t) - T_n(t)]^2 dt = \int_a^b \left[f(t) - \sum_0^n a_k \varphi_k(t) \right]^2 dt$$

Chceme dokázat:

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|^2 = \min_{\forall a_k} \left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|^2$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \|f - T_n\|^2 &= \left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|^2 = \left\langle \left(f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right), \left(f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right) \right\rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \sum_0^n a_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_0^n |a_k|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_0^n a_k c_k + \sum_0^n |a_k|^2 = \\ &= \|f\|^2 + \sum_0^n |c_k|^2 - 2 \sum_0^n a_k c_k + \sum_0^n |a_k|^2 - \sum_0^n |c_k|^2 = \|f\|^2 + \sum_0^n |a_k - c_k|^2 - \sum_0^n |c_k|^2. \end{aligned}$$

Je evidentní, že $\min_{\forall T_n} \|f - T_n\|^2 = \min_{\forall a_k} \left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|^2$, je-li $a_k = c_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Závěr: Na intervalu $I \equiv [a, b]$ má ze všech polynomů n -tého stupně v bázi $\{\varphi_n(t)\}, n = 0, 1, 2, \dots$ nejmenší střední kvadratickou odchylku od fce f právě polynom s Fourierovými koeficienty.

Besselova nerovnost a Parsevalova identita

$$\min_{\forall T_n} \|f - T_n\|^2 = \min_{\forall a_k} \left\| f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_0^n |c_k|^2 \geq 0 \Rightarrow$$

Besselova nerovnost:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=0}^n |c_k|^2$$

Parsevalova rovnost:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$$

Parsevalova rovnost pro FŘ v **komplex. tvaru v ortogonální soustavě** $\{e^{-i\omega t}\}_{\forall n}$:

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2, \text{ kde } T \text{ je perioda, } C_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Parsevalova rovnost pro FŘ v **reálném tvaru v ortogonální soustavě**:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \text{ kde } T = 2L.$$

Úplný ortonormální systém:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{-n}^n c_k \varphi_k \right\| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{-n}^n c_k \varphi_k \right]^2 dt = 0.$$

Periodické funkce

Připomenutí:

Periodické fce: $f(t+nT)=f(t)$, $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$

Má-li fce $f(t)$ periodu T , pak fce $\varphi(t)=f(\omega t)$ má periodu T/ω , kde $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Jednoduché periodické fce: $a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$,
 $A \cdot \sin(\omega t \pm \varphi)$,
 $A \cdot \cos(\omega t \pm \varphi)$,
 $e^{i\omega t} = \exp(i\omega t)$,

a, b, φ jsou reálné konstanty; ω, A jsou reálné kladné konstanty.
 t je reálná proměnná

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$$

Fourierova řada (kap.3)

FŘ v komplexním tvaru:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega n t}, \quad t \in \mathbf{R}$$

FŘ v reálném tvaru:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t), \quad t \in \mathbf{R}, \\ &= \sum_0^{+\infty} A_n \cos(\omega n t - \varphi_n) \end{aligned}$$

Na **FŘ** se díváme jako na *bodovou* reprezentaci fce. Tato představa vznikla v práci Fouriera (1807-1810) při analýze rovnic vedení tepla. Rok 1854 se pokládá za začátek soustavného rozpracování teorie FŘ (Georg F.B. Riemann)

Fourierovy koeficienty

Four. koeficienty = Fourierova transformace na intervalu:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-i\omega n t} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$f(t) = \sum_1^{+\infty} C_{-n} e^{-i\omega n t} + C_0 + \sum_1^{+\infty} C_n e^{i\omega n t} = C_0 + \sum_1^{+\infty} (C_{-n} e^{-i\omega n t} + C_n e^{i\omega n t})$$

Eulerovy - Fourierovy formule:

$$f(t) = C_0 + \sum_1^{+\infty} [C_{-n} (\cos(\omega n t) - i \sin(\omega n t)) + C_n (\cos(\omega n t) + i \sin(\omega n t))] \Rightarrow$$

$$f(t) = C_0 + \sum_1^{+\infty} (C_{-n} + C_n) \cos(\omega n t) + i(C_n - C_{-n}) \sin(\omega n t).$$

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n), \quad C_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n)$$

$$a_n = C_n + C_{-n} = 2 \operatorname{Re} C_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(\omega n t) \cdot dt$$

$$b_n = i(C_n - C_{-n}) = -2 \operatorname{Im} C_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin(\omega n t) \cdot dt$$

$$a_0 = 2C_0 = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt$$

Klasická FŘ v C jako spec.případ zobecněné FŘ

Důkaz: Zavedeme označení: $g_n(t) = e^{i\omega n t}$. Systém fcí $\{g_n(t)\} = \{e^{i\omega n t}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ tvoří na své periodě T **ortogonální** systém:

$$\langle g_n, g_m \rangle = \langle e^{i\omega n t}, e^{i\omega m t} \rangle = 0, \quad n \neq m, \quad \text{v } \mathbf{L}^2[0, T] \quad \|e^{i\omega n t}\|^2 = T \Rightarrow \|e^{i\omega n t}\| = \sqrt{T} \neq 1, \quad T \neq 1.$$

Ortonormální systém fcí na periodě T : $\{\varphi_n(t)\}_{\forall n} = \left\{ \frac{g_n(t)}{\|g_n\|} \right\}_{\forall n} = \left\{ \frac{e^{i\omega n t}}{\sqrt{T}} \right\}_{\forall n}$

Koeficienty FŘ v ortonorm. soustavě básových fcí označíme malým c_n :

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \left\langle f, \frac{g_n}{\sqrt{T}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \langle f, g_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \langle f, e^{i\omega n t} \rangle.$$

Dosadíme $c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \langle f, e^{i\omega n t} \rangle$ do **zobecněné FŘ**: $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \varphi_n = \sum_{\forall n} c_n \frac{g_n}{\sqrt{T}},$

$$f(t) = \sum_{\forall n} \frac{1}{\sqrt{T}} \langle f, g_n \rangle \frac{g_n}{\sqrt{T}} = \sum_{\forall n} \frac{1}{T} \langle f, g_n \rangle g_n = \sum_{\forall n} C_n g_n = \sum_{\forall n} C_n e^{i\omega n t},$$

kde $C_n = \frac{1}{T} \langle f, g_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega n t} dt.$

Vztah mezi Laurentovou a Fourierovou řadou

Laurentova řada $g(z)$ regulární v mezikruží $1 - \varepsilon < |z - z_0| < 1 + \varepsilon$

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad \text{kde } C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{g(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

křivka K je kladně orientovaná jednotková kružnice.

Nechť $g(z)$ je navíc fce periodická s periodou $T = 2\pi/\omega$

Pak pro body na jednotkové kružnici platí: $z(t) - z(t_0) = e^{i\omega t}$

$$\omega t \in [-\pi, \pi], \quad t \in [0, T], \quad \text{přičemž } \omega = \pi/L, \quad T = 2L.$$

Substitucí $z(t) = z_0 + e^{i\omega t}$ dostaneme:

$$g(z_0 + e^{i\omega t}) = f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega n t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\pi n t / L}$$

$$C_n \text{ vypočteme z: } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\alpha+T} g(z_0 + e^{i\omega t}) i\omega e^{i\omega t} e^{-i(n+1)\omega t} dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-in\omega t} dt \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t) e^{-i\pi n t / L} dt, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Dirichletovy podmínky

1. $f(t)$ je periodická nebo periodicky rozšířitelná fce,
2. $f(t)$ je na zadaném intervalu (periodě) alespoň po částech spojitá,
3. $f(t)$ má na intervalu konečný počet extrémů (konstantní části $f(t)$ se neuvažují);
4. $f(t)$ je definovaná v krajních bodech intervalu (tj. nabývá v nich konečných hodnot) nebo existují příslušné jednostranné limity fce v těchto bodech.

Postačující podmínka: $f(t)$ je na intervalu T integrovatelná s kvadrátem.

Nutná podmínka: $f(t)$ je na intervalu T absolutně integrovatelná

$\tilde{f}(t)$ - periodické pokračování (prodloužení) $f(t)$

$$\tilde{f}(t+kT) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in (\alpha, \alpha+T) \\ \frac{1}{2}[f(\alpha_+) + f(\alpha_- + T)] & \text{pro } t = \alpha \text{ a } t = \alpha + T \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, t+kT \in \mathbb{R}.$$

Bodová konvergence FŘ, Gibbsův jev

$$\tilde{f}(t+kT) = \begin{cases} f(t), & t \text{ bod spojitosti } f \\ \frac{1}{2}[f(t_+) + f(t_- + T)], & t \text{ bod nespojitosti } f \end{cases}$$

překmit“ přibližně 18% z velikosti „skoku“ na každou stranu

princip lokalizace FŘ: konvergence či divergence FŘ fce splňující Dirichletovy podmínky je v bodě t závislá pouze na chování této fce v okolí tohoto bodu

Spektra

- **Jednostranné:** $\{A_n, \varphi_n\}, n=(0), 1, 2, \dots$

amplitudové: $\{A_n\}, n=0, 1, 2, \dots$

$$A_n = 2|C_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n \neq 0, \quad A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = |C_0|, \quad n = 0.$$

fázové: $\{\varphi_n\}, n=1, 2, \dots$

$$\varphi_n = \arg C_n \in (-\pi, \pi]$$

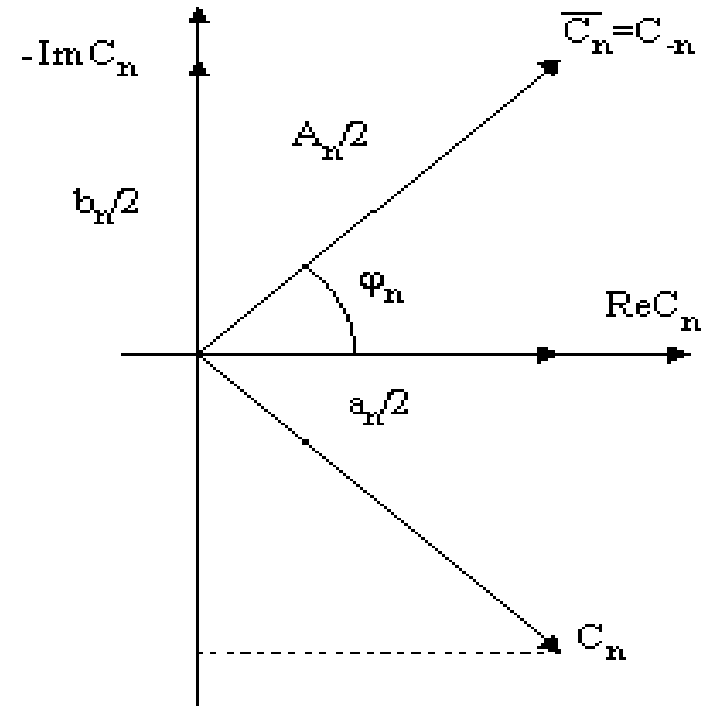
- **Dvoustranné:** $\{|C_n|, \varphi_n\}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

amplitudové: $\{|C_n| \}, n \in \mathbb{Z}$

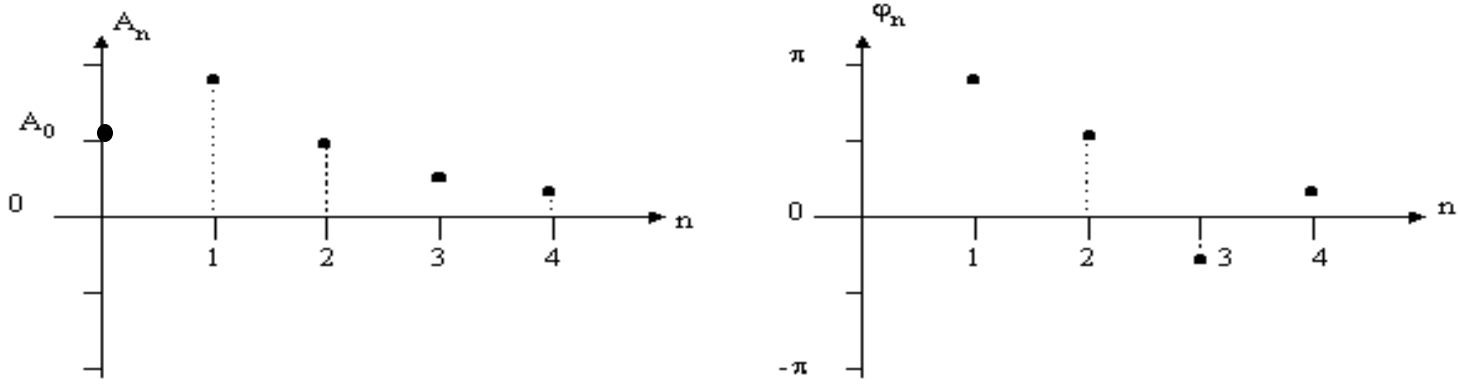
fázové: $\{\varphi_n\}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\varphi_n = \arg C_n \in [-\pi, \pi]$$

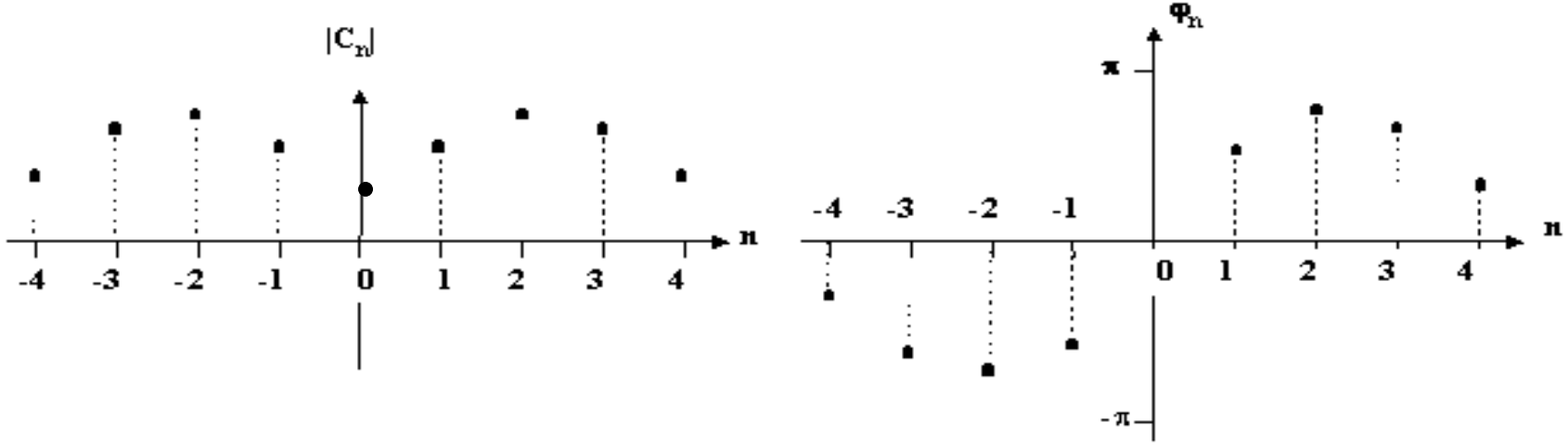
Pro $n=0$ fáze φ_0 není definována



- Jednostranné spektrum : $\{A_n, \varphi_n\}$



- Dvoustranné spektrum : $\{|C_n|, \varphi_n\}$

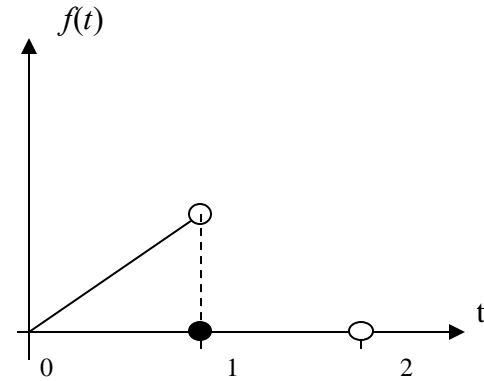


Je-li analyzovaná $f(t) = v_1(t) + i v_2(t)$ komplexní fce s nenulovou imaginární částí pak platí, že koeficienty FŘ C_n a C_{-n} **nejsou komplexně sdružené**. Důsledkem toho je, že **amplitudové spektrum není sudé a fázové není liché**.

Příklad

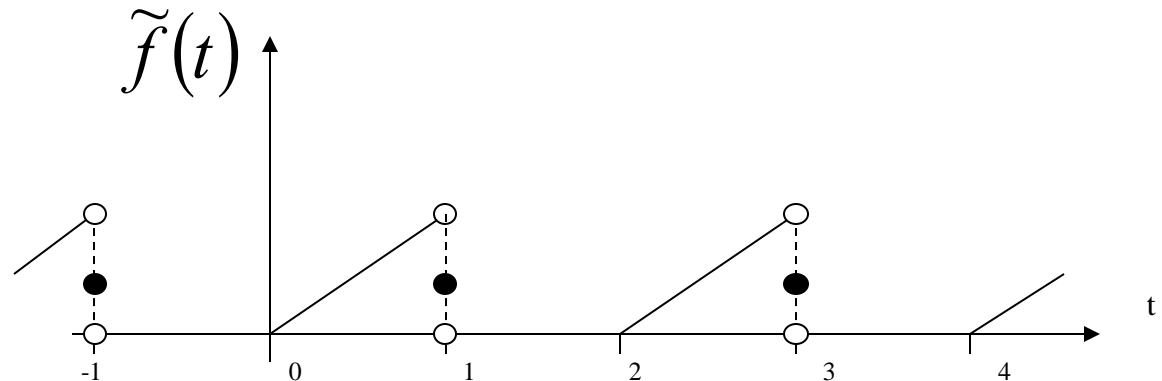
Zadání: Rozviň ve FŘ fci

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in (0,1), \\ 0, & t \in [1,2) \end{cases};$$



Řešení:

1. Analýza - ověření podmínek pro FŘ : $T=2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
2. Harmonická analýza (dekompozice, rozklad)
 - a) Výpočet koeficientů FŘ.
 - b) Analýza spektra.
3. Aproximace Fourier. řadou (syntéza)



$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_0^2 f(t) \cdot e^{-i\omega n t} dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 t \cdot e^{-i\pi n t} dt + \int_1^2 0 \cdot e^{-i\pi n t} dt \right] = \frac{1}{2} \int_0^1 t \cdot e^{-i\pi n t} dt \stackrel{\text{per partes}}{=} \frac{1}{2} \left[\frac{t \cdot e^{-i\pi n t}}{-i\pi n} - \frac{e^{-i\pi n t}}{(-i\pi n)^2} \right]_0^1 = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-i\pi n}}{-i\pi n} - \frac{e^{-i\pi n} - 1}{(-i\pi n)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{i(-1)^n}{\pi n} + \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2} \right], \quad n \neq 0.
 \end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^2 f(t) \cdot e^0 dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 t dt + \int_1^2 0 dt \right] = \frac{1}{4}$$

FŘ v komplexním tvaru:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \left[\frac{i(-1)^n}{\pi n} + \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2} \right] e^{i\pi n t}, \quad t \in R.$$

FŘ v reálném tvaru:

$$a_n = 2 \operatorname{Re} C_n = \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2}, \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad b_n = -2 \operatorname{Im} C_n = \frac{-(-1)^n}{\pi n}.$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^2} \cdot \cos(\pi n t) - \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(\pi n t) \right], \quad t \in R.$$

Sestavení jednostranného amplitudového a fázového spektra:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 0, \quad A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \frac{1}{4},$$

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \left[\left(\frac{(-1)^1 - 1}{\pi^2} \right)^2 + \left(\frac{-(-1)^1}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}, \quad \varphi_n \in (-\pi, \pi], \quad n \neq 0.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{1/\pi}{-2/\pi^2} \Rightarrow \text{2. kvadrant: } \varphi_1 = \pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{2} \right) \approx 2.1377 \quad \varphi_1 = \operatorname{atan} 2(1, -2/\pi) \approx 2.1377$$

Tabulka pro jednostr. (dvoustr.) spektrum:

n	0	1	2	...
a_n	0.5	-0.203	0	
b_n	---	0.318	-0.159	
c_n	0.25	0.101-i0.159	0+i0.080	
$ c_n $	0.25	0.189	0.080	
A_n	0.5	0.377	0.159	
φ_n <i>rad</i>	---	2.137	$-\frac{\pi}{2}$	

Fourierovy řady sudých fcí (kosinová řada)

$f(t)$ definovaná v intervalu $[-L, L]$ je **sudá**, tj. $f(-t) = f(t)$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(\omega n t) dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(\omega n t) dt, \quad T = 2L, \omega = \frac{\pi}{L}, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin(\omega n t) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega n t), \quad t \in R$$

Fourierovy řady lichých fcí (sinová řada)

$f(t)$ definovaná v intervalu $[-L, L]$ je **lichá**, tj. $f(-t) = -f(t)$,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin(\omega n t) dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin(\omega n t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(\omega n t) dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega n t), \quad t \in R$$

Přesná hodnota periodického pokračování

$$\tilde{f}(t) = f(t - kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Koeficient (harmonického) zkreslení

charakterizuje poměr mezi dominantní a celkovou informací:

Např:

$$\frac{A_d}{\sum_{\forall k} A_k} \quad \text{resp.} \quad \frac{A_d^2}{\sum_{\forall k} A_k^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{A_d}{\sqrt{\sum_{\forall k} A_k^2}}$$
$$\frac{A_d}{\sum_{\forall k, k \neq d} A_k} \quad \text{resp.} \quad \frac{A_d^2}{\sum_{\forall k, k \neq d} A_k^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{A_d}{\sqrt{\sum_{\forall k, k \neq d} A_k^2}}$$

Výkonové spektrum $\{|C_n|^2\}$

V praxi se často používá výpočet střední hodnoty na zadaném intervalu, např. středního výkonu period. veličiny $f(t)$, s použitím Parsev. rovnosti

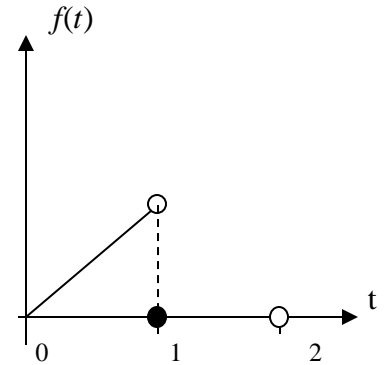
$$\mathbf{P} = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = |C_0|^2 + 2 \sum_{1}^{\infty} |C_n|^2, \quad \text{Efektivní hodnota } V = \sqrt{\mathbf{P}}$$

Příklad

Funkce:

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in (0,1), \\ 0, & t \in [1,2) \end{cases};$$

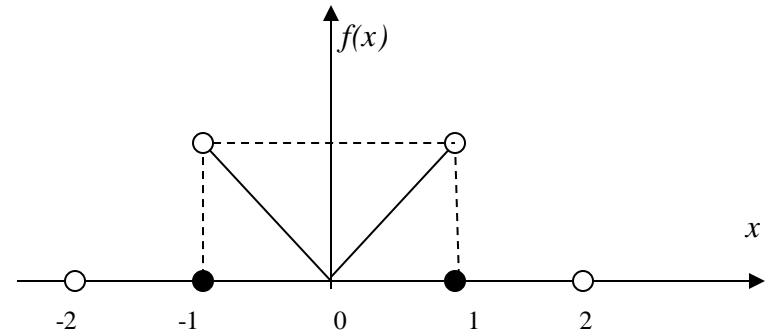
$$T = 2, \omega = \pi$$



Sudá fce:

$$f(t) = \begin{cases} |t|, & t \in (-1,1), \\ 0, & t \in (-2,-1], [1,2) \end{cases}$$

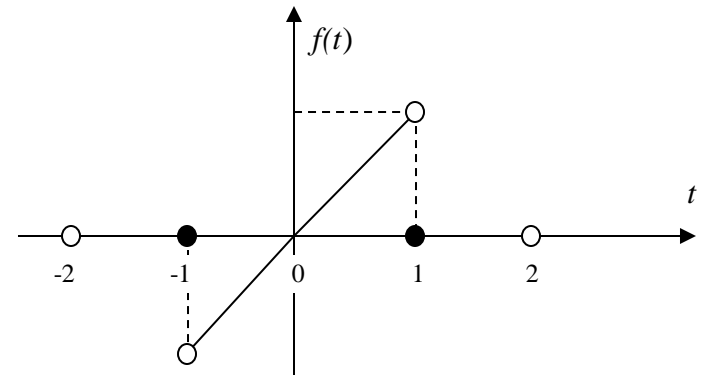
$$T = 4, \omega = \pi / 2$$

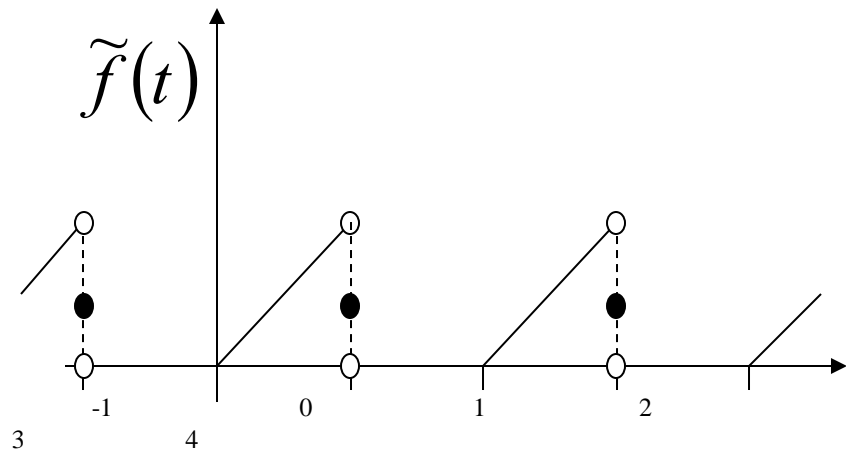


Lichá fce:

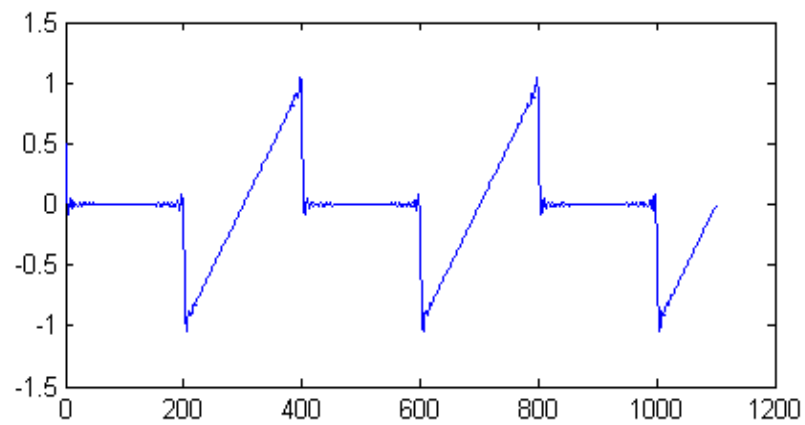
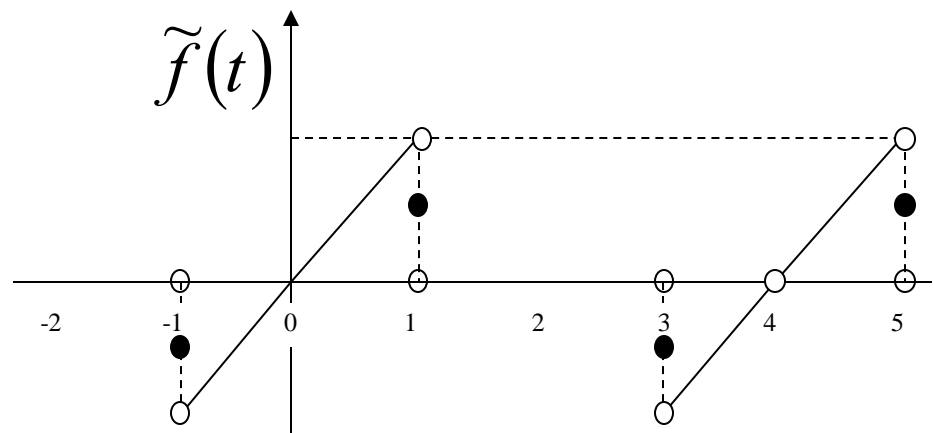
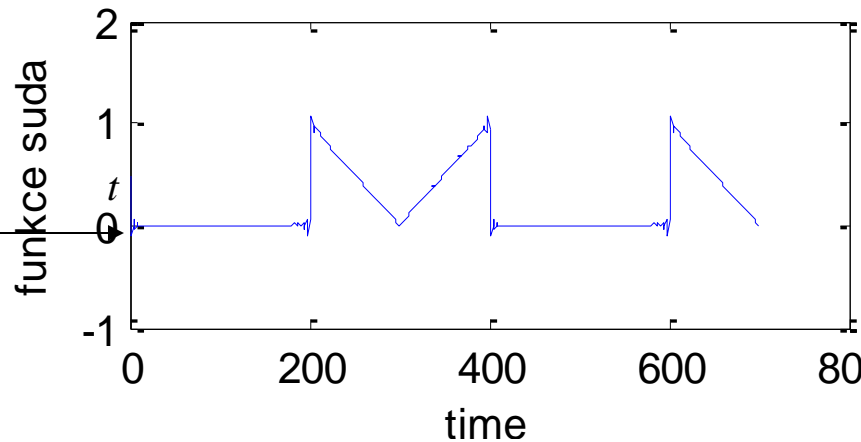
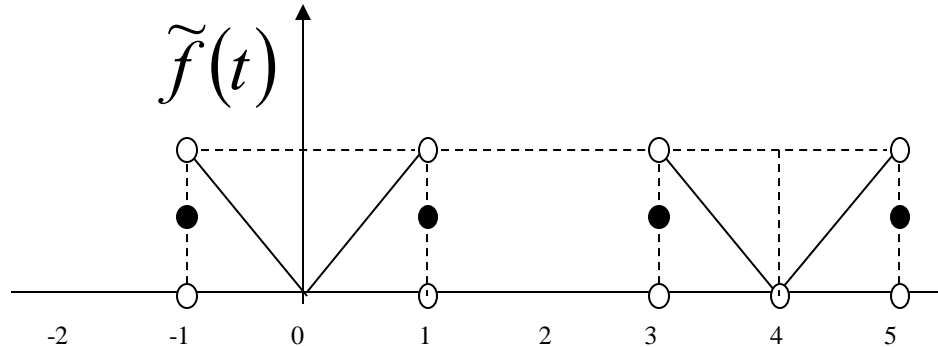
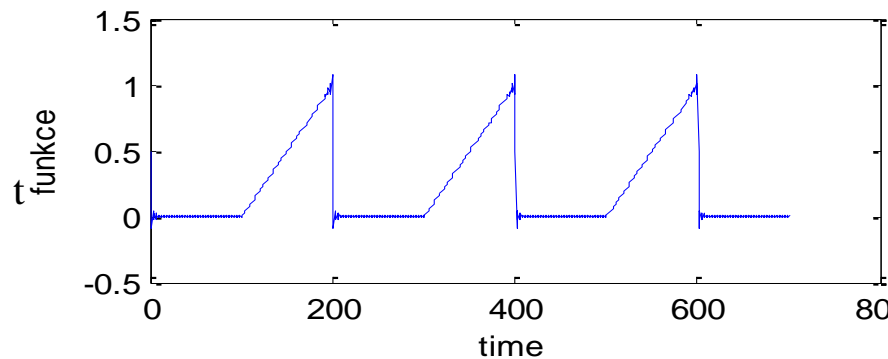
$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in (-1,1), \\ 0, & t \in (-2,-1], [1,2) \end{cases}$$

$$T = 4, \omega = \pi / 2$$





Fourierův polynom, 50 harmonických



CVIČENÍ 2

Příklad: Najděte amplitudové a fázové spektrum zadané Fourierovy řady:

CVIČENÍ 2

Příklad: Ověř, zda zadanou fci lze rozvinout ve FŘ, nakresli její součtový graf a nalezni 4. člen amplitudového a fázového spektra.

CVIČENÍ 2

Příklad: Všimněme si, že fce

$$f_1(t) = \frac{2}{1-t} \quad \text{a} \quad f_2(t) = \sin \frac{2}{1-t}$$

na intervalu $I = (-\pi, \pi)$ nesplňují Dirichletovy podmínky:

- fce $f_1(t)$ v bodě $t=1$, který patří do I , má bod nespojitosti 2. druhu,
- fce $f_2(t)$ v okolí tohoto bodu má nekonečný počet extrémů.

CVIČENÍ 2

Příklad: Necht' fce $v(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Sestavme FŘ a ukažme, že amplitudové spektrum není sudé a fázové není liché.

Řešení: Zde $v(t)$ je fce periodicky rozšiřitelná s periodou $T = \pi/2$. Je zřejmé, že $\operatorname{Re}v(t) = \cos(t)$ a $\operatorname{Im}v(t) = \sin(t)$ jsou fce reálné a integrovatelné na zadaném intervalu a funkce $v(t)$ je integrovatelná s kvadrátem na intervalu, tj. $v \in \mathbf{L}^2[0, \pi/2]$. Tedy lze sestavit na zadaném intervalu FŘ konvergentní v normě \mathbf{L}^2 . Vypočteme koeficienty:

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{it} \cdot e^{-4int} dt = \frac{2(1+i)}{\pi(1-4n)}, \quad C_{-n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{it} \cdot e^{4int} dt = \frac{2(1+i)}{\pi(1+4n)} \Rightarrow C_0 = \frac{2(1+i)}{\pi}.$$

$$\text{FŘ fce } v(t) \text{ bude: } \sum_1^{\infty} C_{-n} \cdot e^{-4int} + C_0 + \sum_1^{\infty} C_n \cdot e^{4int} = \frac{2(1+i)}{\pi} + \frac{2(1+i)}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{1+4n} e^{-4int} + \frac{1}{1-4n} e^{4int} \right)$$

Jak vidíme, koeficienty FŘ C_n a C_{-n} nejsou komplexně sdružené, tedy amplitudové spektrum není sudé a fázové není liché. Např.:

$$C_1 = \frac{2(1+i)}{-3\pi}, \quad C_{-1} = \frac{2(1+i)}{5\pi} \Rightarrow |C_1| = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}, \quad |C_{-1}| = \frac{2\sqrt{2}}{5\pi}, \Rightarrow |C_1| \neq |C_{-1}|, \quad \arg C_1 = -\frac{3\pi}{4}, \quad \arg C_{-1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg C_1 \neq -\arg C_{-1}$$

Ad Dirichletovy podmínky

Věta: Necht' $f(t)$ splňuje Dirichletovy podmínky a necht' existuje **stejněměrně konvergentní** rozvoj této fce na periodě T , pak koeficienty tohoto rozvoje budou **Fourierovy koeficienty**. Důkaz založíme na tom, že za těchto podmínek odvodíme vzorce: $C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(t) e^{-i\pi n t / L} dt, n \in \mathbf{Z}$,

Důkaz: Předpokládejme pro jednoduchost, že střed periody $s=0$ a $f(t)$ je reálná. Vyjdeme z rozvoje:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\pi n t / L}.$$

Z podmínek vyplývá, že $f(t)$ je na intervalu $[-L, L]$ **integrovatelná**.

Můžeme tedy vynásobit obě strany rozvoje výrazem $e^{-i\pi n t / L}$ a integrovat:

$$\int_{-L}^{+L} f(t) e^{-i\pi n t / L} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-L}^{+L} e^{i\pi n t / L} e^{-i\pi n t / L} dt.$$

Výpočet provedeme nejprve na pravé straně:

$$I = \int_{-L}^{+L} e^{i\pi n t / L} e^{-i\pi m t / L} dt = \int_{-L}^{+L} e^{i(n-m)\pi t / L} dt = \begin{cases} \int_{-L}^{+L} dt = 2L = T & \text{pro } n = m \\ \frac{L}{i(n-m)\pi} e^{i(n-m)\pi t / L} \Big|_{-L}^{+L} = 0 & \text{pro } n \neq m \end{cases}$$

Vztah můžeme tedy přepsat:

$$\int_{-L}^{+L} f(t) e^{-i\pi n t / L} dt = 2L \cdot C_n = T \cdot C_n \Rightarrow C_n = \frac{1}{T} \int_{-L}^{+L} f(t) e^{-i\pi n t / L} dt,$$

což jsme chtěli dokázat. \square

Sumace řad

Definice: Metoda sumace je *regulární*, splňuje-li podmínku: má-li řada $\sum a_n, n=1, \dots, \infty$ Cauchyův součet S , pak i zobecněný součet této řady musí být rovný S .

Nechť řada $\sum a_n, n=1, \dots, \infty$ má Cauchyův součet S_a a řada $\sum b_n, n=1, \dots, \infty$ má Cauchyův součet S_b . Metoda sumace je *lineární*, platí-li pro zobecněný součet řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_a + S_b.$$

Přehled: (součtů řad)

1. Klasický (Cauchyův)
2. ve smyslu Cesàra a Fejera
3. Abel-Poissonův
4. Hölderovy

Klasický (Cauchyův) součet řady

Definice: Cauchyho součet je definován jako *limita posloupnosti částečných součtů* řady. Necht' $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $k=1, \dots, n$ je částečný součet řady, pak součet řady je

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Příklad:

1. Víme, že řada $\sum 1/2^n$, $n=1, \dots, \infty$ je geometrická, konvergentní a její Cauchyův součet bude:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad \text{kde } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1/2 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

tedy

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1, \quad \text{tj. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

2. Naproti tomu řada $\sum (-1)^n$, $n=1, \dots, \infty$ je divergentní, jelikož

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k = \begin{cases} 0, & \text{pro } n = 2k \text{ (sudé)} \\ -1, & \text{pro } n = 2k + 1 \text{ (liché)} \end{cases}$$

tj. neexistuje vlastní limita posloupnosti částečných součtů řady.

Cesàrův (Fejerův) součet řady

Definice: Cesàrův součet je definován jako *limita posloupnosti aritmetických průměrů z částečných součtů řady:*

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k.$$

Příklad:

1. Víme, že Cauchyův součet řady $\sum 1/2^n, n=1, \dots, \infty$ je 1.

Cesàrův součet bude:
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k, \quad \text{kde } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1/2 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

tedy
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n \cdot 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \right) = 1.$$

Vidíme, že Cesàrův součet řady je stejný jako Cauchyův součet.

2. Řada $\sum (-1)^n, n=1, \dots, \infty$ je ve smyslu Cauchyových součtů divergentní, avšak ve smyslu Cesàrových součtů je konvergentní a její součet je roven *aritmetickému průměru* limit pro sudé a liché n :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + 0 - 1 + 0 - 1 + \dots}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Abel-Poissonův součet řady

Definice: Necht' je řada $\sum a_n x^n$, $n=1, \dots, \infty$ konvergentní na $x \in (0, 1)$ a necht'

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1_-} S(x) = S < \infty,$$

pak říkáme, že řada $\sum a_n x^n$, $n=1, \dots, \infty$ je konvergentní v bodě $x=1$ a její součet se rovná právě této limitě. Jinými slovy pro $x=1$ dostaneme číselnou řadu $\sum a_n$, $n=1, \dots, \infty$, která je konvergentní a její součet bude S .

Příklad:

1. Součet řady $\sum 1/2^n$, $n=1, \dots, \infty$ i v tomto případě bude 1. Sestavíme nejdříve mocninnou řadu $\sum (x/2)^n$, $n=1, \dots, \infty$, která je konvergentní na $|x| < 2$, tedy i na $x \in (0, 1)$. Předpis pro výpočet součtu řady v oboru

konvergence bude: $S(x) = \frac{x/2}{1 - x/2} = \frac{x}{2 - x}$ a tedy $\lim_{x \rightarrow 1_-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1_-} \frac{x}{2 - x} = 1$.

Součet ve smyslu Abel-Poissona je 1, je stejný jako Cauchyův i Cesàrův.

2. Součet řady $\sum (-1)^n$, $n=1, \dots, \infty$ vypočteme obdobně:

$$\lim_{x \rightarrow 1_-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1_-} \frac{-x}{1 + x} = -\frac{1}{2}.$$

Zde je součet ve smyslu Abel-Poissona stejný jako součet Cesàrův.

Hölderovy součty řady

Vztah mezi Cauchyovými a Cesàrovými součty, Hölderovy součty:

Nechť řada $\sum a_n, n=1, \dots, \infty$ je konvergentní, pak částečný součet je $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ a Cauchyův součet řady bude:

$$S^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

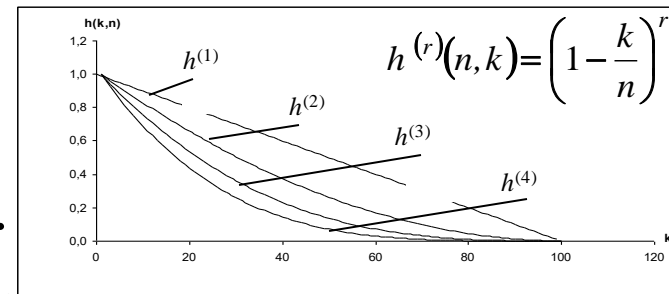
Cesàrův součet je definován následovně:

$$S^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + S_n] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [na_1 + (n-1)a_2 + (n-2)a_3 + \dots + a_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)a_{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) a_{k+1},$$

zde $\left(1 - \frac{k}{n}\right) = h(n, k)$ je váhový koeficient.

Při $n \rightarrow \infty$ Cesàrův s. $S^{(1)}$ přejde v Cauchyův $S^{(0)}$.



Poznámka: Neexistuje-li Cesàrův součet $S^{(1)}$ (Cesàrův součet 1. řádu), lze podobně definovat Cesàrovy součty vyšších řádů (*Hölderovy součty*).

Příklad: Necht' $f(t) = t^2$, $t \in [-\pi, +\pi]$.

(1) Pomocí FŘ určete součet číselné řady:

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

(2) Použitím Parsevalovy rovnosti součet číselné řady :

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Řešení: Fce $f(t)$ na zadaném intervalu je sudá, $f \in \mathbf{L}^2 [-\pi, +\pi]$, tedy lze sestavit Fourierovu řadu na zadaném intervalu.

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad n \neq 0.$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(1) Fčn. hodnota v $t_0 = 0$ je 0, tj.

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos 0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(2) Použijeme pro výpočet součtu druhé řady Parsevalův vzorec:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{4\pi^4}{2 \cdot 9} + 16 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow 16 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi^5}{5} - \frac{2\pi^4}{9} \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{8\pi^4}{45 \cdot 16} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Užití FŘ při řešení diferenciálních rovnic

Nalezení periodického partikulárního řešení

LDR s konstantními koeficienty

$$L(y) = \sum_{k=0}^m a_k y^{(k)} = a_m y^{(m)} + a_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \quad t \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{N},$$

$f(t)$ je periodická funkce s periodou T :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{2in\pi t}{T}} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right).$$

Obecné řešení rovnice je $y = y_h + v(t)$,

y_h je řešením rovnice homogenní: $L(y) = \sum_{k=0}^m a_k y^{(k)} = 0$

$v(t)$ je periodické partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru FŘ.

- Vyřešíme klasickým způsobem (pomocí charakteristické rovnice) zkrácenou LDR. Řešením bude soustava lineárně nezávislých partikulárních řešení tvořících fundamentální systém y_1, y_2, \dots, y_m .
- V případě, že $f(t)$ neobsahuje členy lineárně závislé na fundamentálním systému y_1, y_2, \dots, y_m , tj. na řešení homogenní LDR, pak periodické partikulární řešení $v(t)$ reprezentujeme Fourierovou řadou s neznámými koeficienty a se stejnou periodou T :

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{\frac{2in\pi t}{T}} = \frac{A_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + B_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right), t \in \mathbf{R}.$$

Výpočet koeficientů C_n (eventuelně A_0, A_n, B_n) partikulárního **periodického** řešení provádíme dosazením výrazu $v(t)$ do původní LDR a následným porovnáním koeficientů u stejných funkcí.

- Obsahuje-li charakteristická rovnice LDR kořeny $\pm 2ni\pi/T$, pak fundamentální systém řešení bude obsahovat funkce $e^{\pm 2in\pi/T}$ resp. $\cos(2n\pi/T)$, $\sin(2n\pi/T)$.

$$u_n(t) = a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right),$$

pak tyto členy budou lineárně závislé na řešení homogenní rovnice Partikulární řešení nehomogenní LDR, odpovídající těmto členům na pravé straně LDR, nebude mít obvyklý tvar

$$A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right),$$

jelikož při výpočtu Fourierových koeficientů s indexy n ve jmenovateli bude nula (jde o tzv. rezonanci – podrobněji lze nalézt v teorii "Řešení LDR n -tého řádu s konstantními koeficienty").

V tomto případě postupujeme tak, že pravou stranu LDR zapíšeme ve tvaru

$$[f(t) - u_n(t)] + u_n(t).$$

Výraz $f(t) - u_n(t)$ rozložíme ve Fourierovu řadu, odpovídající rozvoj neobsahuje členy s indexy n (tj. neobsahuje členy s úhlovou frekvencí $2n\pi/T$) a tedy členy této FŘ nejsou lineárně závislé na řešení homogenní rovnice.

Předpokládané partikulární periodické řešení $v(t)$: $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, kde $v_1(t)$ hledáme ve tvaru Fourierovy řady

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k \neq n}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + B_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right), t \in \mathbf{R}.$$

které je řešením následující LDR:

$$\sum_{k=0}^n a_k v_1^{(k)} = f(t) - u_n(t)$$

$v_2(t)$ hledáme ve tvaru: $[A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)]t^r$ pro LDR: $\sum_{k=0}^n a_k v_2^{(k)} = u_n(t)$

zde r je násobnost kořene charakteristické rovnice, vyjadřující stupeň závislosti $u_n(t)$ na řešení homogenní rovnice. Řešíme-li LDR 2. řádu, pak násobnost r může být maximálně 1.

Řešení LDR - Příklad

Příklad: Najděte řešení LDR 2. řádu:

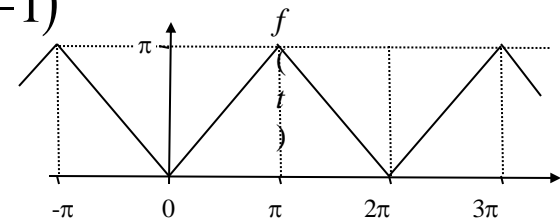
$$y'' - 2y' + y = f(t), \text{ kde } f(t) = |t|, \text{ pro } t \in [(2m-1)\pi, (2m+1)\pi], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Řešení: K získání řešení homog. rovnice: $y'' - 2y' + y = 0$ povede výpočet kořenů charakteristické rovnice: $k^2 - 2k + 1 = 0$, kterými jsou hodnoty $k_1 = k_2 = 1$, takže $y_h = C_1 e^t + C_2 t e^t$.

V dalším postupu nejprve najdeme rozvoj pravé strany LDR $f(t)$ ve FŘ. Jak je dobře patrné z obr., jedná se o sudou, spojitou fci s periodou $T = 2\pi$, integrovatelnou na periodě T . Rozvoj bude tedy kosinový ($b_n = 0$). Najdeme koeficienty FŘ obvyklým způsobem:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{t \sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} dt \right\} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}, \quad n \neq 0. \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi.$$

Potom
$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} [(-1)^n - 1] \frac{\cos(nt)}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)t]}{(2n-1)^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Poněvadž charakteristická rovnice nemá komplexní kořeny a FŘ pravé strany LDR neobsahuje členy lineárně závislé na fundamentálním systému: $y_1=e^t$, $y_2=te^t$, hledáme partikulár. řešení $v(t)$ přímo ve tvaru FŘ

$$v(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_1^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)),$$

$$v'(t) = \sum_1^{\infty} (-nA_n \sin(nt) + nB_n \cos(nt)), \quad v''(t) = \sum_1^{\infty} (-n^2 A_n \cos(nt) - n^2 B_n \sin(nt)).$$

Pro $v(t)$ spolu s jejími derivacemi dosadíme do původní rovnice a pravou stranu nahradíme nalezeným rozvojem:

$$\begin{aligned} & \sum_1^{\infty} (-n^2 A_n \cos(nt) - n^2 B_n \sin(nt)) - 2 \sum_1^{\infty} (-nA_n \sin(nt) + nB_n \cos(nt)) + \frac{A_0}{2} + \\ & + \sum_1^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} [(-1)^n - 1] \frac{\cos(nt)}{n^2}. \end{aligned}$$

Nyní přistoupíme k porovnávání koeficientů:

$$\text{abs.čl.: } \frac{A_0}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A_0 = \pi,$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos t: -A_1 - 2B_1 + A_1 = -\frac{4}{\pi} \\ \sin t: -B_1 + 2A_1 + B_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 = 0, B_1 = \frac{2}{\pi}, \quad \left. \begin{array}{l} \cos 2t: -4A_2 - 4B_2 + A_2 = 0 \\ \sin 2t: -4B_2 + 4A_2 + B_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_2 = 0, B_2 = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 3t: -9A_3 - 6B_3 + A_3 = \frac{-4}{9\pi} \\ \sin 3t: -9B_3 + 6A_3 + B_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_3 = \frac{8}{9 \cdot 25\pi}, B_3 = \frac{2}{3 \cdot 25\pi}, \quad \left. \begin{array}{l} \cos 4t: -4A_4 - 8B_4 + A_4 = 0 \\ \sin 4t: -4B_4 + 8A_4 + B_4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_4 = B_4 = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos nt: -n^2 A_n - 2nB_n + A_n = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \\ \sin nt: -n^2 B_n + 2nA_n + B_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_n = \frac{2(1-n^2)[(-1)^n - 1]}{\pi n^2 (1+n^2)^2}, B_n = \frac{4n[1 - (-1)^n]}{\pi n^2 (1+n^2)^2},$$

Periodické partikulární řešení dostáváme ve tvaru:

$$v(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3 \cdot 5^2} \sin 3t + \frac{4}{3^2 5^2} \cos 3t + \frac{1}{5 \cdot 13^2} \sin 5t + \frac{12}{5^2 \cdot 13^2} \cos 5t + \dots \right)$$

obecné řešení zadané rovnice pak ve tvaru:

$$y = C_1 e^t + C_2 t e^t + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3 \cdot 5^2} \sin 3t + \frac{4}{3^2 5^2} \cos 3t + \frac{1}{5 \cdot 13^2} \sin 5t + \frac{12}{5^2 \cdot 13^2} \cos 5t + \dots \right), t \in \mathbb{R}$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Definice: DFT je numerický výpočet koeficientů FR obdélník. metodou.

Za podmínky ekvidist. kroku dělení bude:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{resp.} \quad C_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{resp.} \quad C_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

kde N ... celkový počet vstupních hodnot diskrétní fce f

f_k ... hodnota vstupní funkce v bodě k - vektor vstupních hodnot

C_n ... koeficient n -té harmonické

$\left\{ e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \right\}_{k=0}^{N-1}$... bázové vektory tvořící bázi lineárního prostoru fcí

Označme $w = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$, pak $e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = w^{nk}$. Sestavíme matici pro různá n a k :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & \dots & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ w^0 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ | & | & & & \\ w^0 & w^{N-1} & & & w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

\mathbf{W} je tvořena ortogonální soustavou fcí na intervalu $[0, (N-1) \cdot \Delta t]$ $\Delta t = t_{k+1} - t_k$

$$\{C_n\}_{\forall n} = \{F_n\}_{\forall n} = \mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{f} \quad \text{transformace}$$

$$\{f_n\}_{\forall n} = \mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{F} \quad \text{zpětná transformace}$$

$F_{(\text{ast})}$ FT=alg. výpočtu koef. DFT

$$k = 1 \vee \frac{1}{\sqrt{N}} \vee \frac{1}{N}, \quad K = \frac{1}{N} \vee \frac{1}{\sqrt{N}} \vee 1$$

DFT – Vlastnosti matice \mathbf{W}

1. Matice \mathbf{W} je regulární a symetrická, tj. $\exists \mathbf{W}^{-1} : \mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{I}$, $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$
2. Matici \mathbf{W}^{-1} lze vyjádřit pomocí vztahu $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^*$ $w_{kn} = w^{*nk} = \overline{w_{nk}}$
3. Matice \mathbf{W} je unitární tj. $(\mathbf{W}^T)^* = \mathbf{W}^{-1}$ obecně $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$
4. Označíme –li druhý řádek \mathbf{W} : $\mathbf{u}_1 = (w^0, w^1, w^2, \dots, w^{N-1})$, pak každý další bude $\mathbf{u}_k = (w^0, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(N-1)k})$
5. Prvky w^k , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, vektoru jsou kořeny rovnice $z^N - 1 = 0$. Čísla $z = w^k = e^{-\frac{2\pi}{N}ki}$ leží v komplexní rovině na kružnici o poloměru 1 a platí
$$\sum_{k=0}^{N-1} w^{kn} = \begin{cases} N, & \text{pro } n = 0 \\ 0, & \text{pro } n \neq 0 \end{cases}, \quad \prod_{k=0}^{N-1} w^{kn} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$
6. Matice \mathbf{W} je permutační periodická matice 4. stupně:

$$\mathbf{W}^2 = N\mathbf{P}$$

$$\mathbf{W}^4 = N^2\mathbf{I}$$

\mathbf{P} je permutační matice řádu N , $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{I}$

Dvoustranná DFT

Pozn.: Často se můžeme setkat s dvoustrannou definicí DFT

$$\hat{f}_n = C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{resp.} \quad \hat{f}_n = C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

kde N ... celkový počet vstupních hodnot diskrétní fce f

f_k ... hodnota vstupní funkce v bodě k - vektor vstupních hodnot

\hat{f}_n ... koeficient n -té harmonické, hodnota výstupní

N je sudé:

$$k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \qquad n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$$

N je liché:

$$k = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2} \qquad n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$$

Dvourozměrná DFT

Definice: Necht' $x \in \mathbb{R}^k$, (například $x \in \mathbb{R}^2$, tj. $x = (x_1, x_2)$ resp. (x, y)) a necht' $\{\varphi_n(x)\}_{\forall n}$ tvoří úplný ortonormální systém, $\varphi_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^k)$, splňující podmínku, že pro každou fci $f \in L^2(\mathbb{R}^k)$ existuje jednoznačný rozvoj v konvergentní řadu:

$$f(x) = \sum_{\forall n} c_n \varphi_n(x)$$

Řada konverguje v normě L^2 s koeficienty $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int_{x \in D} f(x) \cdot \bar{\varphi}_n(x) \cdot d\mu_x$
Zde $D \subset \mathbb{R}^k$, $d\mu_x$ je míra (objem) elementu x , index $n \in \mathbb{Z}$.

Např.: $k=2$: $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \iint_{x \in D} f(x_1, x_2) \cdot \bar{\varphi}_n(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 = \iint_{x \in D} f(x, y) \cdot \bar{\varphi}_n(x, y) \cdot dx \cdot dy$
Numerický výpočet c_n dvourozměrná DFT

Definice: $c_n = \hat{f}_{uv} = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{M-1} f(x, y) \cdot \exp(-2\pi i(xu + yv)) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{M-1} f_{xy} \cdot w^{xu+yv}$

je-li oblast D obdélník $M \times N$, $n = 0, 1, 2, \dots, (M-1) \cdot (N-1)$, $\varphi_n(x) = e^{i \frac{2\pi}{N} nx}$
řádkový index $u=0, 1, \dots, M-1$, sloupcový index $v=0, 1, \dots, N-1$

Pozn.: Výpočet dvojdimenzionální DFT se provádí ve dvou etapách:

1. jednorozměrná DFT v každém řádku, tj. $F(u, y)$
2. jednorozměrná DFT v každém sloupci, tj. $F(x, v)$ nebo naopak.

DFT - Příklad

Příklad: Necht' diskrétní fce je zadána posloupností $\{f_n\} = \{x_n\}$, $n = 0, 1, \dots, 7$ jako sloupcový vektor pro $N = 8$: $\mathbf{f} = \mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T = (1, 0, 1, 2, 1, 0, -1, -2)^T$.

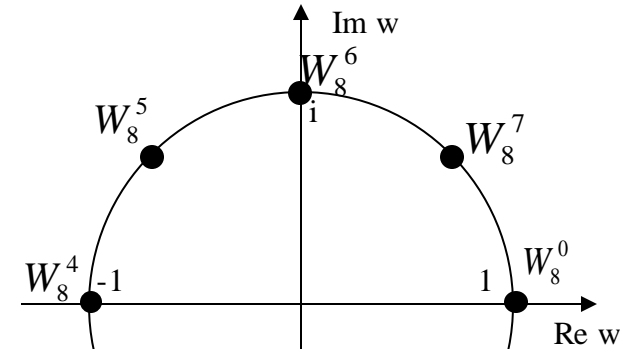
Pro přímou transformaci zvolíme: $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{W}_8 \mathbf{f}$

Prvky $w^{kn} = e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}$ matice bázových vektorů \mathbf{W}_8 se nachází na jednotkové kružnici:

$$w^0 = 1 = -w^4 \quad w^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i) = -w^5$$

$$w^2 = -i = -w^6 \quad w^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) = -w^7$$

$$(w^0, w^1, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6, w^7) = (1, w^1, w^2, w^3, -1, -w^1, -w^2, -w^3)$$



$$\begin{pmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \\ \hat{f}_4 \\ \hat{f}_5 \\ \hat{f}_6 \\ \hat{f}_7 \end{pmatrix} = \mathbf{W}_8 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2,8284 - 4,8284i \\ 2 \\ +2,8284 - 0,8284i \\ 2 \\ +2,8284 + 0,8284i \\ 2 \\ -2,8284 + 4,8284i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \mathbf{W}_8^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 & -1 & -w^1 & -w^2 & -w^3 \\ 1 & w^2 & -1 & -w^2 & 1 & w^2 & -1 & -w^2 \\ 1 & w^3 & -w^2 & w^1 & -1 & -w^3 & w^2 & -w^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -w^1 & w^2 & -w^3 & -1 & w^1 & -w^2 & w^3 \\ 1 & -w^2 & -1 & w^2 & 1 & -w^2 & -1 & w^2 \\ 1 & -w^3 & -w^2 & -w^1 & -1 & w^3 & w^2 & w^1 \end{pmatrix}$$

Zobecněné DFT

Pozn.: Protože všechny výše uvedené systémy jsou ortogonální, pak každý signál v prostoru $l^2(n)$ lze rekonstruovat pomocí **zobecněné**

Fourierovy řady

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n, \text{ kde } c_n = \langle f, \varphi_n \rangle.$$

$\{\varphi_n(x)\}_{\forall n}$ tvoří Walshovu nebo modifik. Walshovu nebo Haarovu nebo Fourier. bázi. (Rademacherova soustava v prostoru $l^2(n)$ tvoří neúplný systém, pak výpočet koeficientů a rekonstrukce funkce je neúplná.)

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{F} = \mathbf{X}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{c}_n$$

Příklad: Zvolme 8 čísel, která budou představovat vektor dat $\mathbf{y} = (3, 1, 6, 2, 3, 7, 9, 5)^T$. Postupně vytvoříme jednotlivé matice bází \mathbf{X} a provedeme transformaci: $\mathbf{c} = \mathbf{X}\mathbf{y}$ a inverzní transformaci: $\mathbf{y} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{c}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
y	3	1	6	2	3	7	9	5
c _{Walsh}	36	-12	-8	0	6	6	-10	6
y _{Walsh}	3	1	6	2	3	7	9	5
c _{MWalsh}	36	-12	0	-8	-10	6	6	6
y _{MWalsh}	3	1	6	2	3	7	9	5
c _{Haar}	36	-12	$-4\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	4	8	-8	8
y _{Haar}	3	1	6	2	3	7	9	5

CVIČENÍ 3,4

<pre>function [R,P]=rad(n) P=[]; N=2^n; for i=0:N-1 p=dec2bin(i,n); P(:,i+1)=bin2dec(p'); end P=[zeros(1,N);P]; R=(-1).^P;</pre>	<pre>function [W,P]=walsh(n) N=2^n; [R,P]=rad(n); P=flipud(P); P=[P(size(P,1),:); P(1:size(P,1)-1,:)]; W=ones(N,N); for i=1:N for j=1:size(P,1) W(i,:)=W(i,:).*(R(j,:).^P(j,i)); end end</pre>	<pre>function [Wm]=walshm(n) N=2^n; [W,P]=walsh(n); for i=1:size(W,2)-1 S(:,i)=W(:,i)+W(:,i+1); end for i=1:N Z(i)=N-nnz(S(i,:)); end for i=1:N Wm(i,:)=W(Z==i,:); end</pre>	<pre>function [H]=haar(n) N=2^n; k=1/N; H=zeros(N); H(1,:)=1; x=k/2:k:(1-k/2); for m=0:n-1 for k=1:2^m H(2^m+k,:)=sqrt(2^m)*(((2*k-2)/(2^(m+1))<x & x<(2*k-1)/(2^(m+1))) - ((2*k-1)/(2^(m+1))<x & x<(2*k)/(2^(m+1)))); end end</pre>	<pre>function [F]=four(n) N=2^n; w=exp(2i*pi/N); for i=1:N for j=1:N F(i,j)=w^((i-1)*(j-1)); end end</pre>
<pre>transform.m n=input('Zadej n pro 2^n bodu:'); N=2^n; T=input('Zadej transformaci: '); if(T=='R') M=rad(n); end if(T=='W') M=walsh(n); end if(T=='Wm') M=walshm(n); end if(T=='H') M=haar(n); end if(T=='F') M=four(n); end % Vygenerovani vektoru x1=0*pi:2*pi/N*3:2*pi; x2=2*pi:2*pi/N*3:4*pi; x3=4*pi:2*pi/N*3:6*pi; f=sin([x1 x2 x3]); % f=[sin(13*x1)+0.8*sin(23*x1)+0.6*sin(33*x1) sin(13*x2)+0.8*sin(23*x2)+0.6*sin(33*x2) sin(13*x3)+0.8*sin(23*x3)+0.6*sin(33*x3)]; % f=[sin(13*x1) 0.8*sin(23*x2) 0.6*sin(33*x3)]; % f=[sin(9*x1) sin(9*x2)+0.8*sin(23*x2) sin(9*x3)+0.8*sin(23*x3)+0.6*sin(37*x3)]; f=f(1:N);</pre>	<pre>figure plot(f); title('Signal') % Transformace c=M*f; figure plot(abs(c(1:N))); title('Spektrum') % Porovnaní s fft cf=fft(f); figure plot(abs(cf(1:N))); title('Spektrum-fft')</pre>	<pre>% Zanesení 10-procentní chyby cerr=c+0.1*max(abs(c))*(rand(N,1)-0.5); figure plot(abs(cerr(1:N))); title('Spektrum zatiz. chybou') % Zpetná transformace (rekonstrukce) chybou zatiz. koef. ferr=M*cerr; figure plot(real(ferr)); title('Signal-chyb. koef.')</pre>	<pre>% Tichonovova regularizace e=2; for i=1:N creg1(i,1)=(cerr(i,1))/(1+0.01*(i^e)); creg2(i,1)=(cerr(i,1))/(1+0.001*(i^e)); creg3(i,1)=(cerr(i,1))/(1+0.0001*(i^e)); end freg1=M*creg1; freg2=M*creg2; freg3=M*creg3; figure; plot(real(freg1));title('Signal-reg 1') figure; plot(real(freg2));title('Signal-reg 2') figure; plot(real(freg3));title('Signal-reg 3')</pre>	

Chyba ve Fourierovských koeficientech

Nechť $f(t)$ splňuje Dirichletovy podmínky a odpovídající FŘ v intervalu $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ je stejnoměrně konvergentní:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

Předpokládejme, že c_n nejsou vypočteny přesně, ale určeny jenom přibližně, např. pomocí numerické metody nebo experimentálně, označíme je c_n^* .

Za předpokladu, že chyby při výpočtu c_n ve smyslu normy L^2 jsou malé, platí:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n - c_n^*|^2 \leq \delta^2 \quad \delta > 0 \text{ nepřesnost určení } c_n$$

V praxi se často vyskytuje úloha rekonstrukce $f(t)$ v bodě t s chybou $\varepsilon(\delta)$ tj. najít funkci f^* tak, aby $|f - f^*| < \varepsilon(\delta)$ kde při $\delta \rightarrow 0$: $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$

Problém však nelze řešit pomocí c_n^* a vztahu $f^*(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n^* e^{int}$

.....nelze provést rekonstrukci $f(t)$

Divergence FŘ při přibližně určených koeficientech

Nechť $\delta > 0$ a konstanta K má tvar : $K = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right]^{\frac{1}{2}}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konverg. δ
Předpokládejme, že chyby v zadání F. koeficientů jsou $|c_n - c_n^*| = \frac{\delta}{nK\sqrt{2}}$
 $n = 1, 2, \dots$ $c_0 - c_0^* = 0$ (tj. stejnosměrná složka je určena přesně)

Za těchto podmínek lze nerovnost charakterizující nepřesnost zadání F. koeficientů v normě L^2 upravit

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n - c_n^*|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c_n^*|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{n^2 K^2} = \frac{\delta^2}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \delta^2$$

Při záměně c_n na c_n^* při výpočtu fčních hodnot v t se dopouštíme chyby: $\varepsilon = \sum_{-\infty}^{\infty} |(c_n - c_n^*) e^{int}|$ a konkrétně v bodě $t=0$: $\varepsilon = \frac{2\delta}{K\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní, pak při libovolném $\delta > 0$ chyba ve výpočtu fční hodnoty v tomto bodě $\varepsilon \rightarrow \infty$ **malé změny v zadání F.**

koeficientů mohou vyvolat libovolně velké změny fčních hodnot v bodě

Tichonovova regularizace

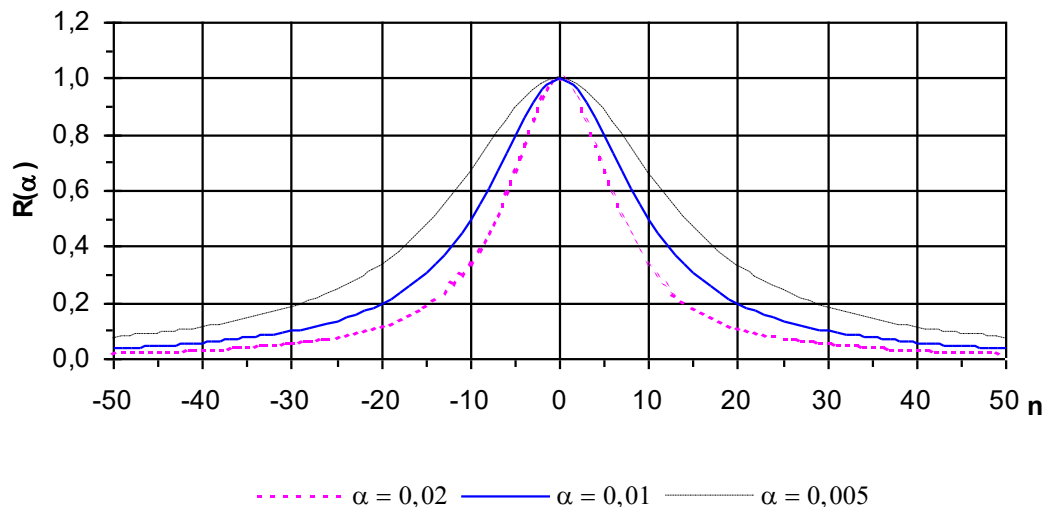
Přibližné řešení úlohy při nepřesně zadaných nebo vypočtených c_n lze sestavit ve tvaru regularizačního operátoru:

$$\tilde{f}_\alpha(t) = R(c_n^*, \delta) = \sum_{\forall n} r(n, \alpha) c_n^* e^{int} = \sum_{\forall n} c_{\alpha n} e^{int}$$

Zde $r(n, \alpha)$ je regularizační činitel, $\alpha(\delta)$ je parametr regularizace.

Ukážeme, že při vhodně zvoleném $r(n, \alpha)$ proces sumace FŘ je stabilní ve smyslu, že malým změnám v zadání c_n v normě L^2 odpovídají malé změny $\tilde{f}_\alpha(t)$ v normě C . Činitel $r(n, \alpha)$ může mít např. tvar

$$r(n, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha n^2}, \text{ resp. obecně } r(n, \alpha, k) = \frac{1}{1 + \alpha n^{1+k}}, \quad k \geq 1$$



Tichonovova věta

Věta (Tichonovova): Necht' $f(t) \in L^2(I)$ je spojitá v intervalu $I \equiv \langle -\pi, \pi \rangle$, pak pro $\forall \delta > 0$ a $\forall \alpha$, které je stejného řádu jako δ , součet řady s koeficienty c_{cn} aproximuje fčn. hodnotu $f(t)$ v bodě t s chybou $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ při $\delta \rightarrow 0$. (Existuje i obecnější Tichonovova věta.)

Důkaz: Naznačíme důkaz za podmínky, že aproximující FŘ bude nahrazena F. polynomem maximální délky $N = n(\delta) = \text{int} \left[\frac{1}{\delta} \right]$ s regul. parametrem $\alpha(\delta) = \delta$. (Případ, kdy $\alpha = \delta \cdot C(\delta)$, $0 < C_1 \leq C(\delta) \leq C_2$ se dokazuje analogicky). Je nutno dokázat, že pro $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, $\delta \leq \delta_0$ v daném bodě t platí nerovnost:

$$\left| f(t) - \tilde{f}_\alpha(t) \right| = \left| f(t) - \sum_{\forall n} c_{cn} e^{int} \right| \leq \varepsilon$$

Jelikož $f(t)$ je spojitá v $I \equiv \langle -\pi, \pi \rangle$ a $0 < r(n, \alpha) \leq 1$, pak lze ukázat, že existuje takové $M > 2$, že

$$\left| f(t) - \sum_{\forall n} c_{cn} e^{int} \right| \leq M \left| \sum_{\forall n} (c_n - c_n^*) r_{cn} e^{int} \right|$$

Úpravou nerovnosti ukážeme, že pro každé konkrétní $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$ tak, že pro $\forall \delta > 0$, $\delta \leq \delta_1(\varepsilon)$:

$$\left| f(t) - \tilde{f}_\alpha(t) \right| = \left| \sum_{\forall n} (c_n - c_{cn}) e^{int} \right| \leq \left| \sum_{\forall n} (c_n - c_{cn}) \right| \leq M \left| \sum_{\forall n} (c_n - c_n^*) r_{cn} \right| \leq \varepsilon$$

Stačí dokázat, že pro $\delta \rightarrow 0_+$: $\left| \sum_{\forall n} (c_n - c_n^*) r_{cn} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c_n^*| r(n, \delta) \rightarrow 0$

V konkrétním bodě $t \in I$ lze zapsat:

$$\left| f(t) - \sum_{n=1}^{n=N} c_{cn} e^{int} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{n=N} (c_n - c_{cn}) e^{int} \right| + \left| \sum_{n=N}^{\infty} c_{cn} e^{int} \right|$$

Jelikož FŘ je v bodě konvergentní, pak zbytek řady pro $n(\delta) \rightarrow \infty$ konverguje k nule. Použitím Cauchyova - Buňakovského (Schwarzovy) nerovnosti a úpravou dostaneme:

$$\left| \sum_{n=1}^{n=N} (c_n - c_{cn}) e^{int} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{n=N} (c_n - c_{cn}) \right| \leq \left[\sum_{n=1}^{n=N} |c_n - c_{cn}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq M \left[\sum_{n=1}^{n=N} |c_n - c_n^*|^2 r^2(n, \alpha) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Pro $n < \frac{1}{\delta}$: $r^2(n, \delta) = \frac{1}{(1 + \delta n^2)^2} < 1$, pak při $\delta \rightarrow 0$:

$$\left| \sum_{n=1}^{n=N} (c_n - c_{cn}) e^{int} \right| \leq M \left[\sum_{n=1}^{n=N} |c_n - c_n^*|^2 r^2(n, \alpha) \right]^{\frac{1}{2}} \leq M [\delta^2 n(\delta)]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

Regul. operátor představuje množinu operátorů závislých na $\alpha(\delta)$.

Obecně optim. regul. operátor lze nalézt minimalizací Tichon. funkcionalu $F_{\alpha} = \|f_n - f_n^*\|^2 + \alpha s^2$ na množině řešení M , $\alpha(\tau)$ fce chyby v zadání F. koeficientů, s^2 je stabilizační operátor:

$$s^2(t) = \int_I \left[g(t) f^2 + p(t) \left(\frac{df}{dt} \right)^2 \right] dt$$

Tichonovova regularizace - Příklad

$n=100$

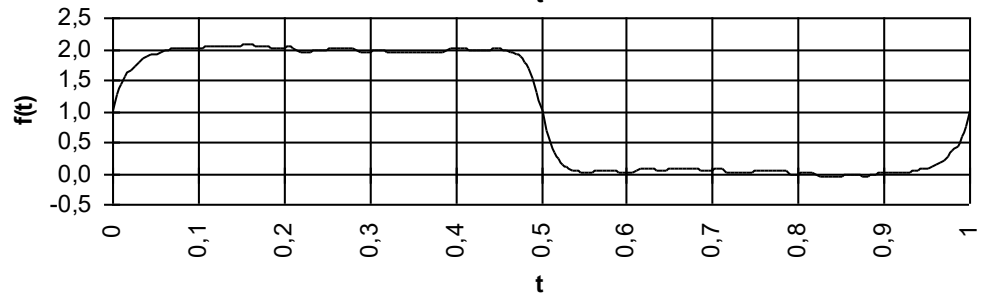
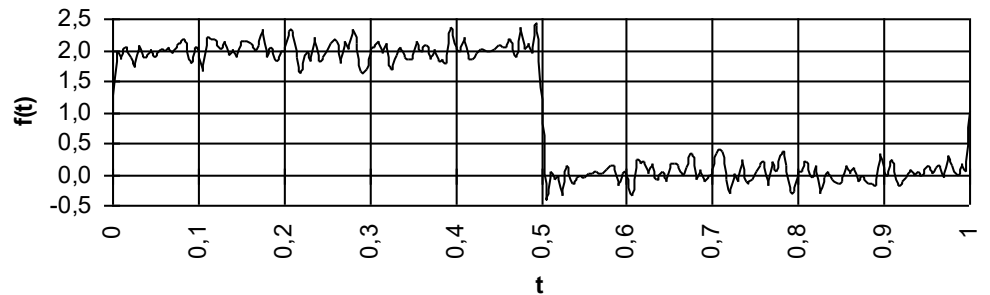
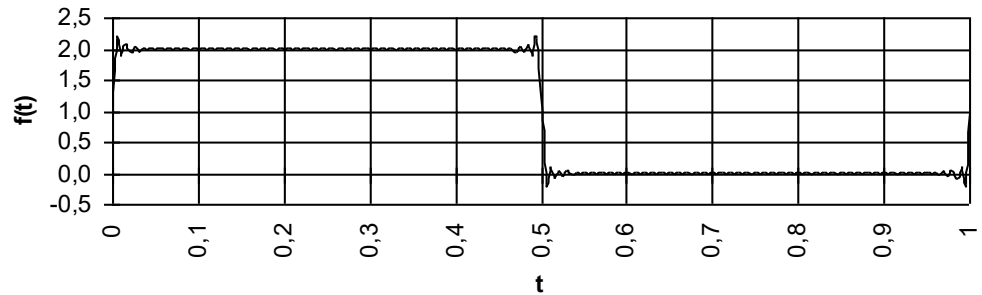
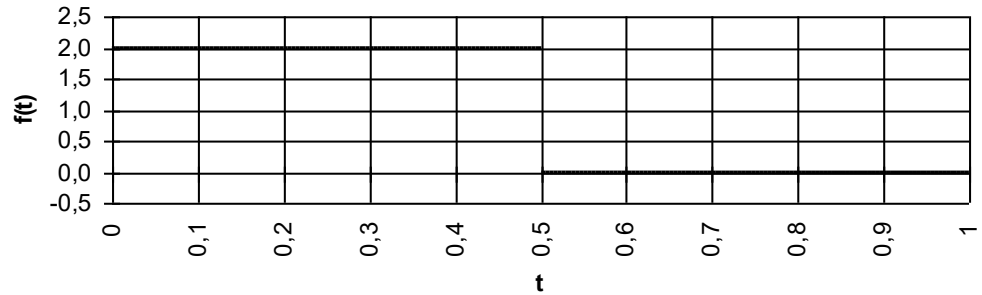
$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in \langle 0; 0.5 \rangle \\ 0, & t \in (0.5; 1) \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{\forall n} C_n e^{i\omega n t}$$

3 % chyba od střední hodnoty F. koef.

$$f(t) = \sum_{\forall n} C_n^* e^{i\omega n t}$$

$$f(t) = \sum_{\forall n} C_n^* e^{i\omega n t} \frac{1}{1 + \alpha n^2} \quad \alpha = 0,01$$



Chyba numerického výpočtu koeficientů FŘ

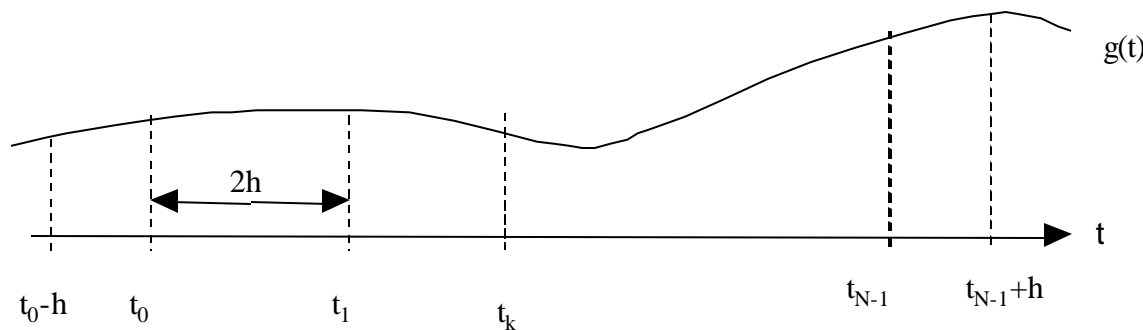
Jaká chyba vznikne v důsledku toho, že koeficienty FŘ počítáme nikoli integrálem ale diskrétně použitím obdélníkové metody?

Chyba numerického integrování obdélníkovou metodou:

Nechť $g(t)$ je spojitá a alespoň 2x diferenc. na intervalu I , popř. periodě T

Rozdělíme interval na N bodů s ekvidist. krokem

$$\Delta t = \frac{T}{N-1}$$

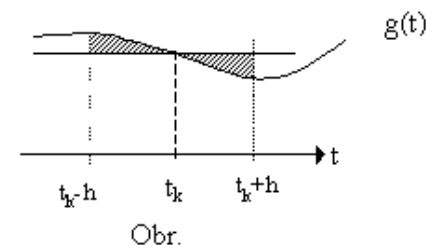


Nechť $\Delta t = 2h$, rozšíříme interval o půl kroku na každou stranu tak, že $t \in [t_0 - h, t_{N-1} + h]$

Nahradíme $g(t)$ sloupcovitou fci tak, aby každý dílčí obdélník měl základnu $d = \Delta t = (t_k + h) - (t_k - h)$ a výšku $g(t_k) = g_k$.

Pak chyba vznikající na každém kroku $\Delta t = 2h$ bude:

$$R(\Delta t) = R(h) = \int_{t_k-h}^{t_k+h} g(t) dt - 2h g_k = G(t_k + h) - G(t_k - h) - 2h g_k$$



Najdeme $R'(h), R''(h)$, pak $R''(h)$ rozšíříme $\frac{h}{h}$:

$$R'(h) = \frac{d}{dh} R(h) = G'(t_k + h) - G'(t_k - h) - (2hg_k)' = g(t_k + h) + g(t_k - h) - 2g_k$$

$$R''(h) = [g'(t_k + h) - g'(t_k - h)] \frac{2h}{2h}$$

Pro $h \rightarrow 0$: $\lim_{h \rightarrow 0} [g'(t_k + h) - g'(t_k - h)] \frac{1}{2h} = g''(\xi)$, $\xi \in [t_k - h, t_k + h]$, pak $R''(h) = g''(\xi) 2h$

Provedeme postupně 2x integrování $R''(h) = g''(\xi) h$ na $[t_k, t_k + h]$:

$$\int_{t_k}^{t_k+h} R''(u) du = \int_0^h R''(u) du = \int_0^h 2g''(\xi)u du \Rightarrow \int_0^h R''(u) du = 2 \int_0^h g''(\xi)u du.$$

$$\int_0^h R''(u) du = R'(h) - R'(0) = R'(h), \quad 2 \int_0^h g''(\xi)u du = 2g''(\xi) \frac{h^2}{2} \text{ pak } R'(h) = g''(\xi)h^2, \quad \xi \in \langle 0, t_k + h \rangle$$

$$\text{Nakonec } \int_0^h R'(u) du = \int_0^h g''(\xi)u^2 du \Rightarrow R(h) - R(0) = R(h) \Rightarrow R(h) = g''(\xi) \frac{h^3}{3} \quad \xi \in [0, t_k + h]$$

$g(t)$ aproximuje přesně fční hodnotu v uzlových bodech $R(0) = 0$, $R'(0) = 0$,
v těchto bodech nevzniká žádná chyba

$$R(\Delta t) = g''(\xi) \frac{h^3}{3} = g''(\xi) \frac{\Delta t^3}{24} \quad \text{chyba vznikající na jednom kroku} \quad \Delta t = 2h$$

Na celém intervalu chybu aproximace zapíšeme jako součet chyb na jednotlivých krocích: $R_N(\Delta t) = \sum_{k=1}^{N-1} R_k(\Delta t)$.

Za podmínky ekvidist. kroků pro maximální absolutní chybu aproximace platí: $\max |R_N(\Delta t)| = (N-1) \max_{\forall \xi} |g''(\xi)| \frac{\Delta t^3}{24}$ $\xi \in [0, T]$, $\Delta t = 2h > 0$

Při numer. výpočtech spojitou derivaci nahradíme diskrétní a provedeme odhad maximální chyby na intervalu měření. Navíc pro $\Delta t = 1$

$$|R_N(\Delta t)| \leq \frac{(N-1)}{24} \max_{\forall k} |\Delta^2 g_k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad \Delta^2 g_k \quad \text{je 2. diference } g$$

Chyba numerického výpočtu F. koeficientů obdélníkovou metodou:

Necht' $f(t) \in L^2[0, T]$ je alespoň 2x diferenc., pak $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega n t} dt$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Necht' $g(t) = f(t) e^{-i\omega n t}$, pak $g'(t) = (f'(t) - i\omega n f(t)) e^{-i\omega n t}$,
 $g''(t) = (f''(t) - 2i\omega n f'(t) - \omega^2 n^2 f(t)) e^{-i\omega n t}$

$$\Delta t = \frac{T}{N-1} \Rightarrow T = (N-1) \cdot \Delta t$$

Odhad max. absolutní chyby aproximace na intervale pro $\Delta t=1$, $\omega = \frac{2\pi}{N-1}$

$$|R_N(\Delta t)| \leq \frac{(N-1)}{24} \max_{\forall k} |\Delta^2 g_k| < \frac{N}{24} \max_{\forall k} |\Delta^2 g_k| \Rightarrow \max |R_N(\Delta t)| = \frac{N-1}{24} \max_{\forall k} |\Delta^2 g_k|.$$

kde

$$\Delta^2 g_k = \left(\Delta^2 f_k - 2i \frac{2\pi n}{N-1} \Delta f_k - \frac{4\pi^2 n^2}{(N-1)^2} f_k \right) \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{(N-1)} k}, \quad n \in \mathbf{Z}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

tedy ***odhad maximální chyby je obecně větší než skutečná chyba***

Důležité: při $N \rightarrow \infty$ absolutní chybu výpočtu c_n lze řádově vyjádřit

$$|R_n| = |c_n - c_n^*| \approx A \cdot n \cdot N^{-2}$$

kde $A > 0$ je reálná konst. nezávislá na n , N , c_n přesný koef. spočtený integrálem,
 c_n^* koef. numer. spočtený obdélník metodou

$|R_n|$ absolutní chyba aproximace při numer. výpočtu koeficientu n -té harmonické.

Při $n \ll N$ (nízké frekvence): $|R_n(\Delta t)| < \frac{A}{N^2}$

Při $n \approx N$: $|R_n(\Delta t)| < \frac{A}{N}$.

Pozorování: Absolutní chyba při výpočtu n -té harmonické je přímo úměrná n ,
 při numer. výpočtu vyšších harmonických se dopouštíme větších chyb.

Chyba numerického výpočtu F.koef. - Příklad

Nechť je daná fce $f(t)=e^t$, $t \in [0,2\pi]$

f je na zadaném intervalu spojitá, diferenc. a můžeme ji rozvinout v FŘ. Budou nás zajímat jen F. koeficienty a odhad chyb při numer. výpočtu.

Vypočteme (přesné) koeficienty FŘ, $T=2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^t \cdot e^{-int} \cdot dt = \left[\frac{e^{(1-in)t}}{2\pi(1-in)} \right]_0^{2\pi} = \frac{(1+in)(e^{2\pi(1-i)} - 1)}{2\pi(1+n^2)} = \frac{(1+in)(e^{2\pi} - 1)}{2\pi(1+n^2)}, \quad g_n(t) = e^{t(1-in)}$$

Vypočteme: $g'_n(t) = (1-in) \cdot e^{t(1-in)}$ $g''_n(t) = (1-in)^2 \cdot e^{t(1-in)} = e^t \cdot e^{-int} \cdot (1-2in-n^2)$

$$\operatorname{Re}(g''_n(t)) = e^t \left[(1-n^2) \cdot \cos nt - 2n \cdot \sin nt \right] \quad \operatorname{Im}(g''_n(t)) = -e^t \left[(1-n^2) \cdot \sin nt + 2n \cdot \cos nt \right]$$

$$|g''_n(t)|^2 = e^{2t} \cdot (1+n^2)^2 \Rightarrow |g''_n(t)| = e^t \cdot (1+n^2) \Rightarrow \max_{t \in (0, 2\pi)} g''_n(t) = e^{2\pi} (1+n^2)$$

Max. abs. hodnota $|g''_n(t)|$ je přímo úměrná n^2 . Tzn. při určení vyšších harmonických se můžeme dopustit větších chyb: $|R_n(t)| \leq \frac{N-1}{24} e^{2\pi} (1+n^2) \cdot \Delta t^3$.

$$\text{Např. } N=101 \quad \Delta t = \frac{2\pi}{100} \Rightarrow (\Delta t)^3 = 8\pi^3 \cdot 10^{-6}.$$

$$\text{Pak } |R_n(t)| \leq \frac{100}{24} e^{2\pi} (1+n^2) \cdot 8\pi^3 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{3} \pi^3 e^{2\pi} (1+n^2) 10^{-4}.$$

Algoritmus FFT (Fast Fourier Transform)

Splitting method - metoda štěpení vybraných vstupních posloupností

Alg. publikován 1965 J.W.Cooleyem a J.W. Tukeyem po názvem Butterfly (motýlek) pro počet vstupních hodnot $N=2^m$, $m \in \mathbf{N}$.

Rozdělením posloupnosti $\{f_n\}$, která má N členů na 2 vybrané posl. o $N/2$ členech lze obraz $\{f_n\}$ rozepsat

$$f_n \leftrightarrow F_n = \hat{f}_n : F_n = \hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ink 2\pi/N} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k w_N^{nk}, \quad k=0,1,2,\dots,N-1, \quad w = w_N = e^{-i2\pi/N}$$

Rozdělíme-li $\{f_n\}$ na členy se sudým indexem $y_k = f_{2k}$, a členy s lichým indexem $z_k = f_{2k+1}$, pak:

$$\hat{f}_n = F_n = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[y_k w_N^{2nk} + z_k w_N^{(2k+1)n} \right] \quad k=0,1,2,\dots,N-1$$

V důsledku symetrie komplex. čísel (koeficientů na kružnici):

$$w_N^{2nk} = w_{N/2}^{nk} \leftrightarrow e^{-i4\pi nk/N} = e^{-i2\pi nk/(N/2)} \quad (\text{obecně } w_N^{pq} \leftrightarrow w_{N/q}^p)$$

platí:
$$F_n = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} y_k w_{N/2}^{nk} + w_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} z_k w_{N/2}^{nk} \quad k=0,1,2,\dots,\left(\frac{N}{2}-1\right)$$

Nazveme posloupnost koeficientů $\{F_n\}$ DFT-polovičního rozsahu.

$$F_n = Y_n + w_N^n Z_n, \quad F_{n+\frac{N}{2}} = Y_{n+\frac{N}{2}} + w_N^{n+\frac{N}{2}} Z_{n+\frac{N}{2}}, \quad n=0,1,2,\dots,\left(\frac{N}{2}-1\right) \quad \begin{array}{l} Y_n = \text{DFT}\{y_k\} \\ Z_n = \text{DFT}\{z_k\} \end{array}$$

Maticový zápis FFT

Dosažením za $w_{\frac{N}{2}} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-i\pi} = -1$ dostáváme důkaz symetrie a vztahy:

$$F_n = Y_n + w_{\frac{N}{2}}^n Z_n \qquad F_{n+\frac{N}{2}} = Y_n - w_{\frac{N}{2}}^n Z_n$$

Princip dělení posl. se opakuje dokud nedostaneme jeden prvek, pak:

$$DFT(f_0) = F_0 = \sum_{k=0}^{k=0} f_0 w_N^0 = f_0$$

Necht' $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$ je vstupní vektor, $\mathbf{F} = (F_0, F_1, \dots, F_{N-1})^T = \text{dft}(\mathbf{f})$

Pak: $\mathbf{F} = \mathbf{W}_N \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{D}_r \\ \mathbf{I}_r & -\mathbf{D}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_N \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ \mathbf{I}_r je jednot. matice řádu $r=N/2$
 $\mathbf{D}_N = \text{diag}(1, w_{2r}^1, w_{2r}^2, \dots, w_{2r}^{r-1}, -1, -w_{2r}^1, -w_{2r}^2, \dots, -w_{2r}^{r-1})$
 $\mathbf{D}_r = \text{diag}(1, w_{2r}^1, w_{2r}^2, \dots, w_{2r}^{r-1})$ $w = e^{-i2\pi/N}$

Další krok: $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{D}_r \\ \mathbf{I}_r & -\mathbf{D}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Z}' \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{N/2} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Z}' \end{pmatrix}$ $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{D}_r \\ \mathbf{I}_r & -\mathbf{D}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'' \\ \mathbf{Z}'' \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{N/2} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'' \\ \mathbf{Z}'' \end{pmatrix}$ $r=N/4$

dílčí posl. znovu rozdělíme na podposl. se sudým a lichým indexem, přeindexujem

$$\mathbf{D}_r = \text{diag}(1, w_{2r}^2, w_{2r}^4, \dots, w_{2r}^{r-2})$$

Pak: $\mathbf{F} = \mathbf{B}_N \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{N/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{N/4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{N/4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{N/4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{N/4} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{f}$

Např. $\mathbf{W}_{16} = \mathbf{B}_{16} \mathbf{B}_8 \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_2$

\mathbf{P} je permutační matice, která je vytvořena při vykonávání postupného liché – sudé přeskupování sloupců jednot. matice.

Vstupní sekvence je nejprve přeskupena pomocí permutační matice \mathbf{P}^T a pak prochází kombinačními stupni $\log_2 N$.

Např.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (F_0, F_4, F_2, F_6, F_1, F_5, F_3, F_7)^T = (F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7)^T$$

Pozn.: Tento proces lze vyjádřit pomocí *Kroneckerova součinu*.

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_N \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{B}_N) (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{B}_{N/2}) (\mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{B}_{N/4}) \cdots (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{B}_2) \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{f} \quad k = \log_2 N$$

kde

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad \text{je řádu } mp \times nq, A \ m \times n, B \ p \times q$$

Konvoluce fcí

Konvoluce je velmi důležitý pojem v teorii IT, který se používá k filtraci (vyhlazování), zkoumání přenosových jevů, řešení inverzních úloh ap.

Lze ukázat, že každá transformace - Laplaceova, Fourierova, Hilbertova atd. je zvláštním případem *konvoluce*. Tedy konvoluce je *operátor* a nejobecnější IT zároveň.

Konvoluce dvou fcí :

Definice: Necht' $f(t)$ a $g(t)$ jsou alespoň po částech spojitě komplex. fce reálné proměnné $t \in (-\infty, +\infty)$. Konvolucí 2 fcí nazýváme fci def. konverg.

konvolučním integrálem $h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = (f * g)(t) = (f * g)$
 τ je integrační proměnná

Jsou-li $f(t)$ a $g(t)$ alespoň po částech spoj. komplex. fce reálné proměnné $t \in [0, \infty)$, pak konvoluce fcí je dána integrálem s proměnnou horní mezí:

$$h(t) = \int_0^{\infty} f(\tau).g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau).g(t-\tau)d\tau$$

Pozn.: Pro $\tau > t$: $f(\tau)g(t-\tau) = 0$ v důsledku principu kauzality (příčina \rightarrow důsledek) $0 < \tau \leq t$

Postačující podmínkou pro konvergenci konv. integrálu je, aby fce byly integrovatelné s kvadrátem na \mathbf{R} , resp. *ohraničenost variace* komplex. fcí reálné proměnné.

Vlastnosti konvoluce

Z vět o integrálech závislých na parametru plyne:

1. $h = f * g$ dvou spojitých fcí $f(t)$ a $g(t)$ na R je fce spojitá
2. linearita (distrib. zákon vzhledem ke sčítání a násobení konstantou):
$$f * (c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 (f * g_1) + c_2 (f * g_2)$$
3. komutativní zákon: $f * g = g * f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau$
 $c f * g = g * c f$
4. $|f * g| \leq |f| * |g|$
5. jsou-li fce f, g **originály** (vzory, předměty), tj. existují-li jejich příslušné integrální obrazy (např. Laplaceův, Fourierův), pak i **konvoluce je originál**, k němuž lze vytvořit integrální obraz
6. věta **o součinu obrazů** (věta o obrazu konvoluce): jsou-li fce f, g originály, tj. existují jejich příslušné integrální obrazy, $F(s), G(s)$ pak **integrální obraz konvoluce $f * g$ (Laplaceův, Fourierův) se rovná součinu jejich obrazů $F(s) \cdot G(s)$** . Zde s je parametr jádra transformace
$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K(s,t)dt, \quad G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)K(s,t)dt, \quad F(s) \cdot G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot K(s,t)dt$$
7. asociativní zákon, který nám dovoluje vytvořit konvoluci 3 a více fcí:
$$(f * g_1) * g_2 = f * (g_1 * g_2) = f * g_1 * g_2$$

Součin obrazů

K důkazu věty o součinu obrazů zavedeme (pro názornost) konkrétně zvolené jádro IT: $K(s,t) = e^{-st}$

pro dvoustr. Laplaceovu transformaci: $s = \operatorname{Re} s + i \operatorname{Im} s = \sigma + i\omega$

pro Fourierovu transformaci: $s = i\omega \quad \sigma, \omega \in R$

Necht' existují dva konvergentní integrály na stejné množině D :

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-st} dt$$

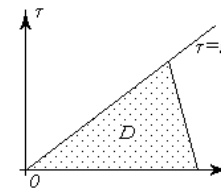
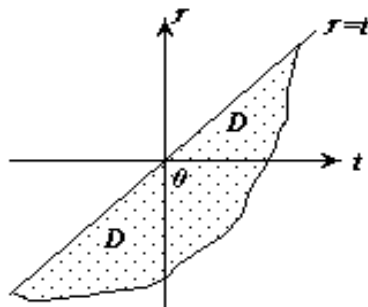
Sestavíme-li součin těchto integrálů na této množině, dostaneme:

$$F(s) \cdot G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Odtud plyne přímo Borelova věta pro jednostr. Laplaceovu transformaci. Při důkazu dojde jen ke změně dolní meze a tedy i integrační oblasti D .

Oblast D za podmínky principu kauzality, tj. $t > \tau$



Laplaceova transformace jako konvoluce fcí

Zavedeme do konvolučního integrálu $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = (f * g)(t)$ substituci:

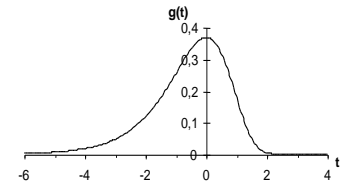
$$e^t = s, t \in (-\infty, +\infty) \quad e^{-\tau} = x, \tau \in (-\infty, t) \Rightarrow d\tau = -\frac{dx}{x}, x \in (0, \infty)$$

a) necht' jádro konvolučního integrálu bude ve tvaru $g(t) = e^t \cdot \exp(-e^t)$, pak:

$$g(t-\tau) = e^{t-\tau} \cdot \exp(-e^{t-\tau}) = \exp(-e^t \cdot e^{-\tau}) \cdot e^t \cdot e^{-\tau}$$

po zavedení uvedené substituce dostaneme:

$$g(t-\tau) \stackrel{\text{ozn}}{=} \varphi(s, x) = sx \cdot e^{-sx} \quad t \rightarrow \pm\infty \dots g(t) \rightarrow 0$$



Obr.3.

b) necht' konvoluce $h(t)$ bude ve tvaru $h(t) = e^t \cdot \phi(e^t)$, pak $h(t, s) = s \cdot F(s)$

c) originál označíme: $f(\tau) = f^*(e^{-\tau}) \stackrel{\text{ozn}}{=} u(x)$

Dosadíme teď substituce a uvedené vztahy do konvolučního integrálu:

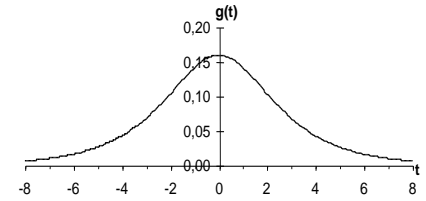
$$sF(s) = \int_{-\infty}^0 u(x) \cdot x \cdot s \cdot e^{-sx} \frac{dx}{-x} \quad \text{po úpravě dostaneme:}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} u(x) \cdot e^{-sx} \cdot dx \quad \dots \text{Laplaceův integrál}$$

Stieltjesova transformace jako konvoluce fcí

Obdobně při zavedení substituce $e^t = s$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $e^\tau = x$, $\tau \in (-\infty, t)$ a jádra $g(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\cosh(t/2)}$ do konv. integrálu dostaneme Stieltjesovu transformaci:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{u(x)}{s+x} dx$$



2 Obr.4.

a) necht' jádro konvolučního integrálu bude ve

tvaru $g(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\cosh(t/2)}$, pak $g(t-\tau) = \frac{1}{2\pi \cosh\left(\frac{t-\tau}{2}\right)} = \frac{1}{2\pi \left[\exp\left(\frac{t-\tau}{2}\right) + \exp\left(\frac{-t+\tau}{2}\right) \right]}$

a po zavedení uvedené substituce $g(t-\tau) = \varphi(s, x) = \frac{1}{\pi \left[s^{1/2} x^{-1/2} + s^{-1/2} x^{1/2} \right]} = \frac{\sqrt{sx}}{\pi(s+x)}$

$$t \rightarrow \pm\infty \dots g(t) \rightarrow 0$$

b) konvoluce $h(t)$ bude ve tvaru $h(t) = e^{t/2} \cdot \phi(e^t)$

a po zavedení uvedené substituce $h(s) = s^{1/2} F(s)$

c) pro originál zavedeme označení: $f(\tau) = \pi e^{\tau/2} \varphi(e^{-\tau}) = \pi x^{1/2} \varphi(x)$

dosazením subst. a vztahů

$$h(s) = \sqrt{s} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \pi \varphi(x) \cdot x^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{sx}}{\pi(s+x)} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \varphi(x) \cdot \frac{\sqrt{s}}{s+x} dx$$

po úpravě dostaneme: $F(s) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{s+x} dx$ Stieltjesův integrál

Filtrační vlastnost konvoluce fcí

Pozn.: Důležitou vlastností konvolučního integrálu při vhodné volbě jádra $g(t)$ bude zmenšení oscilace fce $f(t)$ (originálu, předmětu ,vzoru), tj. výsledná fce $h(t)$ mění své znaménko na intervalu $(-\infty, +\infty)$ resp. $(0, +\infty)$ **nejvíce tolikrát**, kolikrát mění své znaménko $f(t)$.

Jak ukázal Schöenberg I.J. 1947-1948, $g(t)$ bude takovým jádrem \Leftrightarrow

$$g(t) \in L(R), \int_R g(t) dt = 1 \quad \text{a má tvar:} \quad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} [E(s)]^{-1} e^{st} ds$$

kde γ je libovolná vertikální přímka, která se nachází v oboru absolutní konvergence dvoustr. Laplaceova integrálu, nazývaného též Fourierův - Laplaceův integrál, tj. $s \in C, \text{Re } s \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Při některých omezeních např.

$$\alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 > 0 \quad \text{může být}$$

Fce zpětné transf. resp. reprodukční fce má tvar $E(s) = e^{bs} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_k}\right) \cdot \exp\left(\frac{s}{a_k}\right)$
(Titchmarsh E.C., 1951)

Zde $b, \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou reálná čísla, z $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ lze sestavit konverg. čísel. řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2}$

Vlastnosti uvedených jader jsou:

- 1) $g(t) \geq 0, \quad \forall t \in R$
- 2) $\int_R g(t) dt = 1$
- 3) $\int_R g(t)(t-b) dt = 0 \Rightarrow b = \int_R t \cdot g(t) dt \dots$ stř. hod
- 4) $\int_R g(t)(t-b)^2 dt = \sum_{\forall k} a_k^{-2} < \infty$...disperze

Z těchto vlastností plyne, že $g(t)$ má pravděp. charakter a je fcí hustoty rozdělení pravděpodobnosti. Tento typ jader patří ke třídě tzv. „konečných“ jader, jestliže $E(s)$ je polynom stupně n s reálnými kořeny. Základní fce s jejíž pomocí lze obdržet téměř všechna jádra je :

$$g(t) = \begin{cases} e^t, & t \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Konvoluce fcí – Příklad 1

Příklad: Určete konvoluci fcí $f(t) = e^t$, $g(t) = t$, $t \geq 0$.

Řešení: Obě fce jsou spojité pro $t > 0$ a mají ohraničený růst. Pro ověření komutativního zákona výpočet provedeme pro $(f * g)$ a $(g * f)$.

$$1. (f * g)(t) = (e^t * t) = \int_0^t e^\tau \cdot (t - \tau) d\tau = \left[e^\tau \cdot (t - \tau) + e^\tau \right]_0^t = e^t - t - 1.$$

$$2. (g * f)(t) = (t * e^t) = \int_0^t \tau \cdot e^{t-\tau} d\tau = e^t \left[-\tau \cdot e^{-\tau} - e^{-\tau} \right]_0^t = e^t - t - 1.$$

Integrály jsou v obou případech počítány metodou per partes.

Pozn.: L-obraz konvoluce $(e^t * t)$, $t \geq 0$ bude na základě **věty o součinu obrazů** :

$$\mathbf{L}\{e^t * t\} = \mathbf{L}\{e^t\} \cdot \mathbf{L}\{t\} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2}, \quad \text{Re } s > 1.$$

Konvoluce fcí – Příklad 2

Příklad: Necht' $f(t) = \sin(2t) \cdot \eta(t)$, $g(t) = \eta(t)$... Heavisideova fce

Řešení: Konvoluce dvou fcí f a g :

$$(f * g)(t) = \int_0^t \sin(2\tau) \eta(t - \tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot \sin 2(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t), \quad t \geq 0.$$

Pozn.: Zkontrolujeme výsledek použitím věty o součinu obrazů. Víme, že

$$\mathbf{L}\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{Res} = \sigma > 0, \quad \mathbf{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad \text{Res} = \sigma > 0,$$

pak

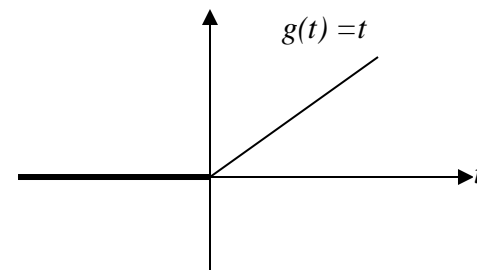
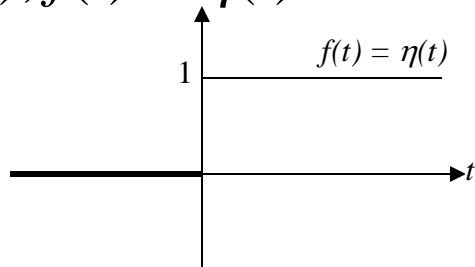
$$\mathbf{L}\{h(t)\} = \frac{2}{(s^2 + 4)s}, \quad \text{Res} = \sigma > 0.$$

Pomocí zpětné L – transformace dostaneme

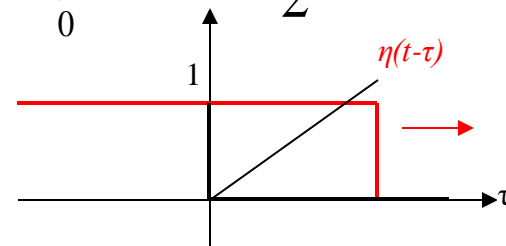
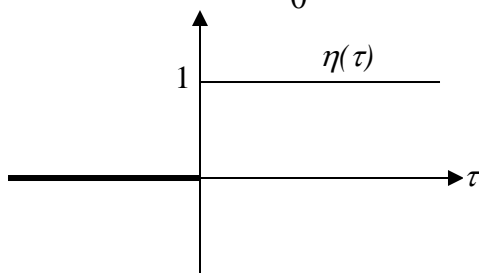
$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 4)}\right\} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t), \quad t \geq 0.$$

Konvoluce fcí – Příklad 3

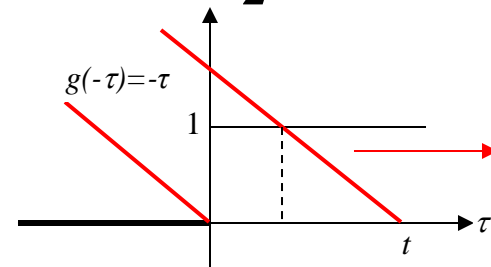
Příklad: Necht' $g(t) = t \cdot \eta(t)$, $f(t) = \eta(t)$.



Řešení: 1. $h(t) = (g * f)(t) = (t * \eta)(t) = \int_0^t \tau \cdot \eta(t - \tau) d\tau = \int_0^t \tau \cdot 1 d\tau = \frac{t^2}{2}$.



2. $h(t) = (f * g)(t) = (\eta * t)(t) = \int_0^t \eta(\tau) \cdot (t - \tau) d\tau = \int_0^t 1 \cdot (t - \tau) d\tau = \frac{t^2}{2}$



Konvoluce fcí – Příklad 4

Příklad: Necht' $g(t) = t \cdot \eta(t)$, $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1] \end{cases}$.

Řešení:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot (t - \tau) d\tau = \int_0^{t < 1} 1 \cdot (t - \tau) d\tau + \int_{t < 1}^1 1 \cdot (t - \tau) d\tau + \int_1^{t > 1} 0 \cdot (t - \tau) d\tau \Rightarrow$$

$$h_1(t) = \int_0^{t < 1} 1 \cdot (t - \tau) d\tau = \frac{t^2}{2}, \quad t \in [0,1),$$

$$h_2(t) = \int_0^{t < 1} 1 \cdot (t - \tau) d\tau + \int_{t < 1}^1 1 \cdot (t - \tau) d\tau = \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2} - t^2 + \frac{t^2}{2} = t - \frac{1}{2}, \quad t \geq 1$$

Výsledek: $h(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & t \in [0,1) \\ t - \frac{1}{2}, & t \geq 1 \end{cases}$

Pozn.: Výsledek ověříme na základě **věty o součinu obrazů**:

$$L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re } s > 0$$

$$L\{f\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-s}$$

věta o posunutí doprava

$$L\{g\} = L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

věta o derivování obrazu

$$L(h(t)) = L\{(f * g)\} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-s} \right) \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^3} e^{-s} \quad \text{Re } s > 0$$

věta o součinu obrazu

$$h_1(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) = \frac{t^2}{2}, \quad t \geq 0,$$

$$h_2(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^3} e^{-s}\right) = \frac{(t-1)^2}{2}, \quad t \geq 1$$

zpětná transformace

Konvoluce posloupností

Obecně konvoluce dvou posloupností vychází ze součinu Laurent. řad. Nejdříve rozebereme případ : $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$, pro $n = 0, 1, 2, \dots$

Dvě regulární fce $f(z)$, $g(z)$ lze rozvinout v dvě konvergentní mocninné řady na stejné množině M a se středem v bodě z_0 :

$$f(z) = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad g(z) = B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

zde $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ jsou posl. tvořené koeficienty mocn. řad.

V oboru konvergence, tj. pro $z \in M : |z - z_0| < r$ lze vytvořit součin těchto

dvou řad: $f(z) \cdot g(z) = A(z) \cdot B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

Koeficienty c_n se vypočtou:

$$c_0 = a_0 b_0;$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0;$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0;$$

$$\dots$$
$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \cdot b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} \cdot b_k, \quad n - k \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Fce $f(z) = A(z)$, $g(z) = B(z)$

chápeme jako obrazy posl.

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, a

$(z - z_0)^n$ jako jádro Laur. IT

Konvoluce posloupností

Obdobně můžeme vytvořit součin dvou Laurent. řad se stejným středem a konvergentních na stejném mezikruží, např. při $z_0 = 0$ pro $r_1 < |z| < r_2$

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^n \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \cdot z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot z^n$$

c_n se počítají obdobně: $c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} \cdot b_k \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

tedy $\left(\dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \right) \left(\dots + \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot z^n$

$$c_0 = \dots + a_{-2} b_2 + a_{-1} b_1 + a_0 b_0 + a_1 b_{-1} + a_2 b_{-2} + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} \cdot b_k$$

$$c_{-1} = \dots + a_{-2} b_1 + a_{-1} b_0 + a_0 b_{-1} + a_1 b_{-2} + a_2 b_{-3} + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-1-k} \cdot b_k$$

$$c_1 = \dots + a_{-2} b_3 + a_{-1} b_2 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{1-k} \cdot b_k$$

Definujeme-li: $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^{-n}$, $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^{-n}$ (viz. jednod. Z-transformace),
konvoluce dvou posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ bude posl. koef. $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \cdot b_k$ $|z| > 0$

Definice: Posloupnost koeficientů $\{c_n\}$, $n=0,1,2,\dots$ v uvedeném vztahu se nazývá *konvolucí dvou posloupností* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Zapisujeme:

$$\{(a * b)_n\}_{\forall n} = \{c_n\}_{\forall n}, \quad c_n = (a * b)_n$$

Pozn.: Tedy **konvoluce dvou posloupností je posloupnost!!!**

Konvoluce posloupností–součin obrazů, výpočet

Obecnější definice je na základě Laurentovy řady:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^n \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \cdot z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot z^n$$

Věta: o součinu obrazů

Nechť fce $A(z)$, $B(z)$ jsou obrazy posl. $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$, a $C(z) = \sum_{\forall n} c_n \cdot z^n$ je obrazem posl. $\{c_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ pak platí, že **obraz konvoluce**, tj. obraz posl. $\{c_n\}$, se rovná **součinu obrazů posloupností** $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ $C(z) = A(z) \cdot B(z)$.

Výpočet: Nechť $\{a_n\} = (\dots, 0, 0, a_0, a_1, \dots, a_{M-1}, 0, \dots)$ má M členů,
 $\{b_n\} = (\dots, 0, 0, b_0, b_1, \dots, b_{N-1}, 0, \dots)$ má N členů,
 pak $\{c_n\}$ bude mít $M + N - 1$ členů (ostatní budou nulové).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M-1} & a_{M-2} & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_{M-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N-1} & b_{N-2} & \dots & b_1 & b_0 \\ 0 & b_{N-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b} - \text{slop. vektory tvořené } \{c_n\}, \{b_n\}, \{a_n\} \\ \mathbf{A} - \text{matice typu } (M+N-1, N) \text{ tvořená } \{a_n\}, \\ \mathbf{B} - \text{matice typu } (M+N-1, M) \text{ tvořená } \{b_n\}, \end{array}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$$

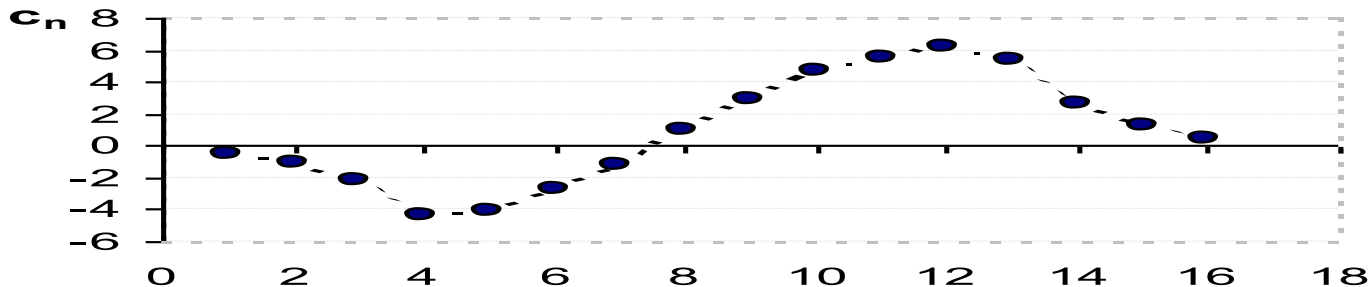
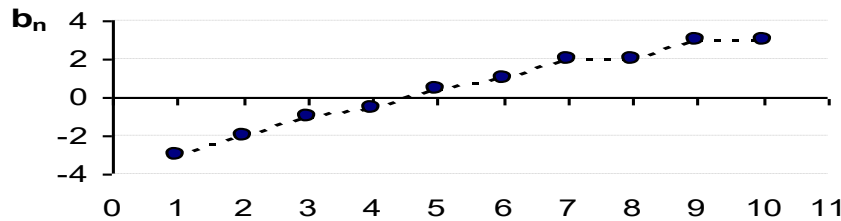
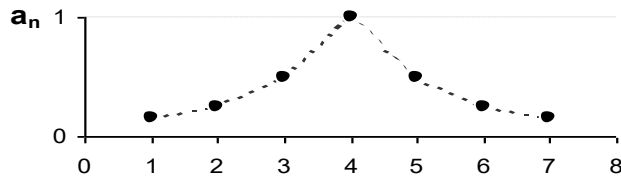
Konvoluce posloupností – příklad

$\{a_n\}=(0.15, 0.25, 0.5, 1.0, 0.5, 0.25, 0.15)$ má 7 členů,

$\{b_n\}=(-3.0, -2.0, -1.0, -0.5, 0.5, 1.0, 2.0, 2.0, 3.0, 3.0)$ má 10 členů
(ostatní členy jsou nulové),

$\{c_n\}$ má $10 + 7 - 1 = 16$ členů (ostatní budou nulové):

$\{c_n\}=(-0.45, -1.05, -2.15, -4.325, -4.05, -2.725, -1.15, 1.00, 2.925, 4.75, 5.575, 6.15, 5.30, 2.55, 1.20, 0.45)$.



Cyklická konvoluce posloupností

Chceme-li provést výpočet pomocí periodické konvoluce, pak je nutno obě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, upravit tak aby obě posloupnosti měly stejnou délku $N = N_1 + N_2 - 1$, resp. $N \geq N_1 + N_2 - 1$

Doplníme $\{a_n\}$, $\{b_n\}$: $a_n = \begin{cases} a_n, & n = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1 \\ 0, & n = N_1, N_1 + 1, \dots, N - 1 \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1 \\ 0, & n = N_2, N_2 + 1, \dots, N - 1 \end{cases}$

Místo $(a * b)_n$ značíme cyklickou konvoluci $(a \otimes b)_n$

Diskrét.konvoluce ($y = f * h$) lze zapsat ve tvaru: $y_n = \sum_{\forall k} h_k f_{n-k} = \sum_{\forall k} f_k h_{n-k}$, $n-k \geq 0$

kde $\{f_n\}_{\forall n}$ je posl. reprezentující vstupní signál f , obsahuje N prvků,

$\{y_n\}_{\forall n}$ je posl. reprezentující výstupní signál y ,

$\{h_n\}_{\forall n}$ je posl. reprezentující diskretní časovou charakteristiku h -filtr.

Maticový tvar diskrét.konvoluce bude $\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}$, zde matice \mathbf{H} je dolní

trojúhelník. řádu $N \times N$:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = (f_0, f_1, \dots, f_N) = f^T$$

$$\mathbf{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_N) = y^T$$

Diskrét.dekonvoluce je operace nalezení vstupního signálu $f: \mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$ (nelze ($f = y * h$))

CVIČENÍ 5

```
%%%%%%%%%%%%%%  
% Algoritmus rychle Fourierovy transformace (prime) zalozeny na jejim maticovem zapisu vvvv %  
%%%%%%%%%%%%%%  
function X=myfft(x);  
% Jestlize je x radkovy vektor, bude preveden na sloupcovy  
[n1,n2]=size(x);  
if n2>1; x=rot90(x,-1); OK=1;  
else OK=0;  
end;  
  
N=length(x); n=log2(N);  
  
% Vytvoreni permutacniho vektoru  
pt=(1:N)';  
i_odd=(1:N/2)*2-1; % liche koeficienty  
i_even=(1:N/2)*2; % sude  
for i=1:n-1  
    m=2^(i-1); K=N/(2*m);  
    pt_odd=reshape(pt(i_odd),K,m)  
    pt_even=reshape(pt(i_even),K,m)  
    pt=reshape([pt_odd;pt_even],N,1)  
end;  
  
% Prenasobovani dilcimi maticemi  
X=x(pt);  
for i=1:n  
    K=2^i; m=N/K; % m je pocet bloku B na diagonale, K je rad bloku B  
    w=exp(2i*pi/K);  
    D=diag(w.^(0:-1:(K/2-1))); % diagonal. matice s prvky w  
    I=eye(K/2); % Jednotkova matice  
    B=[[I,D];[I,-D]]; % Blok B  
    V=diags(B,m); % Matice sestavena z m bloku B  
    X=V*X;  
end;  
if OK; X=rot90(X); end;
```

CVIČENÍ 5

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Algoritmus rychle Fourierovy transformace (zpetne) zalozeny na jejim maticovem zapisu
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function x=myifft(X);
% Jestlize je x radkovy vektor, bude preveden na sloupcovy
[n1,n2]=size(X);
if n2>1; X=rot90(X,-1); OK=1;
else OK=0;
end;
N=length(X);n=log2(N); % n...pocet urovni

% Vytvoreni permutacniho vektoru pt
pt=(1:N)';
i_odd=(1:N/2)*2-1; % i_odd..liche indexy
i_even=(1:N/2)*2; % i_even..sude indexy
for i=1:n-1
    m=2^(i-1);
    K=N/(2*m);
    pt_odd=reshape(pt(i_odd),K,m); % preusporadani prvku
    pt_even=reshape(pt(i_even),K,m);
    pt=reshape([pt_odd;pt_even],N,1);
end;

% Prenasobovani dilycimi maticemi
x=X;
for i=n:-1:1
    K=2^i; m=N/K; % m je pocet bloku B na diagonale, K je rad bloku B
    w=exp(2i*pi/K);
    D=diag(w.^((0:1:-(K/2-1)))); % Diagonalni matice s prvky w
    I=eye(K/2); % Jednotkova matice
    B=[[I,D];[I,-D]]; % Blok B
    V=diags(B,m); % Matice sestavena z m bloku B
    x=V*x;
end;
x=x(pt);
x=(1/N)*x;
if OK; x=rot90(x); end;
```

Konvoluce v dig. zprac. obrazu

```
%% Gauss.zasumeni
clear
A=imread('TatraA.jpg'); % A=imread('TatraC.jpg');

%F1=[2 4 5 4 2; 4 9 12 9 4; 5 12 15 12 5; 4 9 12 9 4; 2 4 5 4 2]/159;
% A1(:,1)=conv2(A(:,1),F1);
% A1(:,2)=conv2(A(:,2),F1);
% A1(:,3)=conv2(A(:,3),F1);
% A(1:size(A,1),1:size(A,2),1)=A1(1:size(A,1),1:size(A,2),1);
% A(1:size(A,1),1:size(A,2),2)=A1(1:size(A,1),1:size(A,2),2);
% A(1:size(A,1),1:size(A,2),3)=A1(1:size(A,1),1:size(A,2),3);

for k=1:size(A,3)
    for j=1:size(A,2)
        for i=1:size(A,1)
            A(i,j,k)=double(A(i,j,k))*195/255+120*(rand(1,1)-0.5);
        end
    end
end
% A=double(A)*195/255+120*(rand(size(A,1),size(A,2),size(A,3))-0.5);

imwrite(A,'TatraAsum.jpg','Quality',100);

%% Filtrace
clear A1;

%F1=[1 1 1; 1 1 1; 1 1 1]/9;
%F1=[1 2 1; 2 4 2; 1 2 1]/16;
F1=[1 4 6 4 1; 4 16 24 16 4; 6 24 36 24 6; 4 16 24 16 4; 1 4 6 4 1]/256;

A1(:,1)=conv2(A(:,1),F1);
A1(:,2)=conv2(A(:,2),F1);
A1(:,3)=conv2(A(:,3),F1);

A(1:size(A,1),1:size(A,2),1)=A1(1:size(A,1),1:size(A,2),1);
A(1:size(A,1),1:size(A,2),2)=A1(1:size(A,1),1:size(A,2),2);
A(1:size(A,1),1:size(A,2),3)=A1(1:size(A,1),1:size(A,2),3);

imwrite(A,'TatraAfilt.jpg','Quality',100);
imwrite(A,'TatraCfilt.jpg','Quality',100);

%% Detekce hran
clear
A=imread('TatraA.jpg'); % A=imread('TatraC.jpg');

F1=[0 1 0; 1 -4 1; 0 1 0]; % +128 % Posun
%F1=[1 1 1; 1 -8 1; 1 1 1];

clear A1;
A1(:,1)=conv2(A(:,1),F1);
A1(:,2)=conv2(A(:,2),F1);
A1(:,3)=conv2(A(:,3),F1);

A(1:size(A,1),1:size(A,2),1)=A1(1:size(A,1),1:size(A,2),1);
A(1:size(A,1),1:size(A,2),2)=A1(1:size(A,1),1:size(A,2),2);
A(1:size(A,1),1:size(A,2),3)=A1(1:size(A,1),1:size(A,2),3);

imwrite(A,'TatraAhran.jpg','Quality',100);
```



CVIČENÍ - 2D konvoluce

Naprogramuj 2D konvoluci a použij této konvoluce s uvedenými maskami k odšumění obrazu a detekci hran

Fourierova řada vs. Fourierova transformace

Vztah mezi Fourier. řadou a dvojným Fourierovým integrálem:

$$\text{FŘ: } f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega_n t}, \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad t \in [\alpha-L, \alpha+L],$$

zde $\omega_n = 2\pi n/T$, α je střed periody, L je půlperiody, $T=2L$

Zaměníme v integrálu proměnnou t za x , tj. $t \equiv x$ na intervalu $[\alpha-L, \alpha+L]$, pak integrál pro výpočet koeficientů bude:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{-i\omega_n x} dx$$

Dosadíme poslední integrál do FŘ:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{-i\omega_n x} e^{i\omega_n t} dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{i\omega_n (t-x)} dx$$

Fourierova transformace

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{i\omega_n(t-x)} dx$$

Platí: $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \pi/L$, pak poslední vztah přepíšeme:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2L\pi} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{i\omega_n(t-x)} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta\omega \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{i\omega_n(t-x)} dx.$$

Za podmínky $T \rightarrow \infty \Rightarrow L \rightarrow \infty$ je zřejmě $\Delta\omega \rightarrow 0$, sumace v posledním vztahu přejde v integrál:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta\omega \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{i\omega_n(t-x)} dx \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega(t-x)} dx$$

Fourierova transformace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega(t-x)} dx \quad \dots \text{dvojný Fourier. integrál v komplex. tvaru}$$

Podmínky pro platnost tohoto vztahu :

1. Fce $f(t)$ je absolutně integrovatelná pro $t \in \mathbb{R}$

2. Fce je po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci $f'(t)$.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] d\omega = \begin{cases} f(t) & \text{v bodech spojitosti} \\ \frac{1}{2} [f(t_+) + f(t_-)] & \text{v bodech nespojitosti} \end{cases}$$

$$f(t_+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} f(t + \varepsilon), \quad f(t_-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} f(t - \varepsilon)$$

Fourierova transformace - Definice

Definice: Necht' fce $f(t)$ splňuje výše uvedené podmínky $t \in \mathbb{R}$, pak *dvojný Fourier. integrál v komplexním tvaru* je dán vztahem $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega(t-x)} dx$

Definice: Necht' fce $f(t)$ je absolutně integrovatelná, $f(t), f'(t)$ jsou po částech spojitě pro $t \in \mathbb{R}$, pak nazýváme fci

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

komplexním Fourierovým obrazem fce f (originál, předmět).

Definice: Zobrazení, které předmětu $f(t), t \in \mathbb{R}$ přiřazuje Fourier. obraz $F(i\omega)$ nazýváme *Fourierovou transformací* a značíme ji F , tedy obraz $F = Ff$.

Definice: *Zpětná Fourier. transformace* za podmínky, že existuje konvergenční podmínky, dvojný Fourierův integrál je realizována vztahem $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$

Fourierova transformace přímá a zpětná

Označíme-li vnitřní integrál jako fci proměnné $\omega \in \mathbb{R}$, pak

přímá Fourierova transformace:
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathbf{F}\{f\}$$

Zápis dvojného Fourierova integrálu se pak zjednoduší,

zpětná Fourierova transformace:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \mathbf{F}^{-1}\{F\}$$

Zpravidla se používá fce definovaná na imaginární ose $S(\omega) = F(i\omega)$.

Fourierův obraz $F(i\omega)$ se nazývá též spektrální fce nebo spektrální hustota originálu f a charakterizuje spojité spektrum funkce $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

- hodnota $|F(i\omega)|$ tvoří *amplitudovou spektrální hustotu*,
- $\varphi = \arg F(i\omega)$ (resp. $-\arg F(i\omega)$) je *fázová spektrální hustota*, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Pozn.: Porovnáním Fourier. a jednostr. Laplac. transformace vidíme, že def. oborem f v případě FT je celá osa \mathbb{R} místo kladné poloosy \mathbb{R}_+ u LT. Zapišeme-li parametr $s = \operatorname{Re} s + i \cdot \operatorname{Im} s = \sigma + i \cdot \omega$, pak pro FT $\operatorname{Re} s = \sigma = 0$.

Fourierův integrál v reálném oboru

Nechť fce $f(t)$ je reálná, $f \in L^2(\mathbb{R})$. Ve vztahu platném pro všechna t , v němž $f(t)$ a $f'(t)$ jsou spojité, oddělíme imaginární a reálnou část:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega(t-x)) dx + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega(t-x)) dx$$

Provedeme změnu pořadí integrace:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega(t-x)) d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega(t-x)) d\omega$$

Jelikož fce $\cos(\omega(t-x))$ je sudou fci proměnné ω , je integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega(t-x)) d\omega = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} \cos(\omega(t-x)) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \cos(\omega(t-x)) d\omega$$

Fce $\sin(\omega(t-x))$ je lichou fci proměnné ω , pak $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega(t-x)) d\omega = 0$

Pak dvojný FI v reálném tvaru: $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega(t-x)) dx$

Zpětná Fourierova transformace v reál. oboru

Platí: $\cos(\omega(t - x)) = \cos(\omega t)\cos(\omega x) + \sin(\omega t)\sin(\omega x)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega t) \cos(\omega x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega t) \sin(\omega x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\omega t) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx . \end{aligned}$$

Zavedeme-li označení: $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$, $b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$,

pak
$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

což lze vyjádřit
$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega$$

kde amplituda a fáze jsou dány obdobně jako u FŘ:

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = -\arg F(i\omega), \quad \varphi(\omega) \in (-\pi, +\pi]$$

Vztah popisuje rozložení fce $f(t)$ pro $t \in (-\infty, +\infty)$ na harmonické kmity, jejichž úhlová frekvence se mění spojitě od 0 do ∞ .

Princip symetrie

Porovnáme-li vztahy pro přímou a pro zpětnou FT, vidíme, že se liší jednak násobnou konstantou, která nemá vliv na konvergenci integrálu a jednak znaménkem v exponentu jádra transformace.

Definujeme-li Four. obraz: $S(\omega) = F(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt,$

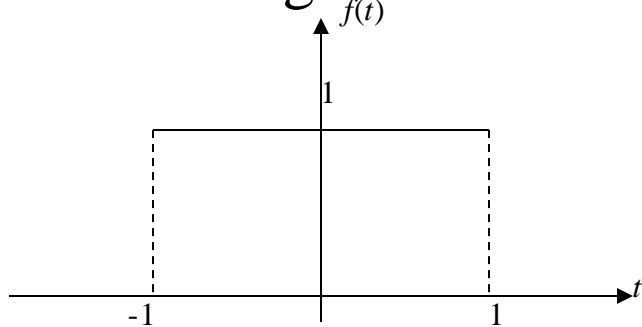
pak pro zpětnou transformaci platí: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$

Je evidentní, že mezi těmito vzorci existuje typická symetrie mezi originálem a jeho obrazem:

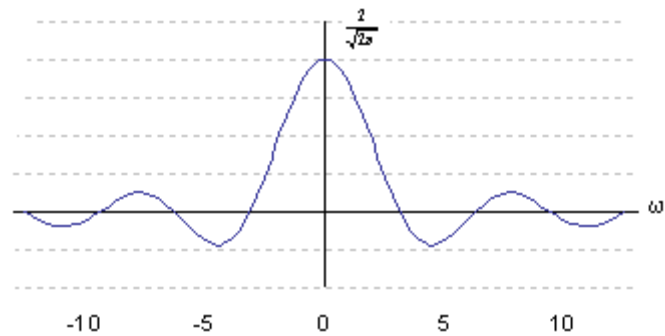
je-li $S(\omega) = F(i\omega)$ obraz fce $f(t)$, pak fce $f(-\omega)$ je FT $S(t)$.

Zaměníme-li formálně ω za t , určíme originál $f(-t)$ použitím stejného algoritmu jako pro výpočet obrazu.

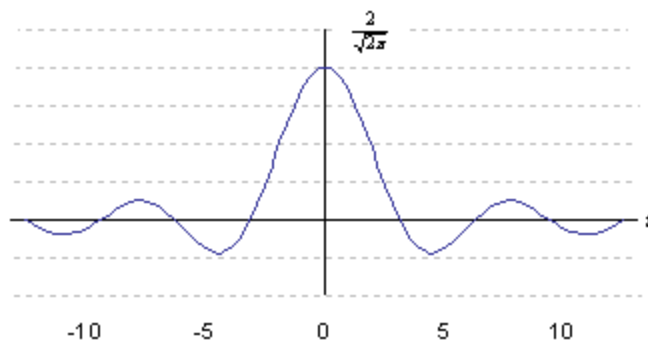
originál
 $f(t)$



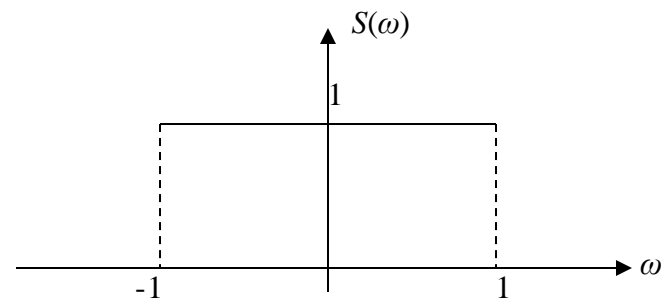
obraz



originál



obraz



Příklad

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -1, \\ 1 & t \in [-1, 1], \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

1. fce je absolutně integrovatelná na \mathbf{R} , $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$

2. Fourierův obraz fce f :

a) v komplexním tvaru:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega}{\sqrt{2\pi} \omega}, \omega \in \mathbf{R}$$

b) v reálném tvaru: fce je sudá, pak

$$b(\omega) = 0, \quad a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos(\omega t) dt = \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega},$$

3. Zpětná transformace:

a) v komplexním tvaru:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin \omega}{\omega \sqrt{2\pi}} \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

b) v reálném tvaru:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos(\omega t) d\omega.$$

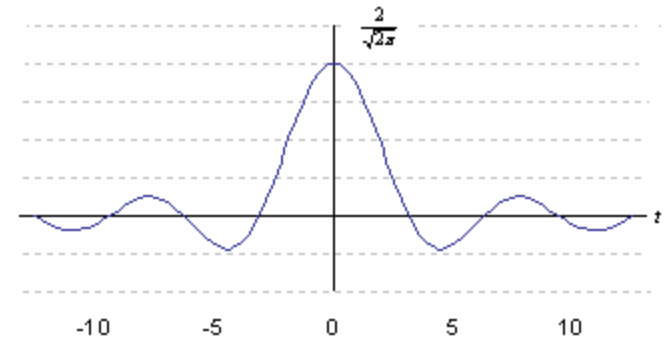
Zvolíme-li za $t = 0$, dostaneme

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos 0 \cdot d\omega, \quad \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

fce $\frac{\sin \omega}{\omega}$ je sudá, pak $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot d\omega = \pi$

4. Zvolíme originál:

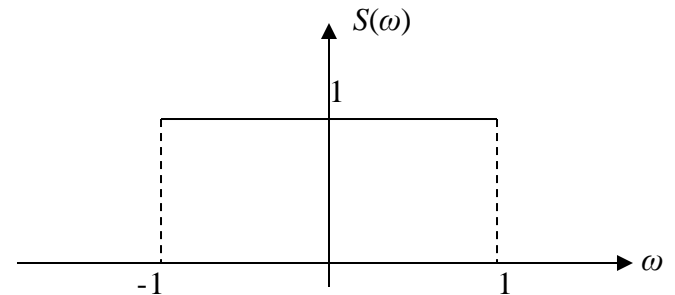
$$f(t) = \frac{2 \sin t}{\sqrt{2\pi} t}, \quad t \in \mathbf{R}$$



Fourierův obraz funkce f :

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin t}{t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-i\omega t} dt \Rightarrow$$

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -1, \\ 1, & \omega \in [-1, 1], \\ 0, & \omega > 1. \end{cases}$$



Některé vlastnosti Fourier. transformace

- 1. Lineárnost:**
$$\mathbf{F}\left\{\sum_{k=1}^n c_k f_k\right\} = \sum_{k=1}^n c_k F_k(i\omega).$$
- 2. Podobnost (změna měřítka):**
$$\mathbf{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{i\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
- 3. Substituce (věta o kmitočtovém posunu, modulační věta):**
$$\mathbf{F}\{f(t)e^{i\alpha t}\} = F(i\omega - i\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
- 4. Posunutí (změna fáz. spektra):**
$$\mathbf{F}\{f(t - \tau)\} = F(i\omega)e^{-i\omega\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$
- 5. Derivace originálu:**
$$\mathbf{F}\{f'(t)\} = i\omega \mathbf{F}\{f(t)\} = i\omega F(i\omega)$$
$$\mathbf{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n \mathbf{F}\{f(t)\} = (i\omega)^n F(i\omega)$$
- 6. Derivace obrazu:**
$$\mathbf{F}\{-it \cdot f(t)\} = \frac{dF(i\omega)}{d\omega}, \quad \mathbf{F}\{(it)^n f(t)\} = \frac{d^n F(i\omega)}{d\omega^n}.$$
- 7. Věta o obrazu integrálu:**
$$\mathbf{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{i\omega} F(i\omega)$$
- 8. Fourier. obraz konvoluce dvou fcí:**
$$\mathbf{F}\{(f * g)(t)\} = F(i\omega) \cdot G(i\omega),$$
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad \mathbf{F}\{f(t)\} = F(i\omega), \quad \mathbf{F}\{g(t)\} = G(i\omega).$$
- 9. Parsevalův vzorec:**
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega.$$

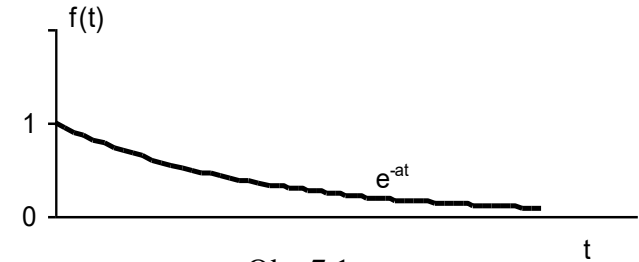
Příklad

Sestavit Fourierův obraz pro

$$a) \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ e^{-\alpha t} & t \geq 0, \alpha > 0. \end{cases}$$

b) Fce je sudá $f(t) = f(-t)$

c) Fce je lichá $f(t) = -f(-t)$



Obr. 7.1

hodnoty L -obrazu na imag. ose, tj.

pro $s = i\omega$ určují Fourierův obraz

Řešení:

$$a) \text{ Fourier. obraz: } F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

$$\text{Laplace. obraz: } L\{e^{\alpha t} \cdot \eta(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{1}{s+\alpha}.$$

Spojité amplitudové spektrum tvoří

$$|F(i\omega)| = \left| \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}},$$

Spojité fázové spektrum bude dáno

$$\varphi(\omega) = -\arg\{F(i\omega)\}.$$

Zpětná transformace bude

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha+i\omega} \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

Pro $t = 0$ $f(0) = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha+i\omega} d\omega = 2\pi.$$

b) Fce je sudá: $b(\omega)=0, \quad a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\cos(\omega t)dt \Rightarrow$

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi(\omega^2+1)} \quad f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2+1}\cdot\cos(\omega t)d\omega, \quad t \in \mathbf{R}$$

c) Fce je lichá: $a(\omega)=0, \quad b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cdot\sin(\omega t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\sin(\omega t)dt,$

$$f(t)=\int_0^{\infty} b(\omega)\cdot\sin(\omega t)d\omega, \quad t \in \mathbf{R}$$

Pozor!!! Nelze sestavit Fourierův obraz pro $\eta(t)$

nebo pro $f(t)=\begin{cases} 0 & t < 0, \\ e^{\alpha t} & t \geq 0, \alpha > 0. \end{cases}$

jelikož $\eta(t) \notin \mathbf{L}^2(\mathbf{R}), \quad f(t) \notin \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$

Fourierova kosinová a sinová transformace

Necht' $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ je sudá fce, pak $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = 0.$$

Fourier. integrál bude mít tvar:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

Definice: Fourier. kosinový obraz originálu $f(t)$ definujeme $\int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$

Necht' $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ je lichá fce, pak $a(\omega) = 0$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Fourier. integrál bude mít tvar:

$$f(t) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

Definice: Fourier. sinový obraz originálu $f(t)$ definujeme $\int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$

CVIČENÍ 6

Naprogramování fce pro výpočet (cyklické)konvoluce dvou posloupností

Dirichletovo jádro a transformace

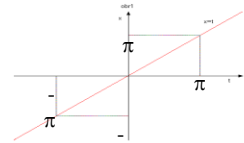
Nechť $f(t)$ je absolutně integrovatelná na intervalu $[-\pi, \pi]$, resp. $[0, 2\pi]$, tj., $f \in L^2(-\pi, \pi)$ resp. $f \in L^2(0, 2\pi)$. FŘ pro periodickou fci $\tilde{f}(t)$ pro $t \in R, T = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ v komplexním a reálném tvaru bude

$$\tilde{f}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, \quad b_n = -2 \operatorname{Im} c_n$$

Částečný součet této řady: $s_n(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt, \quad n \in \mathbb{N}$

Po dosazení za c_n a po záměně vnitřní proměnné t za x :

$$s_n(t) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt} = \sum_{|k| \leq n} \left[\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx \right] \cdot e^{ikt} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i(x-t)k} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sum_{k=-n}^n e^{-i(x-t)k} dx$$



Označíme-li $\sum_{k=-n}^n e^{-i(x-t)k} = D_n^*(x-t) = 2 \cdot D_n(x-t)$, pak

$$s_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot D_n^*(x-t) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot D_n(x-t) dx \quad \dots \text{Dirichletův integrál} \\ \text{(Dirichletova transformace)}$$

Polynom $D_n(x-t) = D_n(u)$ nazveme *Dirichletovým jádrem řádu n* (1829)

Jiné formulace: $D_n^*(u), D_n^*(x-t), \frac{1}{\pi} D_n(u), \frac{1}{2\pi} D_n^*(x-t).$

Pomocí číselné řady můžeme odvodit:

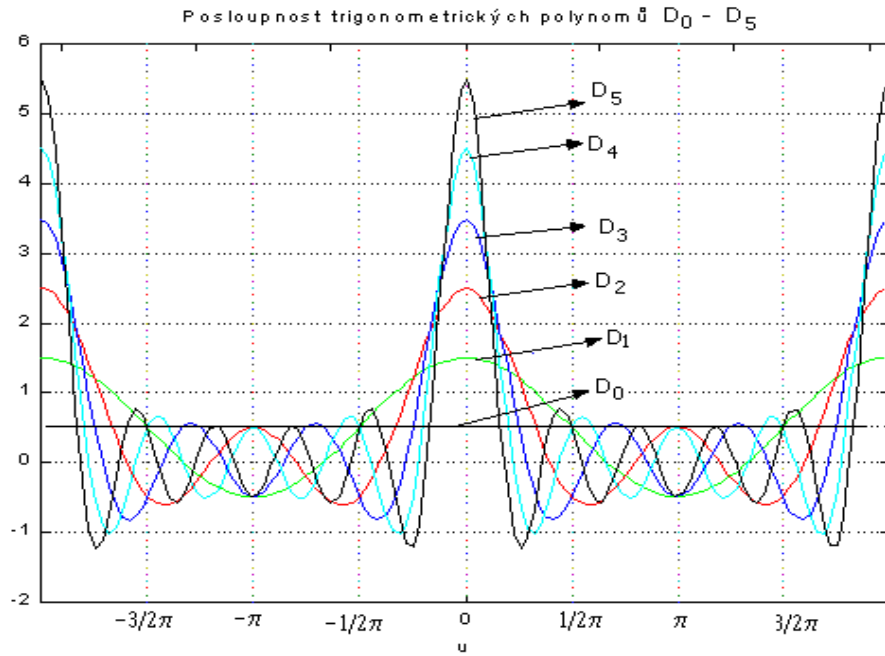
$$D_n^*(u) = 2 \cdot D_n(x-t) = \sum_{k=-n}^{+n} e^{-ik(x-t)} = e^0 + \sum_{-n}^{-1} e^{-ik(x-t)} + \sum_1^n e^{-ik(x-t)} = 1 + \sum_1^n (e^{ik(x-t)} + e^{-ik(x-t)})$$

Protože $e^{ik(x-t)} + e^{-ik(x-t)} = 2 \cos(k(x-t))$: $D_n^*(u) = 1 + 2 \sum_1^n \cos k(x-t) = 1 + 2 \sum_1^n \cos ku$

$\sum_{k=1}^n \cos ku$ je řada konvergentní ve smyslu Cesàra i pro $n \rightarrow \infty$

$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku, n=0,1,2,\dots$ *posloupnost trigonometrických polynomů:*

$D_0(u) = \frac{1}{2}, \quad D_1(u) = \frac{1}{2} + \cos u, \quad D_2(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u, \dots$



$u \in [-\pi, \pi]$

Dirichletovo jádro - vlastnosti

1. $D_n(u)$ je fce sudá, periodická s $T = 2\pi$, přičemž pro $u = 0$, tj. pro všechny body $t = x$ (vyplývá ze substituce $u = x - t$), $u \in [-\pi, \pi]$ platí:

$$D_n(0) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 0 = \frac{1}{2} + n = \frac{2n+1}{2}$$

$$n \rightarrow \infty \quad \frac{D_n(0)}{n} = \frac{\frac{2n+1}{2}}{n} = \frac{2n+1}{2n} = \frac{1}{n} \cdot \left(2n + \frac{1}{n}\right) = \frac{2 + \frac{1}{n}}{2} \rightarrow 1, \quad \text{tj. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n(0)}{n} = 1.$$

2. $\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} D_n(u) du = 1$

Důkaz: Protože $D_n(u)$ je sudá:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} D_n(u) du &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\pi} D_n(u) du = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku\right) du \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} D_n(u) du = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin ku}{k} \Big|_0^{\pi} \right] = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

3. Pro všechny body $t = u \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$D_n(u) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

4. Pro $u = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je třeba dodefinovat $D_n(u)$ pomocí limitní hodnoty.

Limitu vypočítáme L'Hosp. pravidlem „0/0“: $\cos k\pi = (-1)^k$, $\cos(2nk\pi + k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k$.

$$\lim_{u \rightarrow 2k\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}u\right)}{2 \sin \frac{u}{2}} \stackrel{L'Hosp.}{=} \lim_{u \rightarrow 2k\pi} \frac{(2n+1) \cos\left(\frac{2n+1}{2}u\right)}{2 \cos \frac{u}{2}} = \lim_{u \rightarrow 2k\pi} \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} \cdot u\right)}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\cos(2n+1)k\pi}{\cos k\pi} = n + \frac{1}{2}$$

ZÁVĚR : Pro hodnoty Dirichletova jádra tedy platí:

$$D_n(u) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}u\right)}{2\sin\frac{u}{2}}, & u \neq 2k\pi & \dots \text{ hodnota fční} \\ \frac{2n+1}{2}, & u = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ pro } n \rightarrow \infty \quad D_n \rightarrow \infty & \dots \text{ hodnota limitní} \end{cases}$$

Pak
$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot D_n(x-t) dx = \frac{1}{\pi} (f * D_n)(t)$$

posloupnost fcí $D_n(x-t), n \rightarrow \infty$ se chová stejně jako posloupnost fcí $\delta_n(t)$ reprezentujících Diracův impuls δ

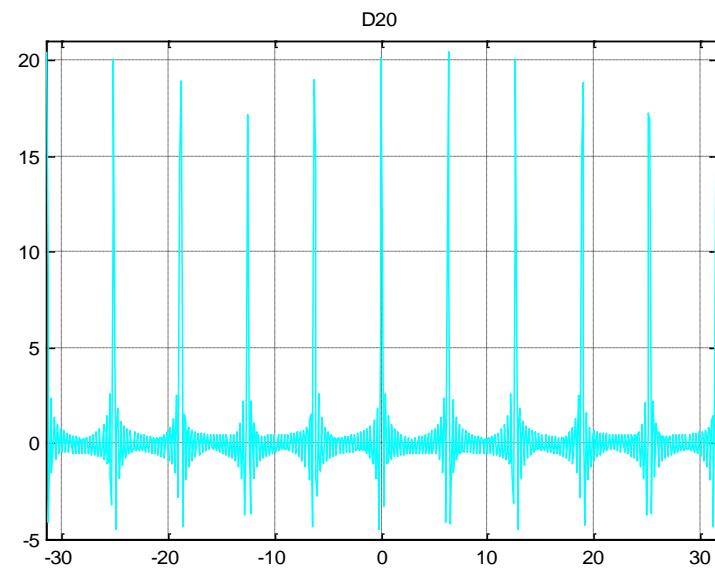
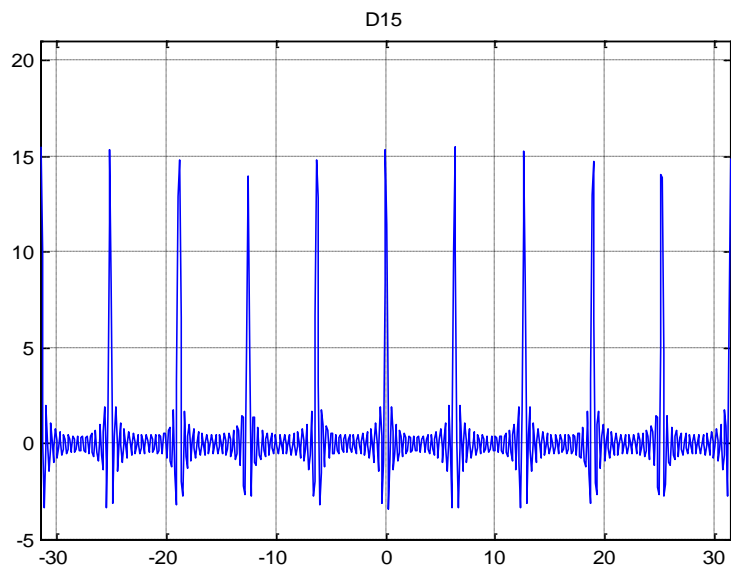
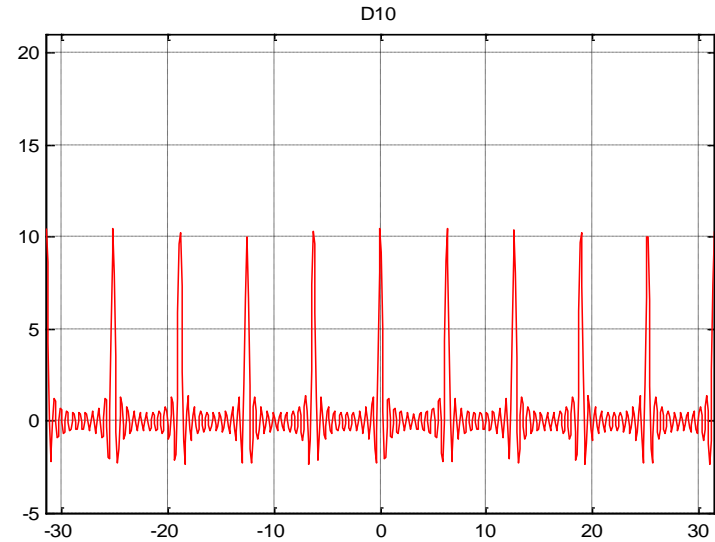
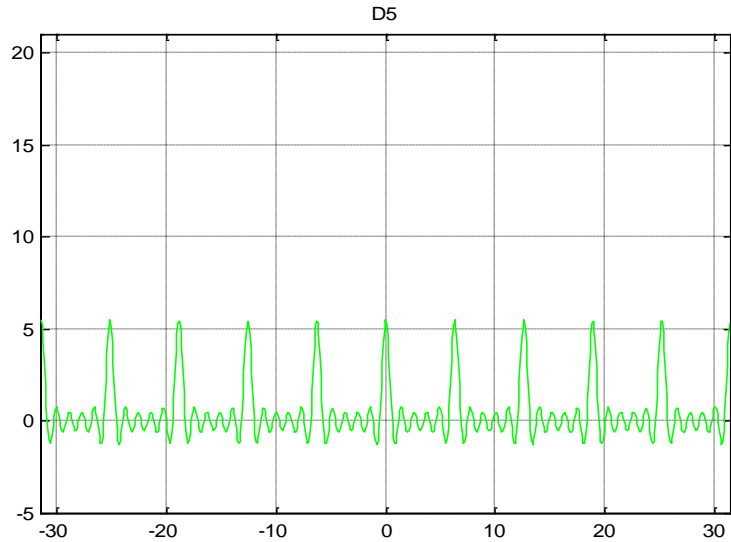
!!!Proto Diracův impuls **formálně** často zapisujeme (ve tvaru nekonečné řady):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} \cos kt$$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt}$ je divergentní v klasickém (Cauchyho) pojetí. Lze ale určit její součet ve smyslu Cesàra:
$$S^{(1)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k(t) = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

V uzlových bodech $2k\pi$ se amplituda výrazně zvětšuje.

Na obrázku jsou Dirichletova jádra pro $n=5$, $n=10$, $n=15$ a $n=20$:



Fejerovo jádro a transformace

Fejer L. 1880 – 1959

Fejerovo jádro vznikne sumací Dirichlet. jader pomocí Cesàrových

součtů: $\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$, resp. $\Phi_n^*(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k^*(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Z předchozího je zřejmé, že $\Phi_n^*(t) = 2 \cdot \Phi_n(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$

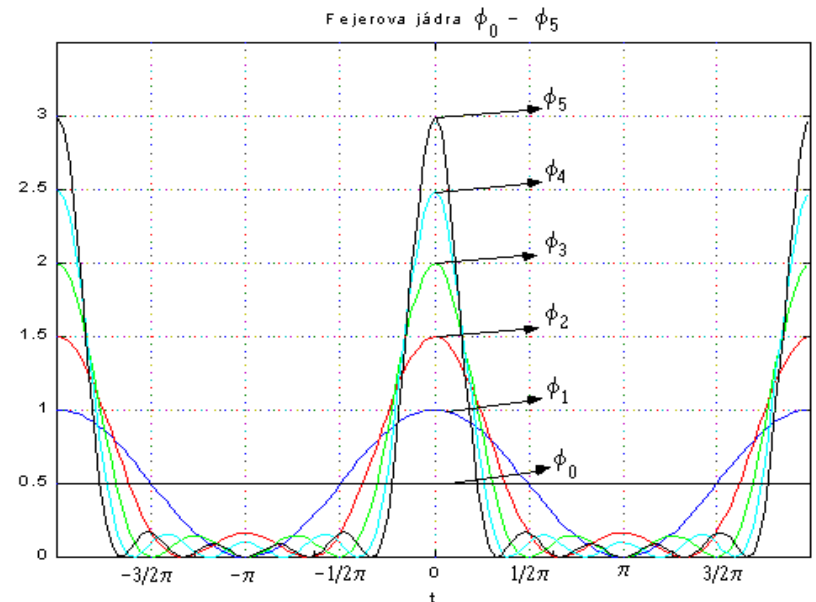
Na základě provedené sumace dostaneme: $\Phi_n^*(t) = \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt} = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$

resp. $\Phi_n(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{n+1} (e^{-ikt} + e^{ikt}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{n+1} \cos kt$ $t \neq 2\pi k$.

V bodech $t=2\pi k$ je nutno fci dodefinovat:

$$\Phi_n(t) = \frac{n+1}{2} \quad t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Posloupnost funkcí $\Phi_n(t)$:



Gibbsův jev

Jaké chyby se dopoušíme, nahrazujeme-li FŘ jejím částečným součtem, tj. Fourier. polynomem?

Formule pro zbytek FŘ:

Nechť $f(t)$ je absolutně integr., period. fce $T = 2\pi$, $t \in [-\pi, \pi]$. Vypočteme

Four. polynom řádu n $s_n(t) = s_n(t, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot D_n(x-t) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+t) \cdot D_n(u) du$,
kde $x-t=u$, $D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku$.

Jelikož $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1$ pro $\forall n > 1$: $f(t) = f(t) \cdot 1 = f(t) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_n(u) du$.

Vzorec pro zbytek FŘ $f(t)$ v abs. hodnotě:

$$\begin{aligned} |R_n(t, f)| &= |f(t) - s_n(t, f)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot D_n(u) du - \int_{-\pi}^{\pi} f(u+t) \cdot D_n(u) du \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) \cdot (f(t) - f(u+t)) du \right| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(u) \cdot (f(t) - f(u+t))| du. \end{aligned}$$

Použijeme-li $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ pak $\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| |g(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt \cdot \int_a^b |g(t)| dt$

označíme-li $|f(t) - f(u+t)| = \Delta f(u, t)$ pak $|R_n(t)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(u)| \cdot \Delta f(u, t) du \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(u)| du \int_{-\pi}^{\pi} \Delta f(u, t) du$,

Víme že :
$$D_n(u) = \frac{\sin(n + \frac{2}{\varepsilon})u}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad 0 < \varepsilon < |u| \leq \pi$$

Max. hodnota čitatele je 1, proto $|D_n(u)| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}}, \quad 0 < \varepsilon < |u| \leq \pi,$

pak
$$|R_n(t)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}} du \int_{-\pi}^{\pi} \Delta f(u, t) du.$$

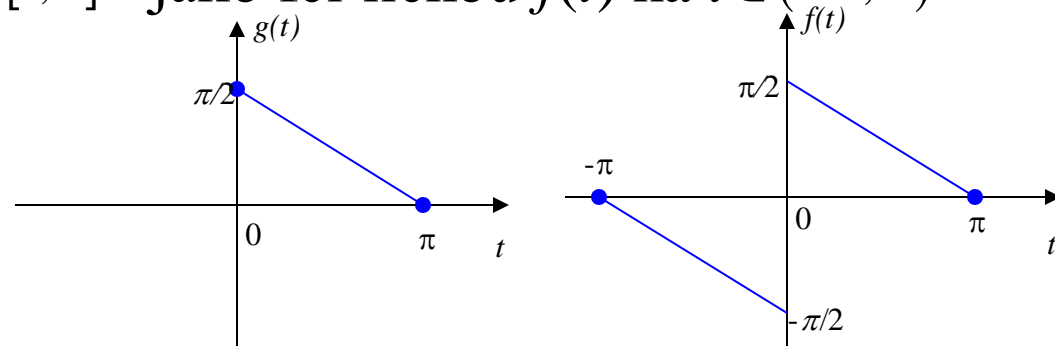
Analýza Gibbsova jevu:

Analýzu tohoto jevu lze provést na libovolné po částech spojitě fci s 1 bodem nespojitosti 1. druhu: $f(t) = g(t) + s(t_0)$, kde

- $g(t)$ je spojitá fce pro $t \in \mathbb{R}$,
- $f(t)$ je spojitá všude s výjimkou bodu t_0 ,
- $s(t_0)$ představuje změnu (skok) fce $f(t)$ v bodě t_0 .

1. krok: Rozložíme $g(t) = \frac{\pi - t}{2}, t \in [0, \pi]$ jako fci lichou $f(t)$ na $t \in (-\pi, \pi)$ v sinovou řadu $\tilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega n t.$

Konkrétní příklad:



$f(t)$ má bod nespojitosti $t_0=0$ 1.druhu, neboť: $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \frac{-\pi}{2}$; $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \frac{\pi}{2}$.

Velikost skoku $s(t_0)=f(0_+)-f(0_-)=\pi$. Fčnı́ hodnota: $\tilde{f}(t_0) = \tilde{f}(0) = 0$

Koeficienty FŘ (fce je lichá): $a_0=0, a_n=0, t \in R, T = 2\pi$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi-t}{2} \cdot \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi-t) \cdot \sin(nt) dt = \dots \text{"per partes"} \dots = \frac{1}{n},$$

Platı́ tedy: $\tilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$ pro $\forall t \in R$, tedy pro $t \in [0, \pi]$ a pro $t \in [-\pi, \pi]$

v bodě $t_0 = 0$ fčnı́ hodnota $\tilde{f}(0) = 0$. Tedy chyba aproximace v $t_0=0$ bude

$$R(0) = \left| f(0) - \tilde{f}(0) \right| = \left| \frac{\pi}{2} - 0 \right| = \frac{\pi}{2}.$$

2. krok: Nahradı́me-li FŘ Fourier. polynomem řádu n (tj. částečným součtem): $s_n(t) = s_n(t, f) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k}$ pak absolutní chyba v každém bodě spojitosti $t \in (0, \pi)$ bude:

$$R_n(t) = |f(t) - s_n(t)| = \left| \frac{\pi-t}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} \right| = \left| \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} - \frac{\pi}{2} \right|.$$

Necht' $\varphi(t) = \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} \Leftarrow \int_0^t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right) du = \int_0^t D_n(u) du,$

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

$u \neq 2k\pi, k \in Z$

Pak: $|R_n(t)| = \left| \varphi(t) - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \int_0^t D_n(u) du - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \int_0^t \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du - \frac{\pi}{2} \right|, \quad \forall u \neq 2k\pi, \text{ tedy i v okolí } u=0$

3. krok: Pro lokální extrém fce $R_n(t)$ platí, že $R'(t) = 0$, jelikož

$$R_n(t) = \int_0^t D_n(u) du - \frac{\pi}{2} \Rightarrow R'_n(t) = D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} + 0 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t = 0 \Rightarrow t = \frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Analyzujeme interval $(0, \pi)$

- pro $t \rightarrow 0_+$ bude $k=1$ a nejbližší další bod v okolí $t_0=0$, v němž existuje extrém, je $t_1 = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}$
- skutečně při $n \rightarrow \infty$ $t_1 = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \rightarrow 0_+$

4. krok: Přesná chyba se vypočítat nedá, proto provedeme horní odhad.

Pro max. abs. chybu v t_1 provedeme horní odhad. Nejdříve pro horní odhad integrálu $\varphi(t) = \int_0^t \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$ záměnou horní proměnné meze t na

$$t_1 = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \text{ a subst. } n + \frac{1}{2} = p, \left(n + \frac{1}{2}\right)u = pu = x \Rightarrow du = \frac{1}{p} dx: \int_0^{t_1} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \int_0^{pt_1} \frac{\sin x}{2p \cdot \sin \frac{x}{2p}} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2p \cdot \sin \frac{x}{2p}} dx$$

$$u = 0 \Rightarrow x = 0$$

Pokud

$$u = t_1 \Rightarrow x = pt_1 = \pi$$

$$x = pu = \left(n + \frac{1}{2}\right)u \rightarrow \infty; \quad u \in (0, t_1]$$

Analyzujeme $2p \cdot \sin \frac{x}{2p}$ pro $n \rightarrow \infty$:

$$t_1 = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \rightarrow 0_+ \Rightarrow u_1 = t_1 \rightarrow 0_+$$

Pak $\frac{x}{2p} = \frac{pu}{2p} \rightarrow 0_+$ při $n \rightarrow \infty$.

Odtud:

$$2p \cdot \sin \frac{x}{2p} = \frac{x \cdot \sin \frac{x}{2p}}{\frac{x}{2p}} = \frac{x \cdot \sin \alpha}{\alpha}; \quad \text{kde } \alpha = \frac{x}{2p}, \alpha \rightarrow 0.$$

Jelikož

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

lze horní odhad integrálu vyjádřit $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2p \cdot \sin \frac{x}{2p}} dx \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x \cdot 1} dx$.

Použitím mocninné řady: $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{x \cdot (2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

...součet čísel řady stanovíme pomocí několika prvních členů a odhadu zbytku řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2n+1)} + r_n$$

kde r_n je zbytek alternující řady $|r_n| \leq \left| \frac{(-1) \cdot \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \right| = \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)^2 \cdot (2n)!}$

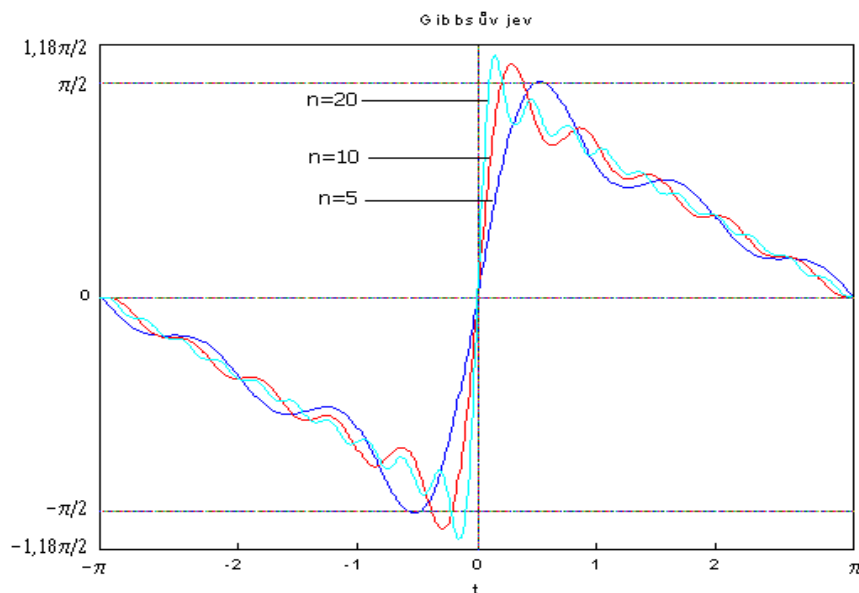
Použijeme-li $n=4$, bude $|r_n| \leq \frac{\pi^9}{9! \cdot 9}$ a $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)^2 (2k)!} + \frac{\pi^9}{9! \cdot 9}$

Max. abs. chyba bude při $n \rightarrow \infty, t \rightarrow 0_+$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(t_1)| = \left| \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right| \Rightarrow |R_n(t_1)| \leq \left| \sum_0^3 \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)^2 (2k)!} + \frac{\pi^9}{9! \cdot 9} - \frac{\pi}{2} \right| \doteq 0,18 \cdot \frac{\pi}{2} \doteq 0,2827$$

Závěr: Hodnota 0,2827 představuje cca 18% hodnoty $\pi/2$.

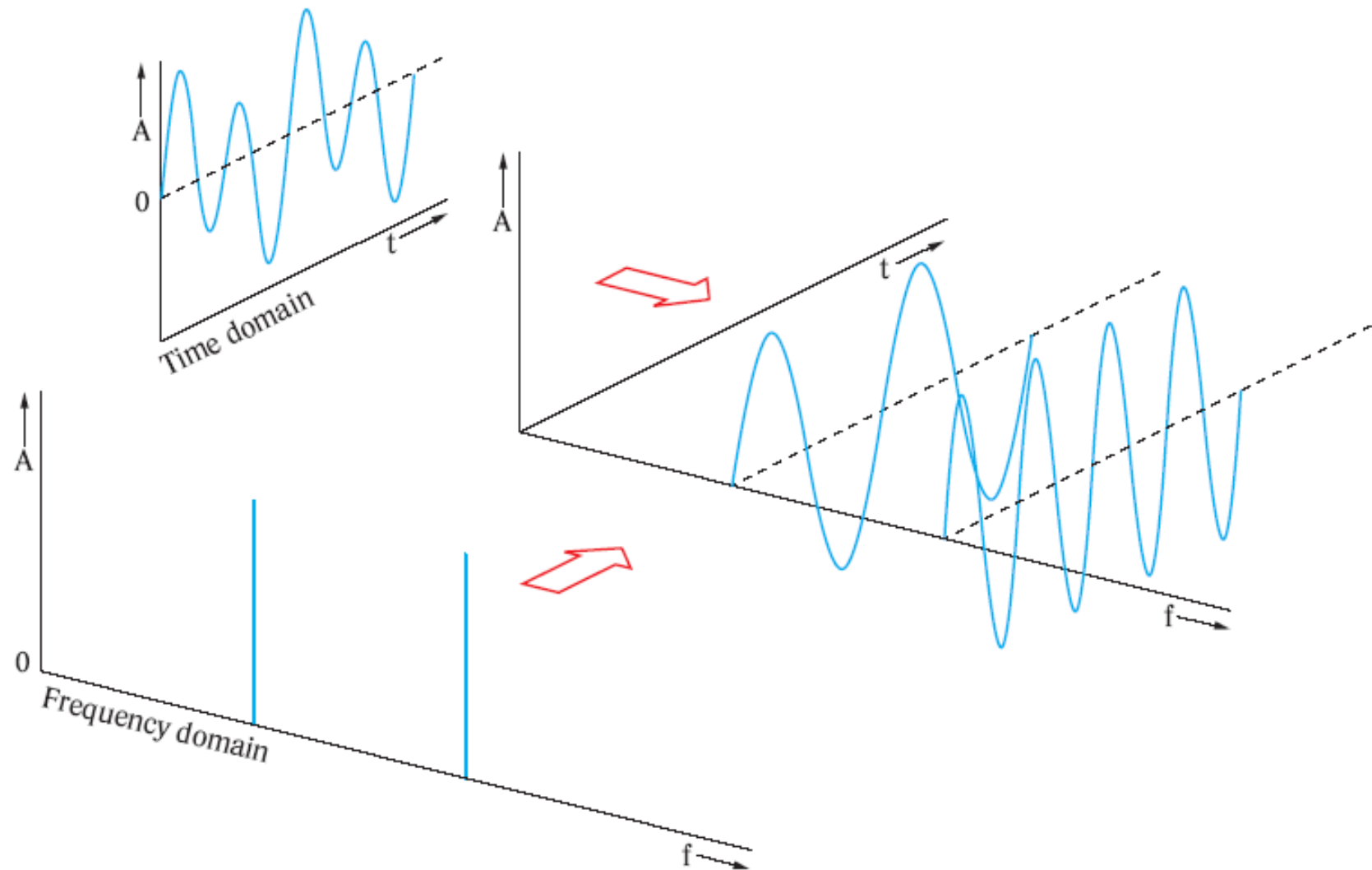
V bodě t_1 , který se nachází v okolí bodu nespojitosti 1. druhu, dosahuje abs. chyba aproximace svého maxima. To představuje cca 18% poloviny skoku - tzv. překmitu. **Proto nikdy nemůžeme dosáhnout toho, aby částečný součet (Fourierův polynom) aproximoval zadanou fci v okolí bodu nespojitosti stejnoměrně.**



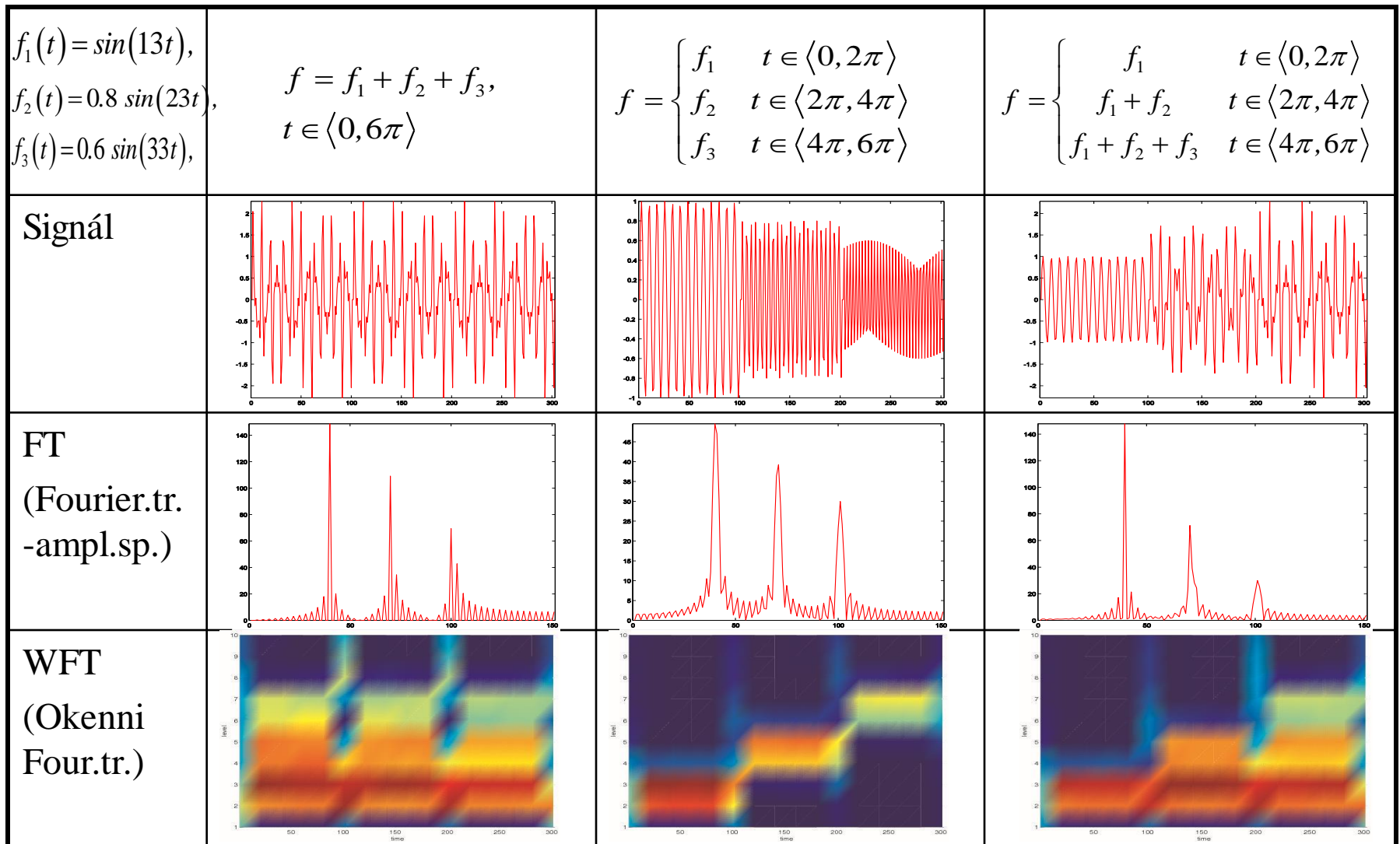
CVIČENÍ 7

Dodělat úkoly z minulých cvičení, zpracovat krátký elaborát-zprávu o Tichonov. reg., algoritmech FT a napsat fci na výpočet konvoluce dvou posloupností

Časová a frekvenční oblast (doména)

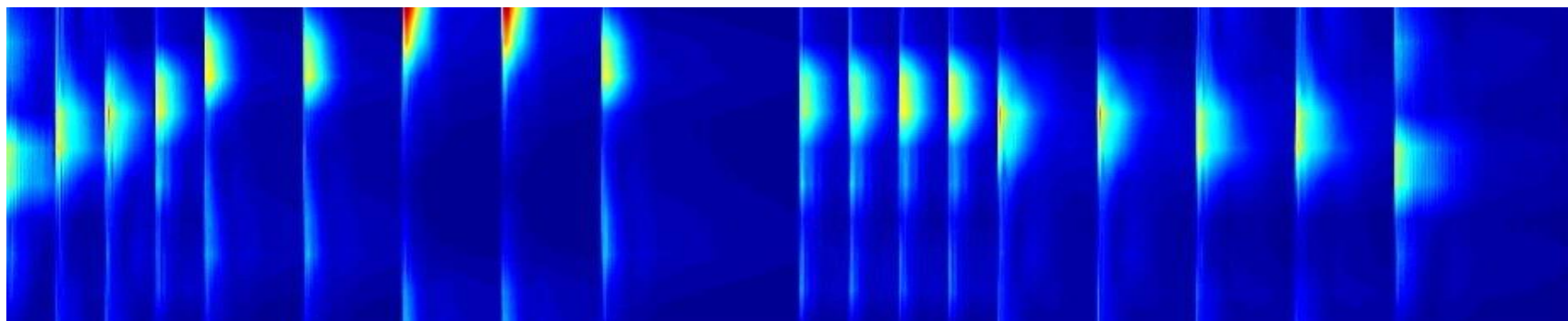
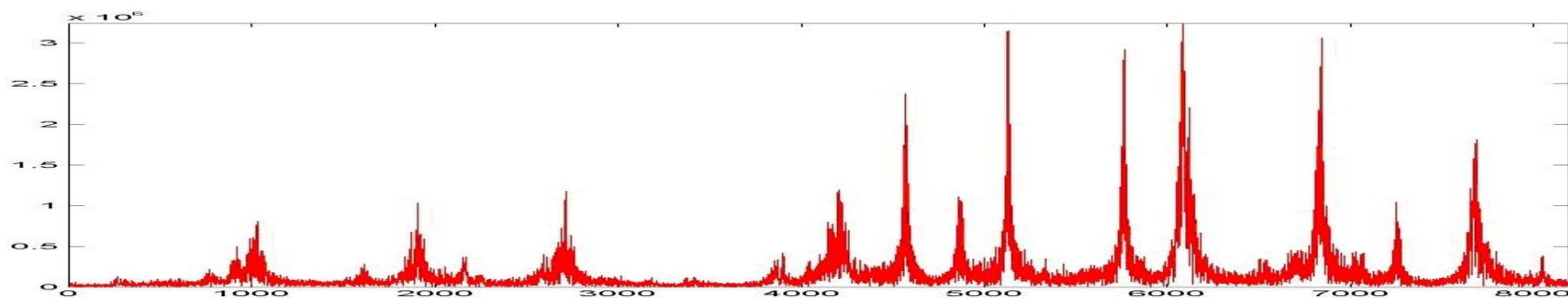
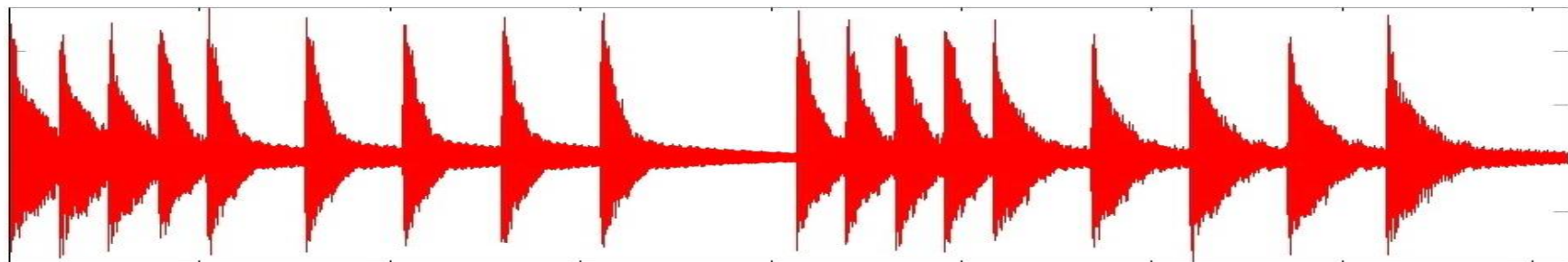


Motivace – časově-frekvenční analýza s WFT



Motivace – časově-frekvenční analýza s WFT

Ko-čka-le-ze dí - rou, pes ok - nem, ne-bu-de-li pr - šet, ne - zmo - knem



Motivace – analýza hudebního signálu

- Předpokládejme, že chceme analyzovat hudební skladbu kvůli její frekvenční charakteristice.
- Hudební skladba-její frekvenční charakteristika může být modelována fci $f(t)$ reprezentující tlak vzduchu na ušní bubínek jako fci času.
- Jestliže se hudba skládá z jednotlivých tónů s frekvencí ω_1 , pak $f(t)$ je periodická s $T = 1 / \omega_1$ a přirozeným popisem její frekvenční charakteristiky je FŘ, přičemž Four. koeficienty c_n určují amplitudy různých harmonických $\omega_n = n\omega_1$ v $f(t)$.
- Jestliže je hudba řadou takovýchto tónů a melodií, pak obecně není periodická a FŘ nemůže být použita.
- Jeden přístup je spočítat Four. integrální transformaci $\hat{f}(\omega)$ fce $f(t)$. Avšak tato metoda má z praktického hlediska jednu vadu. Abychom spočítali $\hat{f}(\omega)$, musíme integrovat $f(t)$ na celé časové ose. Jestliže skladba trvá určitou dobu, musíme před výpočtem počkat až dozní, protože by výsledek nenesl žádnou informaci, navíc chybí čas. lokalizace

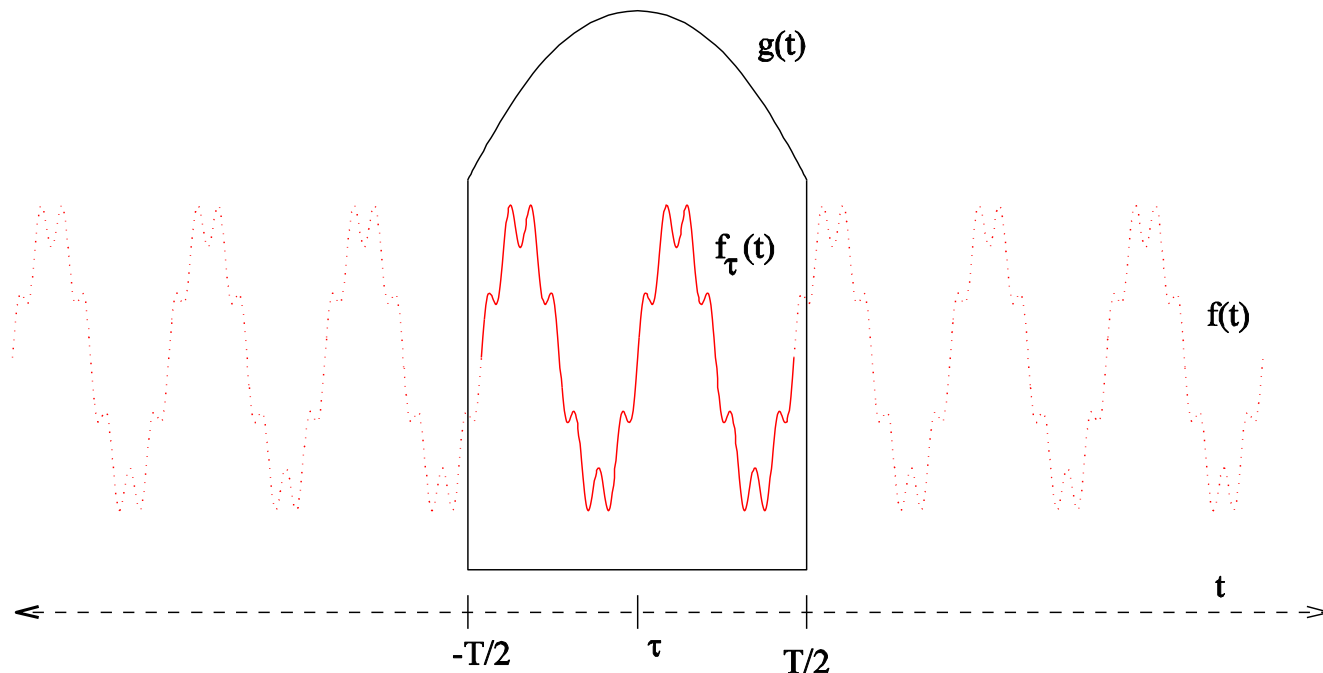
Model lidského ucha

- Uvažujme model slyšení - lidské ucho
 - analyzuje rozdělení frekvence daného signálu $f(t)$ v reálném čase
 - podává současně informaci o $f(t)$ ve frekvenční i časové oblasti
- Výstup popsáný fci $\hat{f}(\omega, \tau)$ - v závislosti na frekvenci ω a čase τ pro pevnou hodnotu τ představuje $\hat{f}(\omega, \tau)$ rozdělení frekvence v čase τ , toto rozdělení se mění s τ .
- Ucho nemůže analyzovat to, co uslyší později, pro výpočet $\hat{f}(\omega, \tau)$ mohou být použity pouze hodnoty $f(t)$, kde $t \leq \tau + T/2$
- Ucho má konečnou paměť - tzn. existuje časový interval s $T > 0$ takový, že pouze hodnoty $f(t)$ pro $t \geq \tau - T/2$ mají vliv na výsledek v čase t . $\hat{f}(\omega, \tau)$ závisí jen na $f(t)$ pro $\tau - T/2 \leq t \leq \tau + T/2$
- Hodnoty signálu blízko konců intervalu mají menší vliv na analýzu než hodnoty uprostřed intervalu.

Okenní funkce

Předchozí vztahy mohou být formulovány matematicky pomocí váhové (okenní) funkce $g(t)$, která je nulová vně intervalu $-T/2 \leq t \leq T/2$ a které bude použito k lokalizaci signálu v čase.

Pomocí $g(t)$ dejinujeme fci $f_\tau(t) = f(t)\bar{g}(t - \tau)$, která má obecně stejný nosič jako $g(t)$ a nazývá se lokalizovaná část signálu.



Okenní funkce

Generování fce $g(t)$ je založeno na:

- filtrační vlastnosti jádra v konvolučním integrálu $(f * g)(t)$

$g(t)$ je jádrem konvoluce jedině tehdy, jestliže

$$g(t) \in L_2, \int_R g(t) dt = 1, \quad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (E(p))^{-1} e^{pt} dp$$

kde γ je lib. vertikální přímka, která se nachází v oboru absolutní konvergence Fourier.-Laplaceova integrálu a $E(p) = e^{bp} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{p}{a_k}) e^{p/a_k}$, kde

$b, \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in R$, přičemž z posloupnosti čísel $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ lze vytvořit konvergentní číselnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2}$

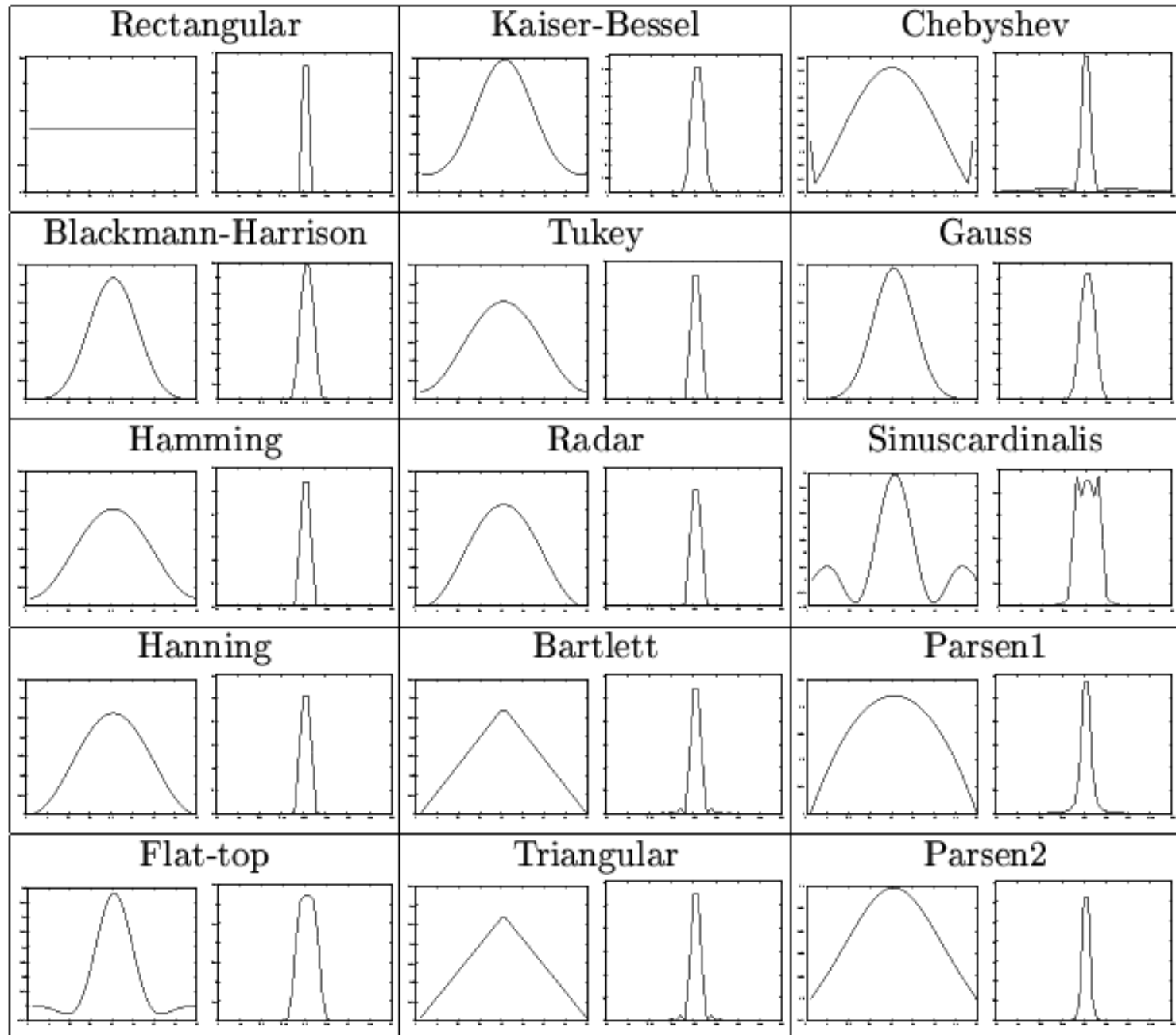
- reprezentaci δ - „funkce“:

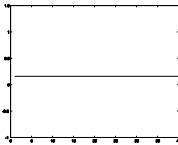
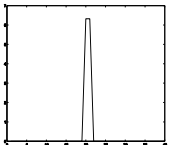
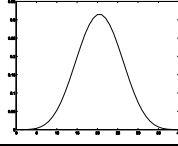
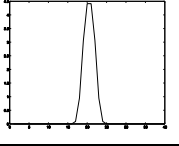
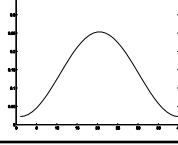
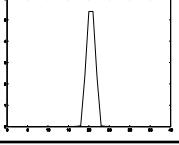
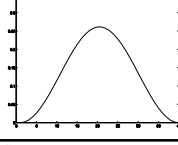
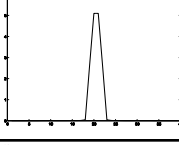
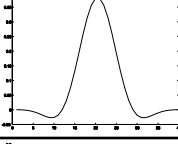
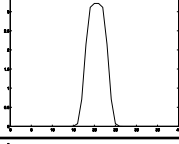
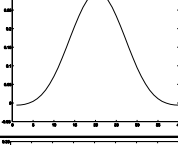
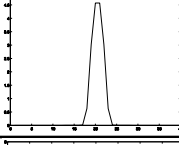
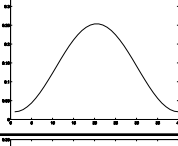
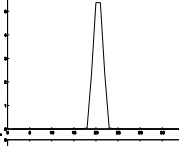
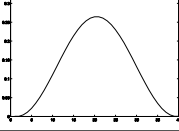
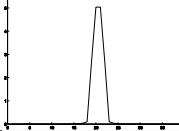
$$g(t, \lambda) = \frac{\lambda K(\lambda t)}{2M}, \lambda \rightarrow \infty, M = \int_0^{+\infty} K(\tau) d\tau, \quad K(t) \text{ je sudá fce, } K(0) \neq 0$$

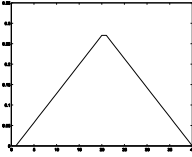
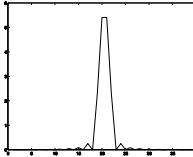
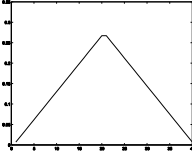
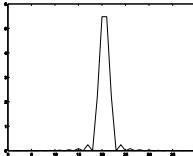
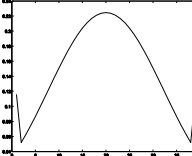
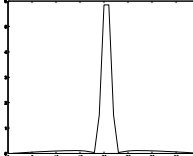
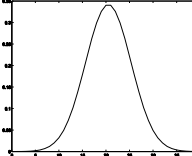
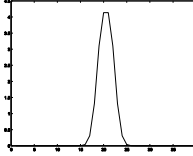
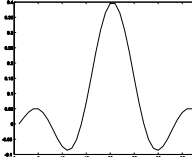
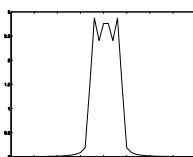
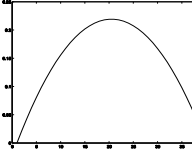
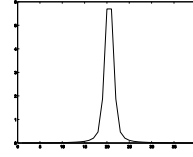
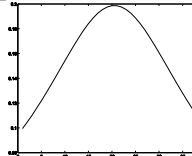
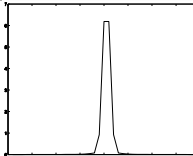
- lokální FŘ - viz. zobecněná kosinová okna

$$g(t) = K(A_0 - A_1 \cos(\frac{2\pi t}{T}) + A_2 \cos(\frac{4\pi t}{T}) - A_3 \cos(\frac{6\pi t}{T}) + A_4 \cos(\frac{8\pi t}{T})), |t| \in [0, T/2]$$

Přehled okenních fcí v časové a frekv. oblasti



Název okna	Vzorec						Graf okenní funkce v čas. oblasti	Graf okenní funkce v frekv. oblasti
	K	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4		
1. Obdélníkové	1	1	0	0	0	0		
2. Blackmann-Harrisonovo	1	1	1,361	0,394	0,033	0		
3. Hammingovo	1	1	0,84	0	0	0		
4. Hanningovo	1	1	1	0	0	0		
5. Plochý vrch (Flat - top)	1	1	1,93	1,29	0,388	0,032		
6. Kaiser-Besselovo	1	1	1,29	0,244	0,003	0		
7. Tukeyovo	1	0,54	0,46	0	0	0		
8. Radar	$g(t) = 1 + \cos(\pi t), t \in (-1,1)$							

9. Bartlettovo	$g(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T}, t \in \langle 0, T/2 \rangle \\ 2 - \frac{2t}{T}, t \in \langle T/2, T \rangle \end{cases}$		
10. Trojúhelníkové	$g(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T+1}, t \in \langle 0, T/2 \rangle \\ 2 - \frac{2t}{T+1}, t \in \langle T/2, T \rangle \end{cases}$		
11. Čebyšovo			
12. Gaussovo	$g(t) = (2a)^{1/4} e^{-\pi a t^2}$ $ t \in \langle 0, T/2 \rangle$		
13. Sinus cardinalis	$g(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ $ t \in \langle 0, T/2 \rangle$		
14. Parsenovo1	$g(t) = 1 - \left(\frac{2 t }{T} \right)^q, q \geq 2$ $ t \in \langle 0, T/2 \rangle$		
15. Parsenovo2	$g(t) = \left[1 + \left(\frac{2 t }{T} \right)^q \right]^{-1}, q \geq 2$ $ t \in \langle 0, T/2 \rangle$		

WFT - Okenní Fourierova transformace

Definice: Necht' $f(t), g(t), tg(t) \in L_2(\mathbb{R})$, $f_\tau(t) = f(t)\bar{g}(t - \tau)$ pak pro $\forall \tau \in \mathbb{R}$ definujeme okenní transformaci jako Fourierovu transformaci funkce $f_\tau(t)$:

$$WFT\{f\} = F(\omega, \tau) = \hat{f}(\omega, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|g(t)\|} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\tau(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|g(t)\|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{g}(t - \tau) e^{-i\omega t} dt$$

a zpětnou okenní transformaci:

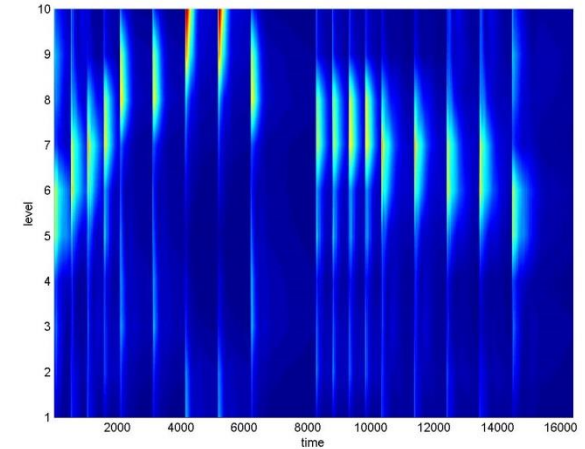
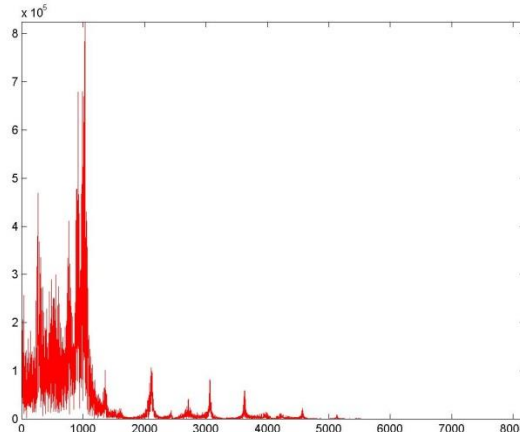
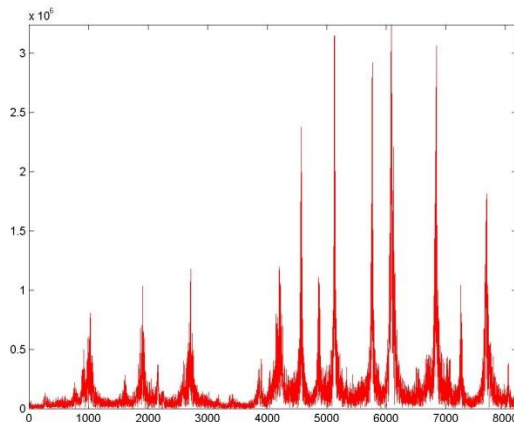
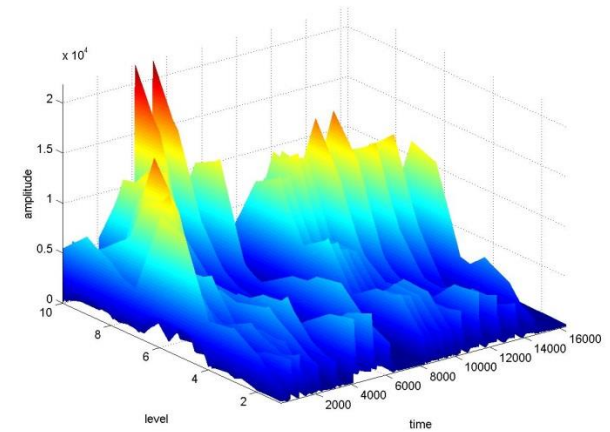
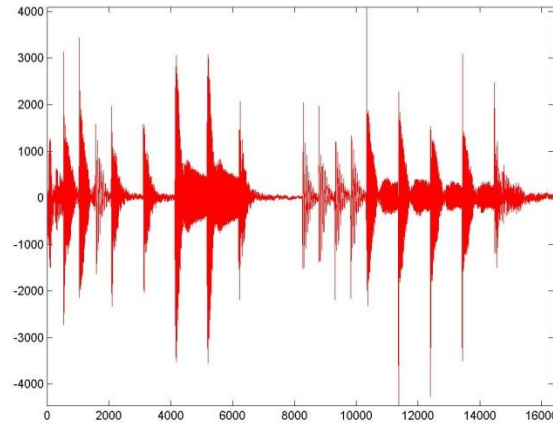
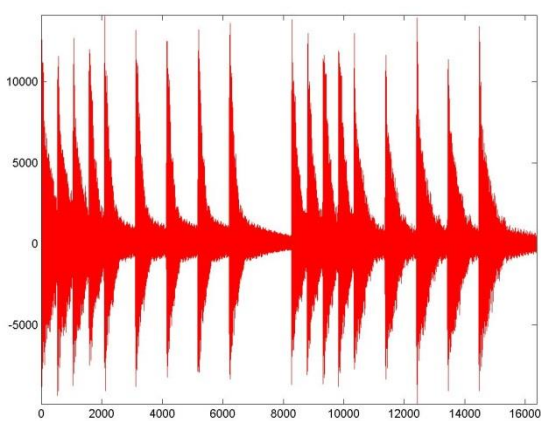
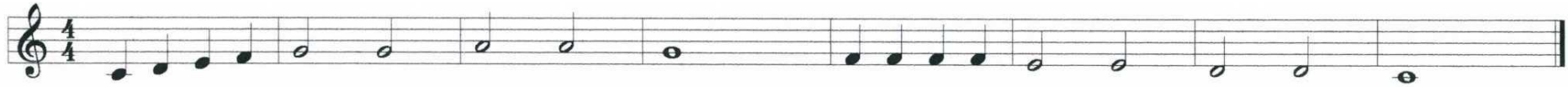
$$WFT^{-1}\{f\} = F^{-1}(\omega, \tau) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|g(t)\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega, \tau) g(t - \tau) e^{i\omega t} d\omega d\tau$$

Pozn.: Vztahy jsou symetrické, jinak např. při použití ortog. systému bude u zpět. okenní transformace konstanta $C = 2\pi\|g\|^2$

Pozn.: Průkopníkem WFT byl Gábor se svou spojitou transformací (1946) založenou na rozkladu na časově-frekvenční atomy generované jako časové a frekvenční posuny Gaussovské fce

Pozn.: Zvolená okenní fce minimalizuje tzv. kritérium vyhodnocení $\lambda(\tau) = \|f - f_\tau\|_{L_2}, \tau \in [-T/2, T/2]$, jak uvnitř intervalu, tak na celé časové ose

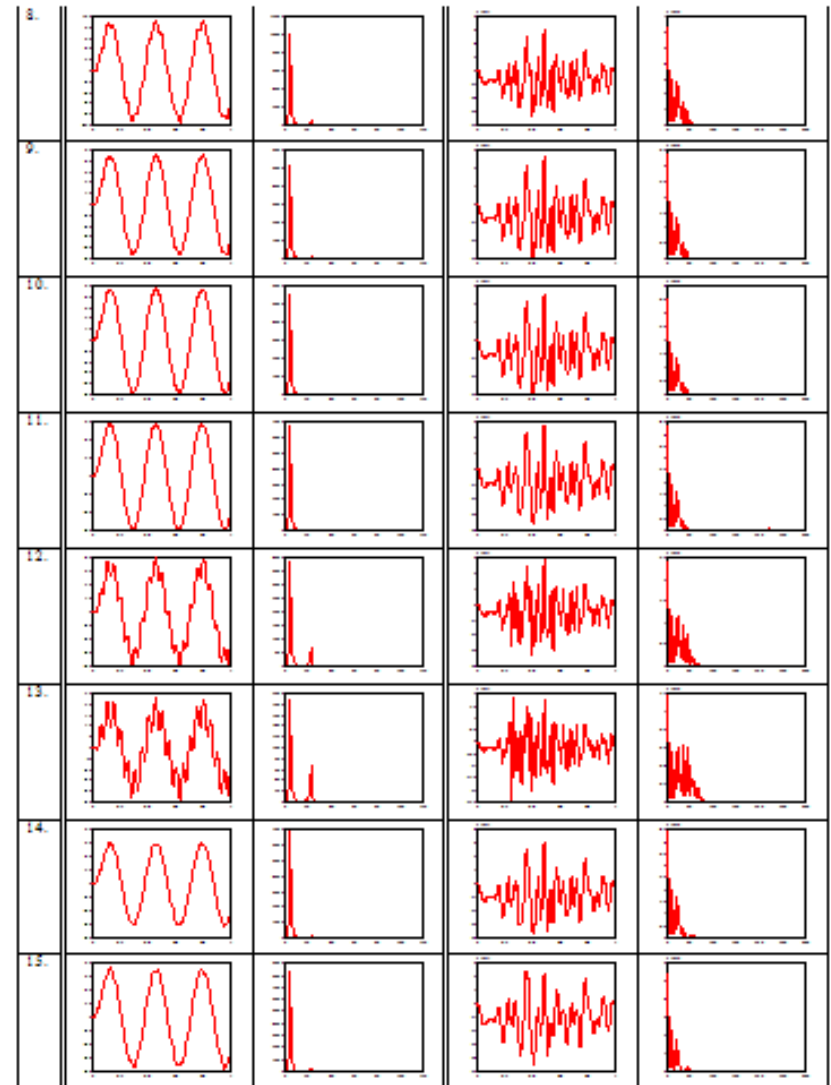
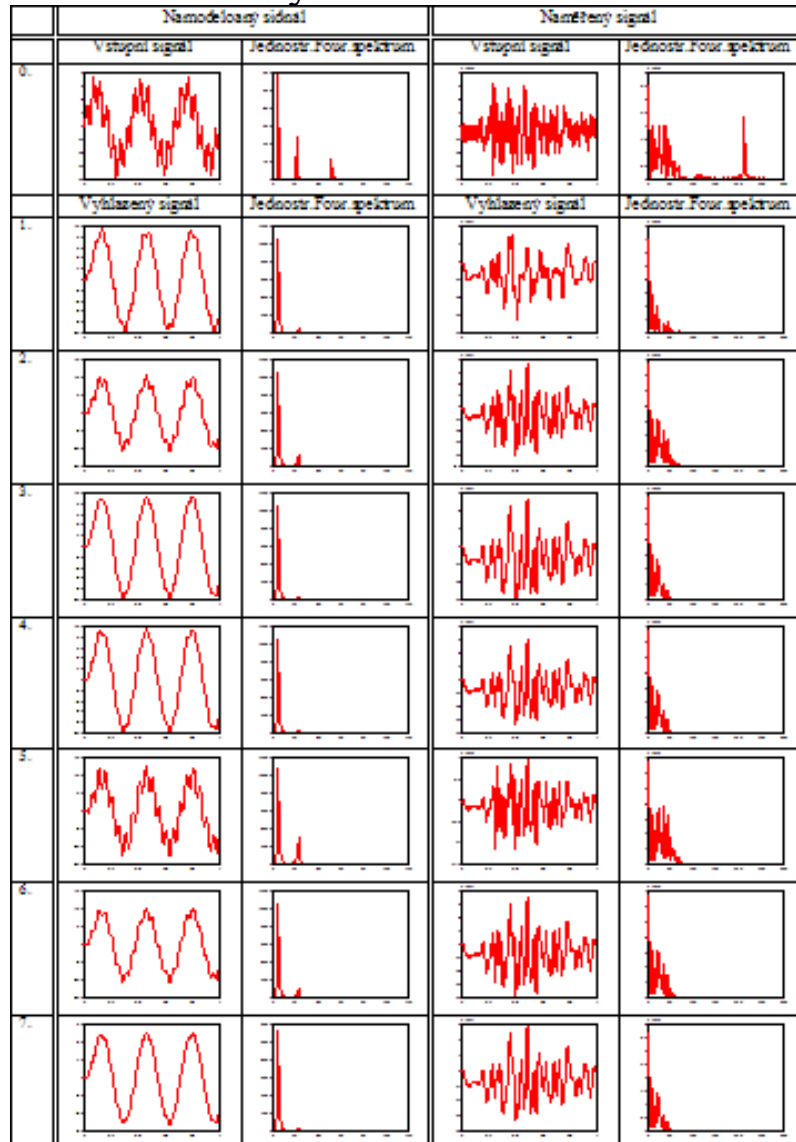
Příklad – Hamming.okno – vyhl. a cfs



Ukázka přepočtu frekv. rozsahů: 777492 bodů za 17.63 sec -> 44600 bodů za 1 sec -> max. frekvence (Nyquistova) 22300 Hz. Pro okno s 20 body a posunem o 2 body -> 10 frekv. hladin -> 2230 Hz na 1 hladinu

WFT – Vyhlazení signálů

Filtrační schopnosti jednotlivých oken jsme ověřili na dvou signálech: namodelovaném (240 hodnot) a naměřeném (527 hodnot) - záznam důlně indukovaného seismického jevu na stanici Palkovické Hůrky - vznik 6.1.1995 na Dole Lazy



WT - Waveletova transformace - Historie

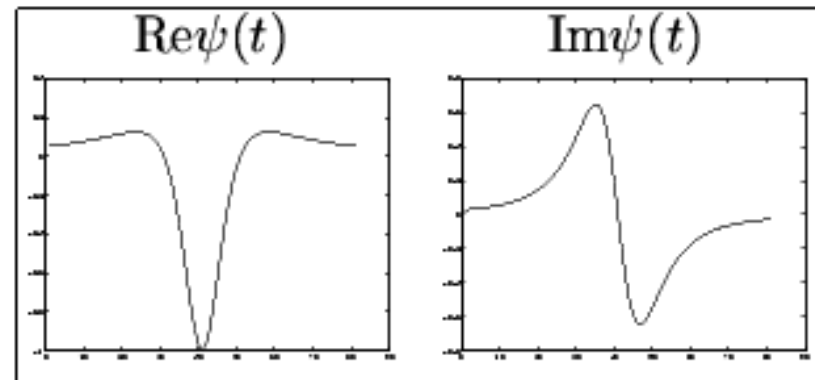
- Novou myšlenkou je nahradit siny a kosiny bloky různých měřítek a pozic – Grossmann a Morlet je nazvali poprvé wavelety – malými vlnkami které začínají a končí a pocházejí z jedné základní fce zvané mateřský wavelet

- Jak se zrodila tato myšlenka?

- 30tá léta – počátek historie – Littlewood, Paley a nezávisle na nich Luzin přicházejí s analýzou a syntézou fci z Hardyho prostorů

$H^P(\mathbb{R}_+^2), 1 \leq P \leq \infty$ užitím integrální transformace $f(x) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{tf(y+it)}{(x-y+it)^2} dy dt, x \in \mathbb{R}$ vyjádřitelné waveletovou transformací

- Luzin za tímto účelem stvořil regulární lokalizovanou fci $\psi(t) = \frac{1}{(t+i)^2}, t \in \mathbb{R}$ splňující wavelet. podmínku $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$



WT - Historie

- 50-60tá léta – Calderon-Zygmundova teorie atomické dekompozice fce na velké množství jednoduchých separátně studovaných – použito pro řešení integrálních a parciálních diferenciálních rovnic
- 1983 Grossmann a Morlet stanovili, že jakákoliv fce z L_2 lze rozvinout ve wavelety, přesněji posuny a dilatace mateřského waveletu – obdoba Gaborova přístupu ale s vylepšeným rozkladem v časové oblasti
- Současně Meyer dokázal (motivován zprac.obrazu), že spojité techniky mají své diskrétní analogie
- Stromberg, Meyer, Lemarie jsou designery ortog.waveletů, ačkoliv prvním byl Haarův z r. 1909
- Velký rozmach waveletů byl způsoben Mallatem, který vypracoval teorii multirozkladové analýzy a algoritmizaci generování wavelet. bází.
- 1988 Daubechies přišla s ortog. bází s kompaktním nosičem s vysokým stupněm regularity, následují biortog., trigonometrické, komplexní atd.
- 1993 Lawton, Lina, Mayrand přišli s komplex. řešením 4 podmínek (ortogonalita, kompaktnosič, maximum nulových momentů, symetrie) využívající parametrizaci multirozkladu:
$$h = \frac{1}{64}(-3 - i\sqrt{15}, 5 - i\sqrt{15}, 30 + i2\sqrt{15}, 30 + i2\sqrt{15}, 5 - i\sqrt{15}, -3 - i\sqrt{15}), \quad h = \frac{1}{4}(1 + i, 1 - i, 1 - i, 1 + i)$$

WT - Motivace

K popisu WT potřebujeme složitější matematický aparát - základem bude tzv. víceúrovňová analýza (Multirozklad $L_2(R)$ - **Multiresolution Analysis**– MRA).

Pokusíme se vysvětlit základy tohoto procesu na jednoduchém příkladu. Představme si, že v supermarketu máme regál (nazveme Hilbertovým prostorem $L_2(D)$), označíme podlahu jako nulovou hladinu $n=0$. Máme k dispozici:

- zásilku zboží (funkce $f(x)$), např. zásilka míčů různé velikosti
- regál je sestaven z jednotlivých polic, každá police tvoří jednu hladinu (V_m). Na každé polici jsou kulaté otvory (jednotlivé elementy báze ϕ_{mn} , m je index police v regálu, n je počet otvorů na polici)
- průměry otvorů jsou stejné na jedné polici (na jedné hladině), ale při přechodu z jedné police na druhou se mění dle vztahu 2^m , $m = 0,1,2,\dots$
 - otvory na nižších policích tedy jsou 2x menší než na horních

Úkolem bude optimální rozklad zboží na policích, tj. aby každý míč byl uložen na příslušné místo, odpovídající jeho průměru.

WT - Motivace

Řešení: Je-li míč menší než otvor, pak tento míč spadne přes otvor na příslušnou polici (na příslušnou hladinu), kde otvor bude menší než průměr míče. Uložit tento míč na nižší polici je ekonomicky nevýhodné - tam může být umístěn míč o menším diametru.....

Proceduru právě tohoto rozložení nazýváme víceúrovňovou analýzou.

Díváme-li se do dalekohledu, mikroskopu, fotoaparátu, snažíme se zachytit ostré a zároveň dostatečně velké zobrazení našeho objektu, přitom automaticky provádíme podobnou analýzu.

Formálně bychom mohli MRA interpretovat následujícím způsobem.

Rozdělíme prostor $L_2(M)$ na podprostory (police):

- $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots$ tj. $V_m \subset V_{m+1}, \forall m \in \mathbb{Z}$
- přičemž úplný prostor $\cup_{m \in \mathbb{Z}} V_m$ představuje $V_\infty = L^2(D)$ (celý regál)
- $V_{-\infty} = 0$ neexistuje žádné zboží, které by se udrželo na horní polici
- $\cap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{ 0 \}$

WT - Motivace

Dodáme ještě další požadavky:

- jestli fce $f \in V_m \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{m+1}$ - fce $f \in V_{m+1}$ obsahuje 2x více bodů než $f \in V_m$ (procedura přeložení míče na nejbližší nižší polici za podmínky, že průměr otvoru je 2x menší než na předchozí polici).
- v prostoru V_0 existuje funkce $\phi \in V_0$, $x \in D$, že její translace $\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$ tvoří bázi prostoru V_0 (police v horizontálním směru vyplní celý prostor bez překrývání a mezer).

Tedy bázi prostoru V_1 : $\{\phi(2x-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ dostaneme z elementů báze prostorů V_0 : $\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ jednoduchým 2x zmenšením posledních.

WT - Waveletova transformace

Definice: Necht' $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$, pak definujme waveletovou transformaci funkce $f(t)$:

$$WT(f) \stackrel{\text{def}}{=} F(a,b) = \hat{f}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \overline{\psi(a(t-b))} \cdot dt$$

kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je dilatační škálový parametr; $b \in \mathbb{R}$ je translační parametr; $\psi(t)$ je mateřský wavelet splňující

$$\psi(t) \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

Pozn.: Základní mateřský wavelet si můžeme představit jako "vlnku" nabývající kladných a záporných hodnot, která nemusí být vůbec symetrická a může být vytvořena pomocí nelineárních kombinací otcovských waveletů

WT - Vlastnosti

Koeficienty waveletové transformace obsahují informaci jak o analyzované fci tak i o waveletu použitém při analýze.

Některé vlastnosti WT jsou nezávislé na typu waveletu. $WT(f) = W(a, b)$

1. **Lineárnost:** $WT(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha WT(f_1) + \beta WT(f_2) = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b)$

2. **Invariance vzhledem k posunutí:** $WT(f(t - b_0)) = W(a, b - b_0)$

3. **Invariance vzhledem k dilataci:** $WT\left(f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right) = \frac{1}{a_0} W\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right)$

4. **Derivování originálu:** $WT\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} f\right) = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{\partial^m}{\partial t^m} (\bar{\psi}_{ab}(t)) \cdot dt$

5. **Analog Parsevalovy věty v případě ortogonální wavelet-báze:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot \bar{f}_2(t) \cdot dt = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(a, b) \cdot \bar{W}_2(a, b) \cdot a^{-2} \cdot da \cdot db$$

\Rightarrow energie signálu (funkce):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \cdot dt = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(a, b)|^2 \cdot a^{-2} \cdot da \cdot db$$

WT – Multirozklad MRA $L_2(\mathbb{R}^n)$

Definice: Multirozkladem $L_2(\mathbb{R}^n)$ (víceúrovňovou analýzou) budeme nazývat neklesající posloupnost uzavřených škálovacích podprostorů $V_m \in L_2(\mathbb{R}^n), m \in \mathbb{Z}$ pro něž platí následující podmínky.

Multirozklad (ortonormální) $L_2(\mathbb{R}^n)$ se skládá z:

(1) uzavřených podprostorů $V_m \in L_2(\mathbb{R}^n), m \in \mathbb{Z}$, pro něž platí podmínky:

(a) $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots$ tj. $V_m \subset V_{m+1}, \forall m \in \mathbb{Z}$
(někteří autoři zapisují $V_{m+1} \subset V_m, \forall m \in \mathbb{Z}$, záleží na označení)

(b) $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$.

(c) $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m$ je hustý a představuje $L_2(\mathbb{R}^n)$, tj. $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = L_2(\mathbb{R}^n)$

(d) $f(\mathbf{x}) \in V_m \Leftrightarrow f(2\mathbf{x}) \in V_{m+1} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

(2) funkce $\phi \in V_0$ takové, že $\{\phi(\mathbf{t} - \mathbf{n})\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}$ je ortonorm. bází V_0

Fce $\phi \in V_0$ se nazývá škálovací fci nebo základní škálovou fci resp.

otcovský wavelet a slouží pro analýzu jednotlivých škál. podprostorů V_m

Pozn.: Existují další definice, které se vztahují k biortog. waveletům, k waveletům v prostoru L_p , k waveletům na distribucích apod.

Základem pro vytvoření diskrétní waveletové transformace DWT je dilatační rovnice tzv.

rovnice soběpodobnosti-škálovací rovnice. Formální řešení této rovnice můžeme sestavit ve tvaru

Four. integrálu, avšak analýza vznikajících fci není vůbec jednoduchá.

WT – Konstrukce ortonorm. waveletů

Matematická konstrukce ortonormálních waveletů s kompaktním nosičem byla provedená I. Daubechies (1988) s použitím teorie MRA.

Nástin tvorby báze pomocí MRA je následující.

- Necht' P_m znamená *ortogonální projekci* f do V_m a D_{2^m} *dilatační operátor*, tj. $f \in D_{2^m} V_n \Leftrightarrow f(2^m \cdot) \in V_{m+n}$

Při zvyšování m , $P_m f$ aproximuje f a nakonec $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m f = f$

Prostor V_m je tvořen škálovými fcemi $\{\phi_{mn}\}_{\forall n}, \forall m \in \mathbb{Z}$

- Jelikož V_m je obsažen v V_{m+1} , můžeme definovat W_m jako m -tý *waveletový prostor* obsahující *waveletové funkce* $\{\psi_{mn}\}_{\forall n}, \forall m \in \mathbb{Z}$ tak, aby byl *ortog. doplňkem* V_m do V_{m+1} , tj. $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$,
 Q_m je *projekční operátor* do W_m - škálované verze W_0 , kde $f \in W_m \Leftrightarrow f(2^{-m} \cdot) \in W_0$. Tedy obdobně W_m je tvořen wavelet. fcemi $\{\psi_{mn}\}_{\forall n}, \forall m \in \mathbb{Z}$.
Pak $P_{m+1} = P_m \oplus Q_m$ je *projekční operátor* do V_{m+1} .

- Základní vlastnost MRA je to, že umožňuje sestavit ortonorm. wavelet. bázi $\{\psi_{mn}\}_{\forall n}, \forall m \in \mathbb{Z}$, kde $\psi_{mn} = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} t - n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ tak, že pro každou $f \in L_2(\mathbb{R})$ platí: $f_{m+1} = P_{m+1} f = P_m f + Q_m f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{mn} \rangle \phi_{mn} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{mn} \rangle \psi_{mn}$

WT – Konstrukce ortonorm. waveletů

- Hledáme fci $\psi \in W_0$ tak, aby $\{\psi(t-n)\}_n$ tvořilo ortonorm. bázi W_0 , $W_{m+1} = D_2 W_m$ a $\{D_{2^m} \psi(t-n)\}_n$ bylo ortonorm. bází W_m .
 Jelikož $W_m \perp V_m$, $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$ a $L_2 = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m$, $W_{m+1} \perp W_m$ a $L_2 = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W_m$ pak $\{D_{2^m} \psi(t-n)\}_{m,n}$ je ortonorm. bází L_2 .
 Ortonormalita je zde zaručena na jednotlivých úrovních m :

$$\langle \phi_{mk}, \phi_{ml} \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, k = l \\ 0, k \neq l \end{cases}$$

pro skalární součiny mezi sousedními úrovněmi platí $\langle \phi_{mk}, \phi_{m+1,l} \rangle = h_{l-2k}, k, l \in \mathbb{Z}$
 přitom $\sum_{\forall k} h_k^2 = 1$.

- Konstrukce ψ je dána následující procedurou.
 Necht' $l_2(\mathbb{Z})$ **diskrétní analog** prostoru $L_2(\mathbb{R})$. Je-li $\phi \in V_0 \subset V_1$ a $\{\phi(2t-n)\}$ je ortonormální bází V_1 , pak posloupnost koeficientů $h_n \in l_2(\mathbb{Z})$ splňuje *dilatační rovnici* $\phi(t) = \sum h_n \phi(2t-n)$ resp. $\phi(t) = \sqrt{2} \sum h_n \phi(2t-n)$
 Vyřešení této rovnice odstartovalo konstrukci ortonorm. wavelet. báze.
 Zde h_n jsou škálovací filtrační koeficienty zaručující ortonormalitu, má-li $\phi(t)$ kompaktní nosič, pak počet těchto nenul. koef. je nenulový.

WT – Konstrukce ortonorm. waveletů

Definujme $\psi(t) = \sum (-1)^n h_{1-n} \phi(2t-n)$ resp. $\psi(t) = \sqrt{2} \sum (-1)^n h_{1-n} \phi(2t-n)$,
 $\phi_{mn} = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t-n)$ pak právě wavelety $\psi_{mn} = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t-n)$, $m, n \in \mathbf{Z}$
tvoří waveletové prostory W_m ... tyto wavelet. báze nazýváme
Daubechiesové - tyto wavelety nemají žádné osy symetrie.

Lze ukázat, že $\{\psi(t-n)\}$ je ortonorm. bází pro W_0 .

W_m jsou tedy vzájemně ortog., čímž je zaručena ortogonalita
(ortonormalita) waveletů i mezi různými úrovněmi m .

Některé další podmínky pro sestavení waveletů (nejsou nutné):

- $\int_{\mathbf{R}} \phi(t) dt = 1$, zde ϕ lze chápat jako prostor. hustotu rozdělení pravděp.
náhodné veličiny t za podmínky, že $\phi(t) \geq 0, t \in \mathbf{R}$.

Uvažujeme-li, že stř. hodnota náhodné veličiny t je 0 a její rozptyl 1,

pak $\int_{\mathbf{R}} t \cdot \phi(t) dt = 0$, $\int_{\mathbf{R}} t^2 \cdot \phi(t) dt = 1$

- $\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = \int_{\mathbf{R}} t^k \psi(t) dt = 0$ momenty k -tého stupně,

- pro $\psi(t) \geq 0: \int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 1$

- podmínka na symetrii apod.

WT – Konstrukce ortonorm. waveletů

Budeme se snažit nalézt škálovací fci tvořící ortonorm. multirozklad. Nejdříve najdeme filtrační koeficienty, které prostřednictvím dilatační rovnice budou definovat škálovací fci s požadovanými vlastnostmi. Kromě ortogonality budeme ještě chtít aby fce měla *kompaktní nosič*.

Číselné hodnoty filtrač. koef. jako 1. spočítala Ingrid Daubechies (1988). Ortonorm. wavelety s $2N = M$ nenulovými filtrač. koef. ... se značí DN (dbN) resp. D2N (db2N).

Např. wavelet D1 je „ortogonální“ wavelet 1. řádu - Haarův wavelet.

Škálovací filtrač. koef. (koeficienty projekčního operátoru v prostoru škálovacích fci) budeme značit h_n viz. dilatační rovnice:

$$h = (0,0,\dots, h_0, h_1, \dots, h_{2N-1}, 0,0,\dots) = (0,0,\dots, h_0, h_1, \dots, h_{M-1}, 0,0,\dots)$$

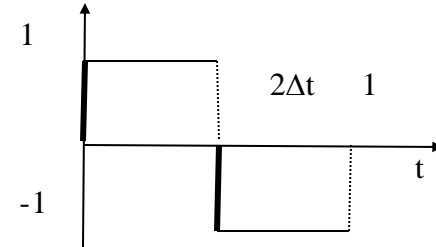
Waveletové filtrač. koef. (koeficienty projekčního operátoru v prostoru wavelet. fci) g_n : $g = (0,0,\dots, g_0, g_1, \dots, g_{M-1}, 0,0,\dots)$

V důsledku ortogonality vektoru h a g na všech hladinách i mezi hladinami rozkladu koeficienty g_n vypočteme ze vztahu: $g_n = (-1)^n h_{M-1-n}$

WT – Konstrukce -Příklad

Ortonorm. báze $L_2(\mathbb{R})$ vytvořená jediným mateřským waveletem je Haarův systém, kde platí

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases}$$



Prvky této báze nejsou hladké křivky a mají **rozptyl** $1/\omega$ frekv. rozsahu. Při $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow \omega \rightarrow \infty$, při $t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \omega \rightarrow 0$.

Pro Haarovu ortonorm. bázi škálovací filtrační koeficienty jsou $\mathbf{h} = (h_0, h_1)$, wavelet. filtrač. koef. $\mathbf{g} = (g_0, g_1)$ jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned} h_0^2 + h_1^2 &= 1 \\ g_0 + g_1 &= 0 \end{aligned}$$

První rovnici sestavíme na základě podmínky na hladině s indexem m : $\|\mathbf{h}\|^2 = \langle \mathbf{h}_m, \mathbf{h}_m \rangle = 1$, druhou rovnici sestavíme použitím vlastnosti $\int \psi(t) dt = 0$

v diskrétním tvaru: $\sum_k g_k = 0$, jelikož $g_n = (-1)^n h_{2^{-1}-n} \Rightarrow g_0 = h_1, g_1 = -h_0$, pak soustavu přepíšeme: $h_0^2 + h_1^2 = 1$. Řešením bude $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, g_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

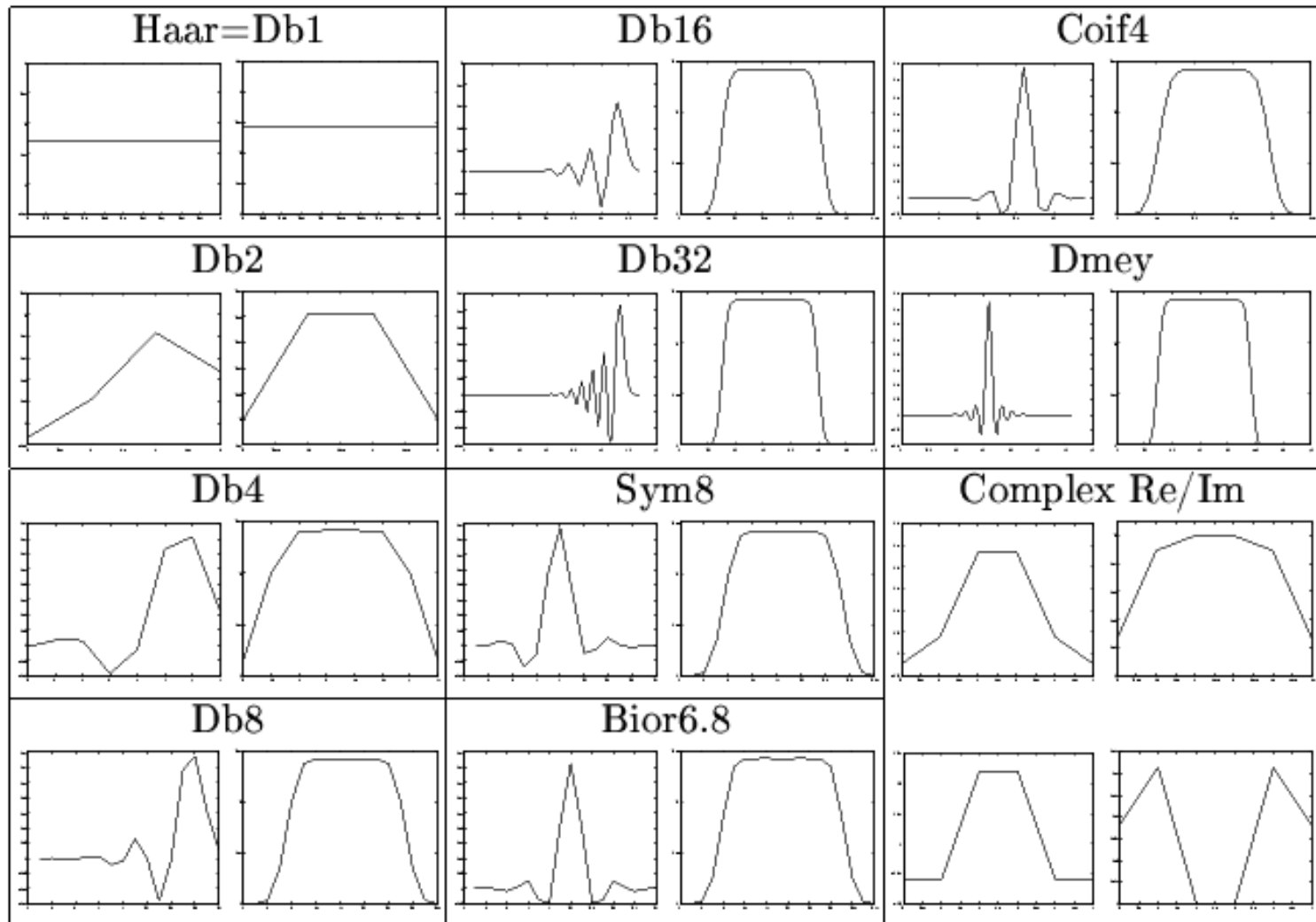
$$h_0 - h_1 = 0$$

V případě ortog. báze: $h_0^2 + h_1^2 = 2$. Řešením bude $h_0 = h_1 = 1 \Rightarrow g_0 = 1, g_1 = -1$.

$$h_0 - h_1 = 0$$

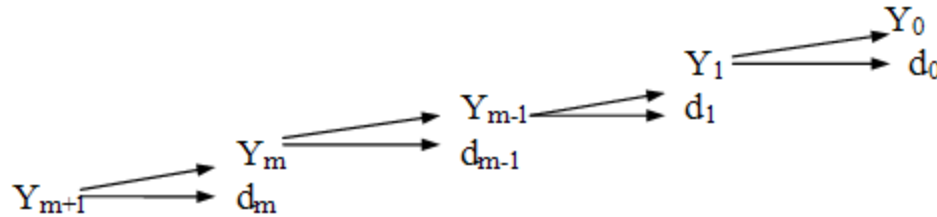
Přehled škálových fcí-otecvských waveletů v časové a frekvenční oblasti

nízko frekv. filtr a jejich FT:

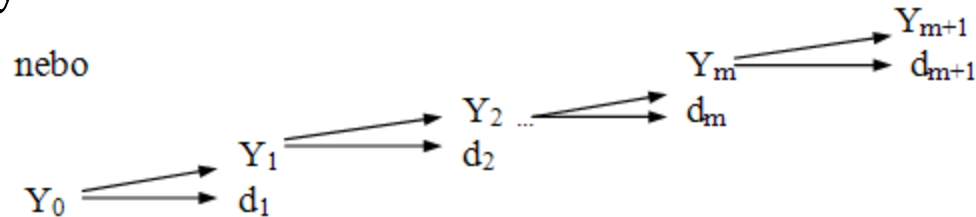


WT – Multirozkłady

Rozklad signálu Y lze znázornit ve tvaru binárního grafu :



- vstupní signál označen Y_{m+1}
- m - index transformační hladiny (frekvenční), **větší** index „charakterizuje“ **větší frekvence a menší měřítko**, tj. hladinu s větší rozlišovací schopností.
- Y_m - komprimovaný signál (aproximace signálu, trendová část) na hladině m ,
- d_m - ortogonální doplněk na hladině m , který zachycuje odlišnosti, jemnosti.
- Y_0 – komprimovaný signál na poslední hladině rozkladu.



- vstupní signál označen Y_0
- m - index transformační hladiny (frekvenční), **větší** index „charakterizuje“ **menší frekvence a větší měřítko**, tj. hladinu s menší rozlišovací schopností.
- Y_m - komprimovaný signál (aproximace signálu, trendová část) na hladině m ,
- d_m - ortogonální doplněk na hladině m , který zachycuje odlišnosti, jemnosti.
- Y_{m+1} – komprimovaný signál na poslední hladině rozkladu.

DWT – Mallatův algoritmus - FWT

Mallatův algoritmus (pyramidální, kaskádový) je sestaven pro případ ortog. waveletů a často je nazýván rychlá wavelet. transformace (FWT). Algoritmus vyžaduje, aby vstupní vektor obsahoval počet vstupních hodnot 2^n nebo $k \cdot 2^n$, k, n jsou celá kladná čísla.

Nechť vstupní diskrétní data jsou: $\mathbf{y} = \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$

DWT je operátor $DT : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z}^2)$ definovaný pro $Y \in L_2(\mathbb{R})$ předpisem $(DTY)_{mn} = d_n^m = \langle Y, \psi_{mn} \rangle$... výpočet wavelet. koef. určujících rozklad Y do W_m . Sestavíme pomocnou funkci, která aproximuje vstupní vektor:

$$Y = \langle y, \phi_0 \rangle = \sum_{\forall n \in \mathbb{Z}} y_n \phi_{0n}, \quad \phi_0 \in V_0$$

Pomocí operátoru ortog. projekce $P_{m-1} = P_m + Q_m$ do V_{m-1} lze Y rozložit: $Y_{m-1} = P_m Y + Q_m Y$ zde $P_m Y = \sum_{\forall n} \langle Y, \phi_{mn} \rangle \phi_{mn}$, $Q_m Y = \sum_{\forall n} \langle (Y, \psi_{mn}) \rangle \psi_{mn}$

Přirozeně nás budou zajímat koeficienty těchto projekcí.

Aproximační koef. označíme $a_m = \langle Y, \phi_{mn} \rangle$, určují celkový trend vstup. dat
Waveletové koef. $d_m = \langle Y, \psi_{mn} \rangle$ obsahují doplň. informaci o „jemnostech“ na jednotlivých úrovních.

Množina vypočtených koeficientů a_m, d_m tvoří *waveletové spektrum*.

DWT – Mallatův algoritmus

Konkrétní hodnoty filtrač. škálovacích parametrů (Daubechiesovské) jsou publikované pro 2,4,...,20 nenulových hodnot.

Příklad 4 nenul. parametrů pro dilatační rovnici tj. pro Daub. wavelety

2.řádu: $h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ $h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ $h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ $h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ ostatní $h_n = 0$

Výpočet těchto koef. lze provést obdobně jako u D1 (Haarův wavelet):
v důsledku ortonormality budou platit rovnosti

$$h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1$$

$$h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0$$

doplněné rovnicemi na nulovost 0-tého a 1-ního momentu

$$h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1$$

$$h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0$$

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2}$$

$$0h_0 - 1h_1 + 2h_2 - 3h_3 = 0$$



soustava 4 rov. o 4 neznámých
2 sady koeficientů

$$h_0 - h_1 + h_2 - h_3 = 0$$

$$0h_0 - 1h_1 + 2h_2 - 3h_3 = 0$$



soustava 4 rov. o 4 neznámých
4 sady koeficientů

DWT – Mallatův algoritmus

Obecně pro výpočet škál. parametrů lze sestavit následující soustavu rovnic:

- v důsledku ortogonalit: $\sum_{k=0}^{2N-1} h_k \cdot h_{k+2l} = \delta_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad \text{zde} \quad \delta_l = \begin{cases} 1, l = 0, \\ 0, l \neq 0. \end{cases}$
- z hlediska normování (omezení) : $\sum_{k=0}^{2N-1} h_k = \sqrt{2}$
- nulovost momentů m -tého stupně zajistíme $\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k \cdot k^m h_k = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$
- rovnice $\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k h_k = 0$ použitá v 1. soustavě jako 3., bude pak lineární kombinací uvedených rovnic.

Tyto koef. použijeme pro popis algoritmu přímé wavelet. transformace a zpětné wavelet. transformace, tj. pro výpočet časově-frekv. spektra a pro rekonstrukci signálu pomocí vyhlazovacího algoritmu.

V důsledku ortogonalit koef. pro výpočet doplňkové informaci při daných filtračních parametrech budou g_0, g_1, g_2, g_3

$$g_n = (-1)^n h_{3-n} : g_0 = h_3, g_1 = -h_2, g_2 = h_1, g_3 = -h_0, \quad \sum_{\forall n} g_n = 0$$

Při výpočtu budeme přecházet na hladiny s vyšším indexem - čím menší index hladiny, tím větší frekvence charakterizuje.

DWT – Mallatův algoritmus

- Operátor P_m je tvořen pomocí škál. fcí ve tvaru matice $\mathbf{P}=\mathbf{H}$ obsahující filtrač. škál. koef. h . Pro Haarův wavelet: $(h_0, h_1)^T = (1, 1)^T$.
- Operátor Q_m je tvořen pomocí wav. fcí ve tvaru matice $\mathbf{Q}=\mathbf{G}$ obsahující filtrač. wavelet. koef. g . Pro Haarův wavelet: $(g_0, g_1)^T = (1, -1)^T$.

Při přechodu na 1. hladinu rozkladu (nižší frekv. hladinu) dostaneme aproximační koeficienty ve tvaru: $\mathbf{y}_n^1 = (\mathbf{Y}, \phi_0) = \sum_{l=1}^{l=N-1} y_l h_{l-2n}$ $l=0, 1, \dots, N-1,$
 $n=0, 1, \dots, N/2 - 1$
 Maticový tvar uvedeného kroku:

$$\mathbf{H}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \\ h_3 & h_4 & 0 & \dots & \dots & 0 & h_0 & h_1 \end{pmatrix} (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$$

Matice \mathbf{H} je řádu $N/2 \times N$. Výsledkem je vektor obsahující počet prvků $N/2$. Obsahuje ve zhuštěné formě informaci ze vstupního vektoru (aproximační, nízkofrekvenční). Dochází ke kompresi dat v důsledku průměrování s určitou váhou.

Obdobně wavelet. koef. spektra: $\mathbf{d}_n^1 = (\mathbf{Y}, \psi_0) = \sum_{l=1}^{l=N-1} y_l g_{l-2n}$

$$\mathbf{G}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \\ g_3 & g_4 & 0 & \dots & \dots & 0 & g_0 & g_1 \end{pmatrix} (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$$

Je-li vstupní signál dostatečně hladký, tj. vstupní vektor se mění pozvolna, vektor obsahuje hodnoty blízké nule, dojde-li ve vstupním vektoru k výraznému lokálnímu skoku, projeví se poslední většími hodnotami vektoru. Matice \mathbf{G} je řádu $N/2 \times N$, tvořená koeficienty g , obdobně jako matice \mathbf{H} ,

DWT – Mallatův algoritmus

- 1.krok výpočtu aproximač. a wavelet. koef. spektra při kompresi dat:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^1 \\ \mathbf{d}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{M} \mathbf{y}$$

Matrice \mathbf{M} je typu $N \times N$, přičemž v případě reálných ortog. wavelet matice \mathbf{M} je regulární, ortogonální a její matice inverzní se rovná $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$.

- 2.krok: při přechodu na další hladinu budeme pracovat s vektorem \mathbf{y}^1 , který obsahuje $N/2$ hodnot :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^2 \\ \mathbf{d}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 \\ \mathbf{G}^1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^1 = \mathbf{M}^1 \mathbf{y}^1$$

Matrice \mathbf{H}^1 je řádu $N/4 \times N/2$. Výsledkem je vektor \mathbf{y}^2 obsahující $N/4$ prvků, charakterizuje aproximační část. Matice \mathbf{G}^1 je řádu $N/4 \times N/2$. Výsledkem je vektor \mathbf{d}^2 obsahující $N/4$ prvků, charakterizuje doplňkovou část.

- $i+1$.krok: vstupní vektor lze komprimovat na požadovaný počet bodů při požadavku, že aprox. část nesmí být menší než nosič

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^{i+1} \\ \mathbf{d}^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^i \\ \mathbf{G}^i \end{pmatrix} \mathbf{y}^i = \mathbf{M}^i \mathbf{y}^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, L.$$

Výsledkem této procedury jsou vektory $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2, \dots, \mathbf{d}^L, \mathbf{y}^L$ popisující časově-frekv. spektrum vstupního signálu.

Chceme -li rekonstruovat původní vektor \mathbf{y} pomocí $\mathbf{y}^1, \mathbf{d}^1$: $\mathbf{y} = \mathbf{M}^T \begin{pmatrix} \mathbf{y}^1 \\ \mathbf{d}^1 \end{pmatrix}$
 Rekonstrukci vstup. vektoru (zpětná nebo inverzní WT) :

$$\mathbf{y}^{i-1} = (\mathbf{M}^i)^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{y}^i \\ \mathbf{d}^i \end{pmatrix}, \quad i = L, L-1, \dots, 1 \qquad \mathbf{y} = \mathbf{y}^0 = \mathbf{M}^T \begin{pmatrix} \mathbf{y}^1 \\ \mathbf{d}^1 \end{pmatrix}$$

DWT – Multirozklad - Příklad

Nechť vstupní vektor $\mathbf{f} = \mathbf{Y} = (3, 1, 6, 2, 3, 7, 9, 5)$

- Nejprve vytvoříme matici $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, která bude tvořena pomocí škálovacích a wavelet. filtrač. koef. posouvaných o 2 hodnoty.
- První 4 řádky budou obsahovat škálovací koef., další 4 řádky filtrač. wavelet. koef.
- Vytvořená báze již není tvořena Haarovými koeficienty, ale je tvořena pomocí škálovacích a waveletových filtračních koeficientů.

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 0100 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0010 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0001 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{Q}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1000 \\ -1000 \\ 0100 \\ 0-100 \\ 0010 \\ 00-10 \\ 0001 \\ 000-1 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 01 \\ 01 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 01 \\ 0-1 \end{pmatrix}^T$$

Přímá:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11000000 \\ 00110000 \\ 00001100 \\ 00000011 \\ 1-1000000 \\ 001-10000 \\ 00001-100 \\ 0000001-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{d}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1100 \\ 0011 \\ 1-100 \\ 001-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}$$

Zpětná:

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{M}_2^T \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1010 \\ 1010 \\ 0101 \\ 010-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{Y} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 10001000 \\ 1000-1000 \\ 01000100 \\ 01000-100 \\ 00100010 \\ 001000-10 \\ 00010001 \\ 0001000-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

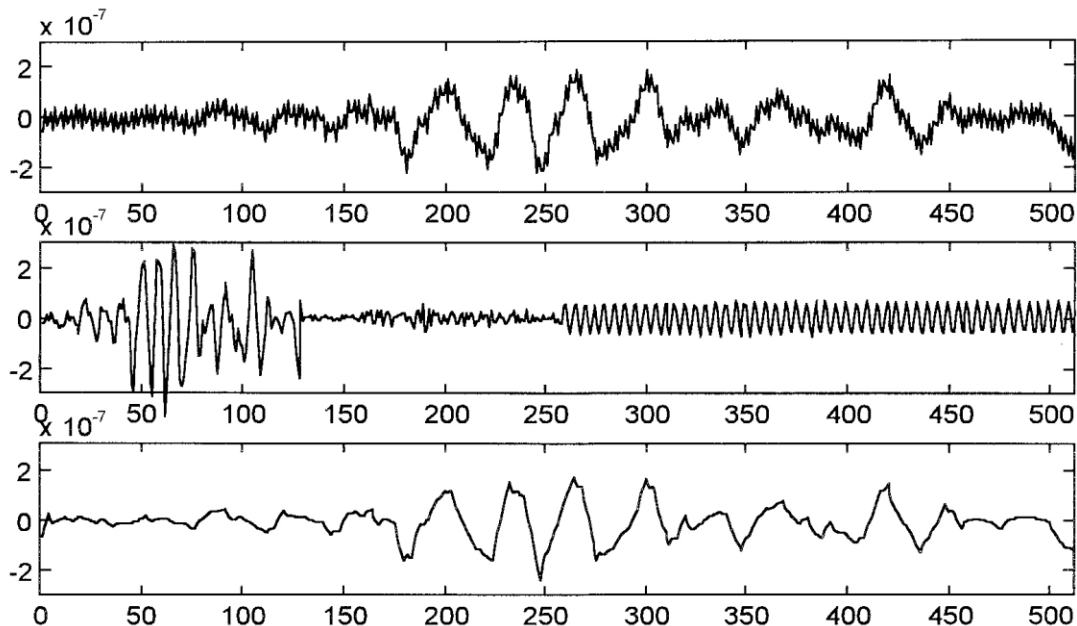
DWT – Poznámka

Vedle uvedeného algoritmu (**Standardní DWT**) existuje **Stacionární DWT**, kde nedochází ke kompresi. Při sestavení algoritmu v matici **M** se nepoužívá posuv o 2 místa, ale posuv jen o 1 místo resp. vložení 0.

Matici **M** rozložíme na 2 matice **H**, **G**, které sestavíme z filtrač. koef. s posunem jen o 1 místo resp. při sestavení matic **H**, **G** za každý filtrační koef. vložíme 0, pak provedeme posun o 2 místa.

Pak $y^1 = Hy$, $d^1 = Gy$ budou vektory stejné délky jako vstupní signál.

Příklad



Reálný seismický signál Y

Výsledné wavelet. koef. rozkladu
 $WT(Y)$ na 2 hladiny

Rekonstruovaný signál po filtraci
pomocí kvantilového prahování

DWT – Paketový rozklad

Podstata paketového rozkladu je v tom, že můžeme stejným způsobem pracovat s vektory \mathbf{d}^i . Např. při 1.kroku rozkladu: vzniknou $\mathbf{y}^1, \mathbf{d}^1$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^1 \\ \mathbf{d}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{M} \mathbf{y}$$

aproximační část dále rozložíme uvedeným způsobem: $\begin{pmatrix} \mathbf{y}^2 \\ \mathbf{d}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 \\ \mathbf{G}^1 \end{pmatrix} \mathbf{y}^1 = \mathbf{M}^1 \mathbf{y}^1$

obdobně rozložíme i doplňkovou část:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}^{1,1} \\ \mathbf{d}^{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 \\ \mathbf{G}^1 \end{pmatrix} \mathbf{d}^1 = \mathbf{M}^1 \mathbf{d}^1$$

Výsledkem bude posloupnost tvořena $\mathbf{y}^2, \mathbf{d}^2, \mathbf{d}^{1,1}, \mathbf{d}^{1,2}$.

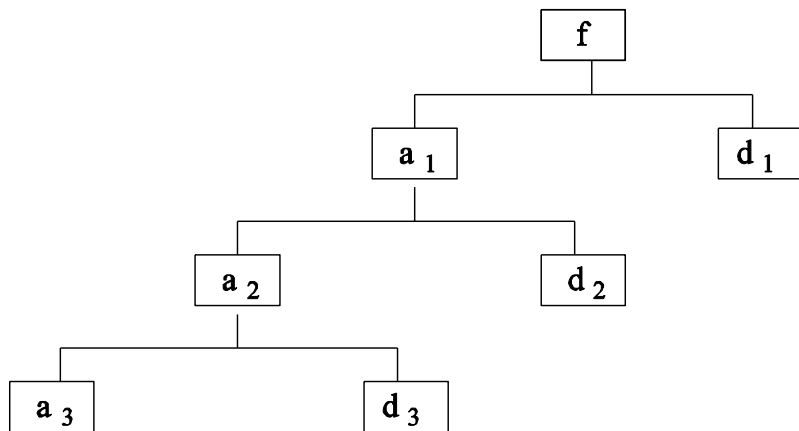
Definice: Necht' soustava dyadických disjunktních intervalů

$I_{j,n} = \{2^j \cdot n, 2^j \cdot (n+1)\}$, $(j,n) \in P \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ pokrývá celý interval $[0, \infty)$,
pak úplná soustava ortonormálních waveletů $\{W_{j,n,k}(t), (j,n) \in P, k \in \mathbb{Z}\}$ tvoří
ortonormální bázi $L_2(\mathbb{R})$ a reprezentuje fci $f(t) = \sum_{(j,n) \in P} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,n,k} \cdot W_{j,n,k}(t)$.

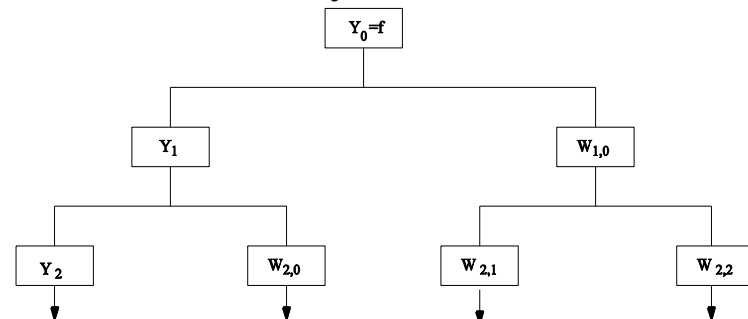
Waveletové rozklady

Princip pyramidálního algoritmu:

Multirozklad



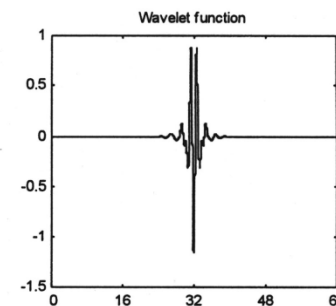
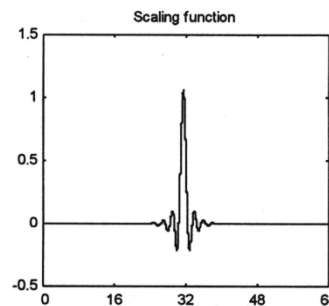
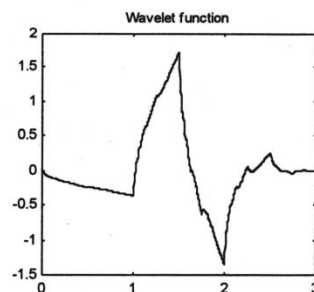
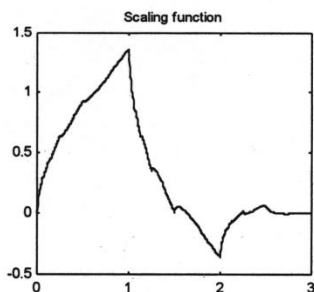
Paketový rozklad



- diskrétní Daubechies (db2 - 4 koeficienty) a Meyer (dmey - 61 koeficientů) wavelet:

Daubechies Wavelet db2

Discrete Meyer Wavelet dmey



Pozn.: výběr waveletové báze je velmi důležitý a ovlivňuje výsledky zpracování. Obvykle se waveletová báze volí tak, aby se co nejvíce podobala zpracovávanému signálu – lépe zachycuje frekvence. Při okenní transformaci jsou odstraněny vysoké frekvence (dochází k vyhlazení), zatímco u waveletové transformace jsou zachyceny všechny frekvence. Waveletová transformace se hodí jak pro stacionární tak pro nestacionární signály.

Aproximační vlastnosti waveletů

Dnes existuje celá řada různých hledisek, dle kterých lze wavelety dělit na spojité, diskrétní, lineární, harmonické, ortogonální, biortogonální, s kompaktním nosičem a jiné.

Lze však vyčlenit 3 základní parametry, podle nichž lze hodnotit aproximační vlastnosti waveletů, parametr:

L stupeň lokalizace

C kolik prvních momentů je nulových

S hladkost - do které množiny fcí příslušná škálová fce patří

• stupeň lokalizace L : platí-li pro $\varphi(t)$

a) $|\varphi(t)| \leq c_n(\varphi) \cdot |t|^n$, pak značíme $L = n$

b) platí-li nerovnost a) pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $L = \infty$

c) $|\varphi(t)| \leq c(\varphi) \cdot e^{-\gamma|t|}$, pak $L = (e, \gamma)$

d) je-li finitní, pak $L = \varphi$

• momenty k -tého stupně C : $M_k \stackrel{\text{def}}{=} \int t^k \cdot \varphi(t) \cdot dt$, $k = 0, 1, \dots, n$

a) nabývá-li k hodnot $0, 1, \dots, n$, pak značíme $C = n$

b) nabývá-li k všech hodnot n , kde $n \in \mathbb{N}$, pak $C = \infty$

Aproximační vlastnosti waveletů

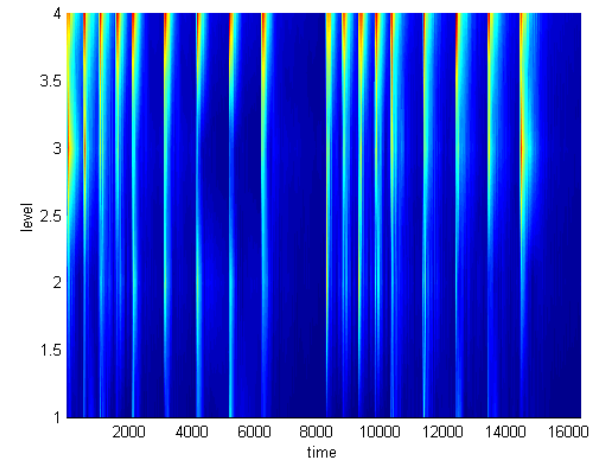
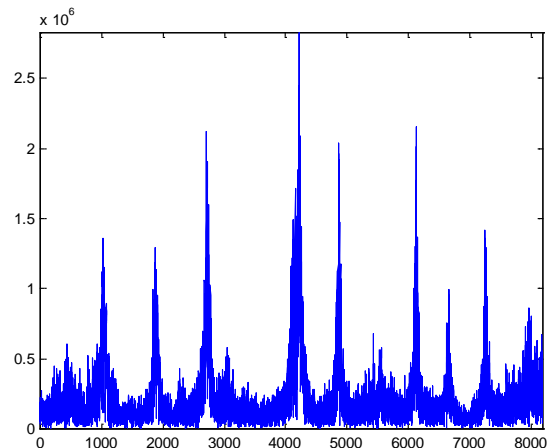
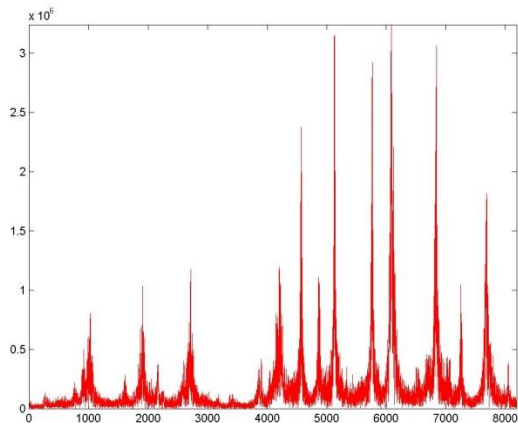
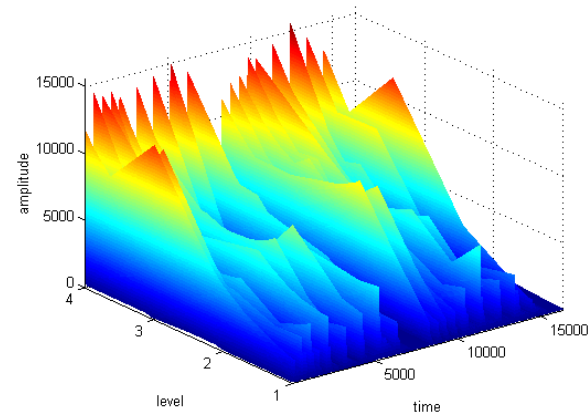
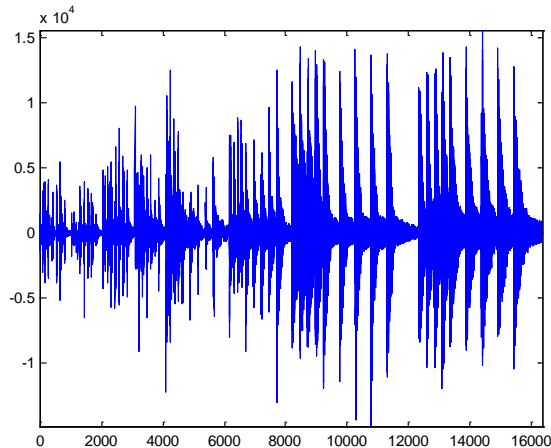
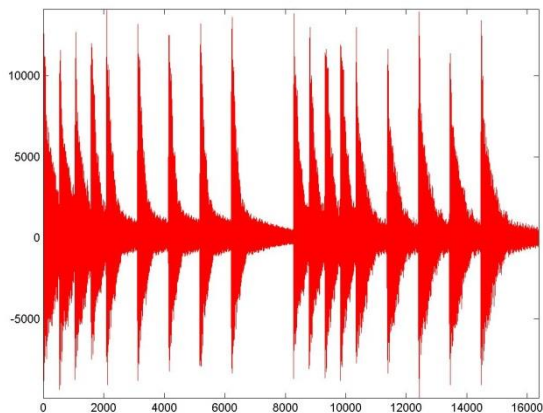
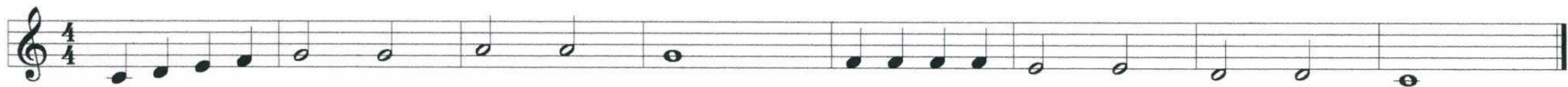
- hladkost S :
 - a) existuje-li n spojitých derivací ($\varphi \in C^n$), pak značíme $S = n$
 - b) existují-li všechny spojitě derivace ($\varphi \in C^\infty$), pak $S = \infty$
 - c) je-li fce analytická, pak $S = a$.

Klasifikace waveletů na základě škálových funkcí $\varphi(t)$:

φ	L	C	S	poznámka
Meyer	∞	∞	a	nemá kompaktní nosič, ale FT φ_M má kompaktní nosič
Daubechies	φ	n	n	má kompaktní nosič (reálné funkce, finitní), ortogonální
Battle	e	n	n	nemá kompaktní nosič, ale FT φ_0 má kompaktní nosič
Kravčenko	e	∞	∞	ortogonální a atomární (lokalizované)

Tab. 4.

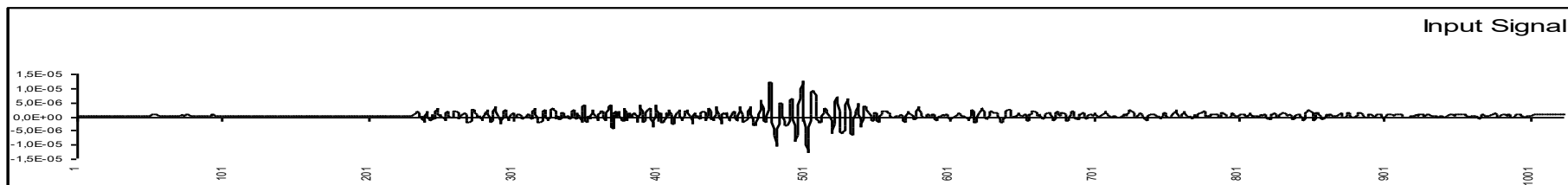
Příklad – Db2 – multirozklad a cfs



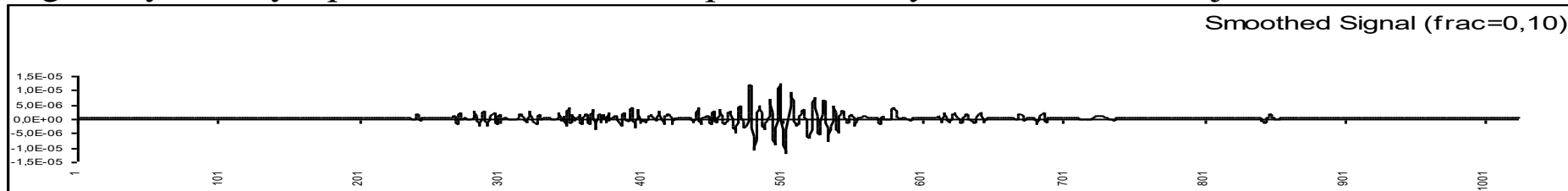
Ukázka přepočtu frekv. rozsahů: 3 úroňový multirozklad -> 4 frekv. hladiny
odpovídající a_3, d_3, d_2, d_1 -> 1.hladina a_3 0-2756,25 Hz, 2.hladina d_3 2756,25-5512,5
Hz, 3.hladina d_2 5512,5-11025 Hz, 4.hladina d_1 11025-22050 Hz

DWT – Paketový rozklad - Příklad

Vstupní seismický signál na stanici Opava 1:



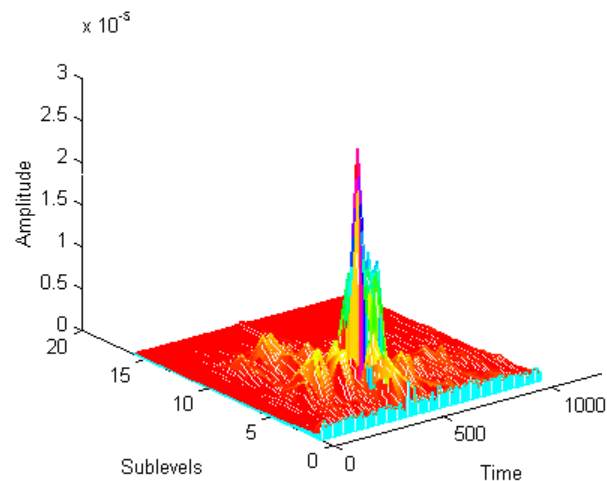
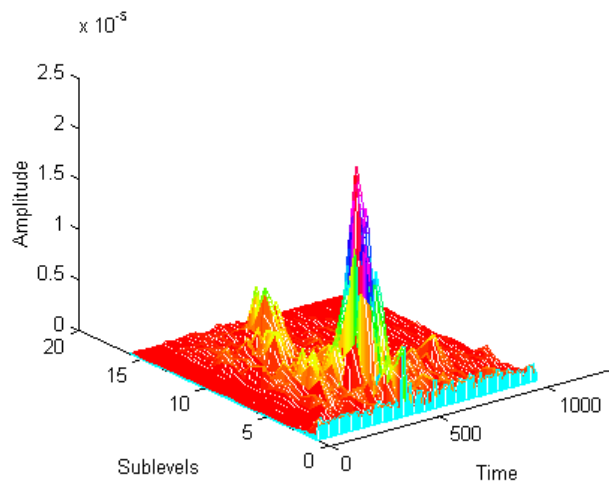
Signál vyhlazený s použitím kvantilového prahování, vynulováno 10% nejmenších koeficientů:



Waveletový paketový rozklad - signál Opava1Z (amplitudové spektrum)

DB2

DMEY



WT – 2D

Triviální způsob vytvoření 2D ortonorm. wavelet-báze použitím ortonorm. 1D wavelet-báze $\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n)$ je založen na jejich tenzorovém součinu: $\psi_{m_1, n_1, m_2, n_2}(t_1, t_2) = \psi_{m_1, n_1, m_2, n_2}(x, y) = \psi_{m_1, n_1}(x) \cdot \psi_{m_2, n_2}(y)$
 V nové bázi proměnné x, y mají různé koeficienty dilatace.

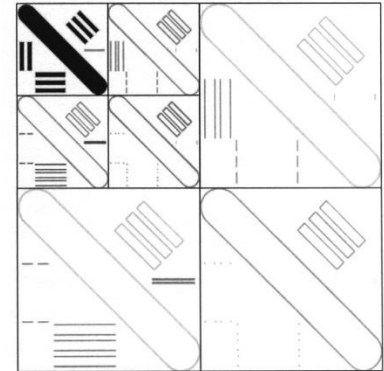
Jiná konstrukce: 2D wavelet je tvořen jako $\psi_{m,n}(x, y) = 2^m \psi(2^m x - n, 2^m y - k)$
 proměnné x, y mají v nové bázi stejné koeficienty dilatace.

Funkce ψ v tomto případě je tvořena 3 elementárními wavelety:

$$2^m \psi_1(2^m x - n) \cdot \psi_2(2^m y - k), \quad 2^m \psi_2(2^m x - n) \cdot \psi_1(2^m y - k), \quad 2^m \psi_2(2^m x - n) \cdot \psi_2(2^m y - k)$$

Analýza se provádí v horizont. směru, ve vert. a po diagonále

Na obrázku je znázorněno rozložení wavelet. koef. geometr. objektů při různých úrovních rozkladu $m=1, m=2$ ale při stejných dilatačních koeficientech



Při dekompozici (rozkladu) $f(x, y)$ (matice) použijeme 1D WT nejdříve na řádky (sloupce) a pak na sloupce (řádky).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(1)} & \mathbf{A}_{12}^{(1)} \\ \mathbf{A}_{21}^{(1)} & \mathbf{A}_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_m^{(1)} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{M}_n^{(1)})^T \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{M}_m^{(1)} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{M}_n^{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{H}_m, \mathbf{G}_m \in \mathbb{R}^{\frac{m}{2} \times m}, \mathbf{H}_n, \mathbf{G}_n \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2} \times n}$$

$$\mathbf{A}_{11}^{(1)} = \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{H}^T, \mathbf{A}_{12}^{(1)} = \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{G}^T, \mathbf{A}_{21}^{(1)} = \mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{H}^T, \mathbf{A}_{22}^{(1)} = \mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{G}^T$$

CVIČENÍ 8 - Okna

```

disp('-----')
disp(' O K E N N I   T R A N S F O R M A C E')
disp(' NABIDKA OKEN:')
disp(' 1.RECTANGULAR      7.TUKEY      13.SINUS-CARDINALIS ')
disp(' 2.BLACKMANN-HARRIS  8.RADAR      14.PARSEN1 ')
disp(' 3.HAMMING           9.BARLETT    15.PARSEN2 ')
disp(' 4.HANNING           10.TRIANGULA R ')
disp(' 5.PLOCHY VRCH       11.CHEBYSHEV ')
disp(' 6.KAISER-BESSEL     12.GAUSS ')
disp('Pozn.: Okna c.1-7 jsou specialni pripady zobecneneho KOSINOVEHO okna')
disp('-----')
cg=input('Zadejte poradove cislo okna pro okenni transformaci : ');
N=20;
if (cg==1) g=gcw(N,1,1,0,0,0); nazev='Obdelnikove okno';end
if (cg==2) g=gcw(N,1,1,1.36109,0.39381,0.03256,0);nazev='Blackmann-Harrisovo okno';end
if (cg==3) g=gcw(N,1,1,0.84,0,0,0); nazev='Hammingovo okno';end
if (cg==4) g=gcw(N,1,1,1,0,0,0); nazev='Hanningovo okno';end
if (cg==5) g=gcw(N,1,1,1.93,1.29,0.388,0.0322); nazev='Plochy vrch';end
if (cg==6) g=gcw(N,1,1,1.29,0.244,0.00305,0); nazev='Kaiser-Besselovo okno';end
if (cg==7) g=gcw(N,1,0.54,0.46,0,0,0); nazev='Tukyovo okno';end
if (cg==8) g=radar(N-1); nazev='Radarove okno';end
if (cg==9) g=bartlett(N); nazev='Bartlettovo okno';end
if (cg==10) g=triang(N); nazev='Trojuhelnikove okno';end
if (cg==11) g=chebwin(N-1,30); nazev='Chebyschovo okno';end
if (cg==12) g=gauss(N-1,1); nazev='Gaussovske okno';end
if (cg==13) g=sincard(N); nazev='Sinus-cardinalis okno';end
if (cg==14) g=parsen1(N-1,2); nazev='Parsenovo1 okno';end
if (cg==15) g=parsen2(N-1,2); nazev='Parsenovo2 okno';end

```

```

% Normovani okna
g=g/norm(g,2);
figure
plot(g);

```

```

% Fourieruv obraz okna

```

```

G=fft(g);
fwin=abs(G(1:N/2));
fw=[];
for i=1:N/2
    fw=[fwin(i) fw fwin(i)];
end;
figure
plot(1:N,fw);

```

```

function g=gcw(N,k,a0,a1,a2,a3,a4)

```

```

t=2*pi/(N-1);

```

```

for i=1:N

```

```

    g(i)=k*(a0-a1*cos(t*(i-1))+a2*cos(2*t*(i-1))-a3*cos(3*t*(i-1))+a4*cos(4*t*(i-1)));

```

```

end

```

```

function g=parsen1(N,q)

```

```

t=(-N/2:N/2);

```

```

for i=1:N+1

```

```

    g(i)=1-(abs(t(i))/(N/2))^q;

```

```

end

```

```

function g=parsen2(N,q)

```

```

t=(-N/2:N/2);

```

```

for i=1:N+1

```

```

    g(i)=1/(1+(abs(t(i))/(N/2))^q);

```

```

end

```

```

function g=radar(N)

```

```

krok=2/(N-1);

```

```

for i=1:N+1

```

```

    t(i)=(i-N/2-1)*krok;

```

```

    g(i)=1+cos(pi*t(i));

```

```

end

```

```

function g=sincard(N)

```

```

t=(-3:(6/(N-1)):3);

```

```

g=sinc(t);

```

CVIČENÍ 8 - Okna

```
% *****
% casove frakvencni spektrum superponovaneho signalu s prvocisel. frekvencemi
% cfs.m
% x1=0*pi:2*pi/100:2*pi;
% x2=2*pi:2*pi/100:4*pi;
% x3=4*pi:2*pi/100:6*pi;
% f=[sin(13*x1)+0.8*sin(23*x1)+0.6*sin(33*x1) sin(13*x2)+0.8*sin(23*x2)+
    +0.6*sin(33*x2) sin(13*x3)+0.8*sin(23*x3)+0.6*sin(33*x3)];
% f=[sin(13*x1) 0.8*sin(23*x2) 0.6*sin(33*x3)];
% f=[sin(9*x1) sin(9*x2)+0.8*sin(23*x2) sin(9*x3)+0.8*sin(23*x3)+0.6*sin(37*x3)];
% *****
% Generovani vstupniho signalu
n=size(f,2);
N=20;          % delka okna
tau=2;        % posunuti okna

% Vykresleni vstupniho signalu (jedne slozky)
figure
plot(f,'r');
axis([0 n min(f) max(f)]);

% Fourierova transformace vstupniho signalu
F=fft(f);
F=abs(F(1:n/2));
figure
plot(F,'r');
axis([0 n/2 0 max(F)]);

% Generovani okenni funkce
disp('1-OBDELNIK, 2-BLACKMANN-HARRISON, 3-HAMMINGOVO,
    4-PLOCHY VRCH, 5-GAUSS');
cg=input('Zadejte poradove cislo okna pro okenni transformaci: ');
if (cg==1) g=gcw(N,1,1,0,0,0);          nazev='Obdelnikove okno';end
if (cg==2) g=gcw(N,1,1,1.36109,0.39381,0.03256,0);nazev='Blackmann-Harris okno';end
if (cg==3) g=gcw(N,1,1,0.84,0,0,0);      nazev='Hammingovo okno';end
if (cg==4) g=gcw(N,1,1,1.93,1.29,0.388,0.0322); nazev='Plochy vrch';end
if (cg==5) g=gauss(N-1,1);              nazev='Gaussovske okno';end

% Normovani okna
g=g/norm(g,2);

% Vypocet matice Four. koeficientu W:
w1=2*pi/N;
W=[];
for l=1:n/tau
    for j=1:N/2
        W(l,j)=0;
        for k=1:N
            tk=(l-1)*tau-N/2+k;
            if (tk > 0) & (tk < n)
                W(l,j)=W(l,j)+f(tk)*g(k)*exp(-i*w1*j*tk);
            end
        end
    end
end
W=W';

% Vyhlazeni signalu
fc=[];
for l=1:n/tau
    fc(l)=0;
    for k=1:N
        tk=(l-1)*tau-N/2+k;
        if (tk > 0) & (tk < n)
            fc(l)=fc(l)+f(tk)*g(k);
        end
    end
end
fconv=interp(fc,2);
figure
plot(fconv,'r');
axis([0 n min(fconv) max(fconv)]);

% Fourierova transformace vyhlazeneho signalu
Fconv=fft(fconv);
Fconv=abs(Fconv(1:n/2));
figure
plot(Fconv,'r');
axis([0 n/2 0 max(Fconv)]);

% CFS signalu
for i=1:n/tau
    Wtemp(:,2*i-1)=W(:,i);
    Wtemp(:,2*i)=W(:,i);
end;
[X,Y] = meshgrid(1:20:n, 1:N/2);
[x,y] = meshgrid(1:n, 1:N/2);
Za=interp2(abs(Wtemp),X,Y);
figure
surf(X,Y,Za);
shading interp;
axis([1 n 1 N/2 0
    max(max(Za))]);

title('CFS, abs');
xlabel('time');
ylabel('level');
zlabel('amplitude');

figure;
surf(X,Y,Za);
shading interp;
axis([1 n 1 N/2 0
    max(max(Za))]);
title('CFS, abs, view(0,90)');
view(0,90);
xlabel('time');
ylabel('level');
zlabel('amplitude');
```

CVIČENÍ 8 - Wavelety

```
function [ca, cd]=mydwt(a)
M=length(a);
h(1)=-3-i*sqrt(15); h(2)=5-i*sqrt(15); h(3)=30+i*2*sqrt(15);
    h(4)=h(3); h(5)=h(2); h(6)=h(1);
h=h/64;
g(1)=conj(h(6)); g(2)=-conj(h(5)); g(3)=conj(h(4)); g(4)=-conj(h(3));
    g(5)=conj(h(2)); g(6)=-conj(h(1));

for i=1:M/2
    H(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=h;
    G(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=g;
end
H=H(1:M/2,1:M);
G=G(1:M/2,1:M);
Mat=[H
     G];
b=(Mat*a');
```

```
-----
function [c]=myidwt(ca, cd)
a=[ca cd];
M=length(a);
h(1)=-3-i*sqrt(15); h(2)=5-i*sqrt(15); h(3)=30+i*2*sqrt(15);
    h(4)=h(3); h(5)=h(2); h(6)=h(1);
h=h/64;
g(1)=conj(h(6)); g(2)=-conj(h(5)); g(3)=conj(h(4)); g(4)=-conj(h(3));
    g(5)=conj(h(2)); g(6)=-conj(h(1));

for i=1:M/2
    H(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=h;
    G(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=g;
end
H=H(1:M/2,1:M);
G=G(1:M/2,1:M);
Mat=2*[H
     G];
c=(Mat*a');
```

```
function [C,R]=wavdemo(f,N)
M=length(f);
C=f;
for i=1:N
    for j=1:2^(i-1)
        % delka paketu na i-te hladine
        m=M/2^(i-1);
        % Vypocet komprim. a dopln. koef. bud pomoci komplex. nebo jine base
        [ca, cd]=mydwt(C(i,(j-1)*m+1:j*m));
        C(i+1,(j-1)*m+1:j*m)=[ca(1:m/2), cd(1:m/2)];
    end
end

% Vyhlazeni
R=C;
for i=1:M
    if(abs(C(N+1,i))<=median(f))
        R(N+1,i)=0;
        nvyhl=nvyhl+1;
    end
end
nvyhl

% Rekonstrukce vyhl.signalu
for i=N+1:-1:2
    for j=1:2^(i-1)
        m=floor(M/2^(i-1));
        fx=myidwt(R(i,(j-1)*m+1:j*m),R(i,j*m+1:(j+1)*m));
        R(i-1,(j-1)*m+1:(j-1)*m+length(fx))=fx;
    end
end
R=real(R);
dif=C(1,:)-R(1,:);
plot(C(1,:))
hold on
plot(R(1,:),'r')
figure
plot(dif)
```

WT - Waveletova transformace

Another completely different approach is based upon multiresolution analysis, which automatically generates orthonormal bases of wavelets. In this article we consider regular multiresolution that is a base of discrete wavelet transform. More general definitions are based on distributions in Sobolev and Quasibanach spaces. A multiresolution analysis of $L_2(\mathbb{R})$ is a collection of nested closed scaling subspaces $V_m \subset L_2(\mathbb{R})$ such that:

- $V_m \subset V_{m+1}, m \in \mathbb{Z}$,
- $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$,
- $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L_2(\mathbb{R})$,
- $f(\cdot) \in V_m \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{m+1}$
- collection of translates $\phi(t - n), n \in \mathbb{Z}$ of scaling function $\phi(t) \in V_0$ creates orthonormal basis of V_0 .

Because of $V_m \subset V_{m+1}$ we can define W_m as the m -th wavelet space that is orthonormal complement of V_m in $V_{m+1} : V_{m+1} = V_m \oplus W_m$. If $\phi(t)$ is defined by $\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n)$, then the collection of $\phi_{mn}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \phi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}$ is orthonormal basis of V_m and if $\psi(t)$ is defined by $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2t - n)$, then the collection of $\psi_{mn}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}$ is orthonormal basis of W_m and h_n are filtering coefficients and $g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n}$ are complement coefficients. Now we can define orthogonal projections P_m of function f onto V_m and $Q_{m+1} = P_{m+1} - P_m$ onto W_{m+1} . These operators decompose function f in pyramidal algorithm according to formula $f_{m+1} = P_m f + Q_m f = \sum_{\forall n} a_{mn} \phi_{mn} + \sum_{\forall n} d_{mn} \psi_{mn}$ with $a_{mn} = (f, \phi_{mn})$ denoting scale coefficients (trends, approximations) and $d_{mn} = (f, \psi_{mn})$ denoting wavelet coefficients (details) at m -th transform level (see Figure 8).

Laplaceova transformace – Připomenutí (kap. 5)

(Pierre Simon de Laplace, 1749-1827)

Připomenutí: Jednorozměrná integrální transformace je zobrazení (pokud existuje) definované vztahem:

$$F(s) = \int_I f(t) \cdot K(t, s) dt$$

- $f(t)$ je komplexní fce reálné proměnné: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, nazývá se **originálem** též **předmětem** nebo **vzorem**.
- $F(s)$ je **analytická** (regulární)fce komplexní proměnné $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, nazývá se **obrazem** originálu f .
- $K(t, s)$ se nazývá **jádro** transformace, platí $K: [\mathbf{R} \times \mathbf{C}] \rightarrow \mathbf{C}$.

Laplaceova transformace - Definice

Definice: Laplaceova transformace fce splňující podmínky konvergence L. integrálu je definována:

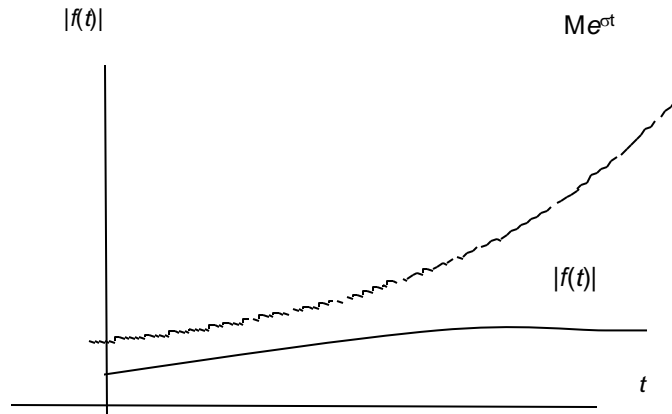
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt,$$

- Komplexní fce reálné proměnné $f(t)$, $t \in [0, +\infty)$ je **originál**.
- **Analytická** fce $F(s)$ komplexní proměnné $s = \operatorname{Re} s + i \cdot \operatorname{Im} s = \sigma + i \cdot \omega$ je **Laplaceovým obrazem** f .
- Integrál na pravé straně se nazývá **Laplaceův integrál**,
- $K(t, s) = e^{-st}$ je **jádro transformace**,
- **Definičním oborem obrazu** $F(s)$ je množina všech komplex. čísel s , pro něž konverguje nevlastní integrál.

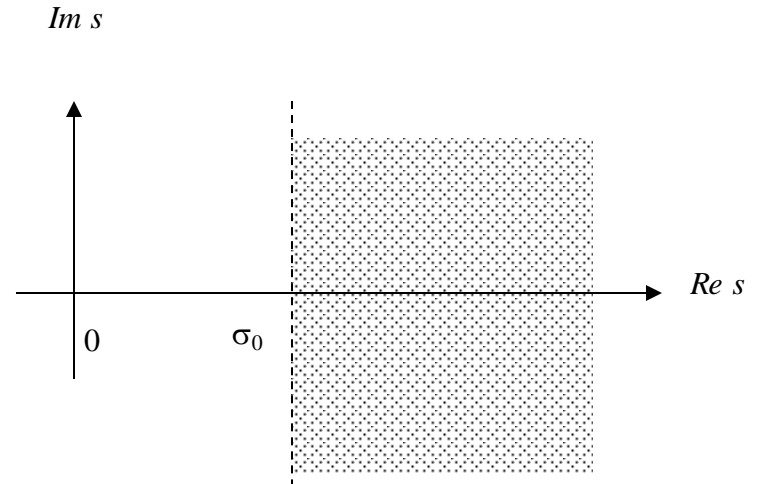
Podmínky konvergence Laplaceova integrálu:

1. $f(t)$ musí být alespoň po částech spojitá v intervalu $[0, \infty)$.
2. formálně lze def. obor prodloužit na záporné hodnoty t : $f(t) = 0$ pro $t < 0$.
3. $f(t)$ musí mít pro $t \in [0, \infty)$, ohraničený růst s indexem růstu $\sigma_0 < \sigma$, tj. musí platit vztah $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$, kde M a σ jsou reálné konstanty.

Omezený růst, index růstu



Obr. 5.1.

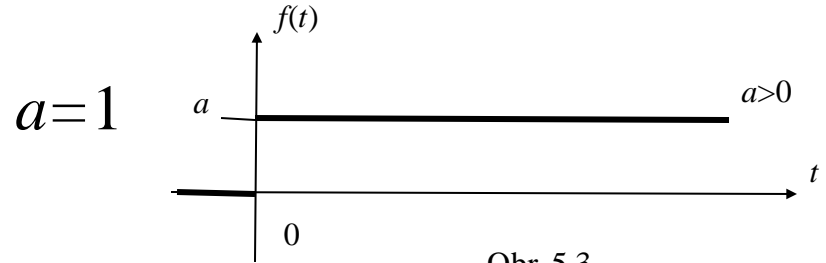


Definice: Necht' $\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbf{R}: \sigma > \sigma_0\}$. Číslo σ_0 se nazývá *index růstu* nebo *úsečka konvergence* a fce $f(t)$, pro níž platí 3.podmínka $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}$, se nazývá *fce exponenciálního řádu s indexem růstu σ_0* .

Poznámka: Definičním oborem a oborem analytičnosti (regularity) Laplaceova obrazu je komplexní polorovina $Re s = \sigma > \sigma_0$. Tedy fce $F(s)$ je analytickou fcí, existuje-li σ_0 takové reálné číslo, že pro $\sigma > \sigma_0$ Laplaceův integrál absolutně konverguje (obor konvergence).

Příklad – Heavisideova fce

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$



Obr. 5.3.

Daná fce splňuje všechny 3 podmínky:

1. je spojitá v intervalu $(0, \infty)$,

2. pro $t < 0$

$$\eta(t) = 0, \quad t < 0,$$

3. fce má ohraničený růst: $|\eta(t)| \leq M e^{\sigma t}$, kde $M = 1$, $\sigma_0 = 0$.

$$L\{\eta(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-su}}{s} \right] + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

Fce $F(s)$ je regulární (analytická) pro $\text{Re } s = \sigma > 0$, Laplaceův integrál konverguje pro všechna s , pro něž platí $\text{Re } s = \sigma > \sigma_0$, tj. $\sigma_0 = 0$.

Základní vlastnosti a věty LT

1. Lineárnost (věta o linearitě Laplaceovy transformace)
2. Podobnost (věta o změně měřítka)
3. Tlumení (věta o substituci)
4. Posunutí doprava (věta o translaci)
5. Derivování originálu podle parametru
6. Derivování originálu
7. Derivování obrazu
8. Integrovaní originálu
9. Integrovaní obrazu
10. Limitní věty
 - První limitní věta (podmínka konvergence).
 - Druhá limitní věta (počáteční hodnota).
 - Třetí limitní věta (konečná hodnota).

1. Lineárnost (věta o linearitě LT)

Věta: Necht' f_i jsou originály a F_i jsou jejich obrazy ($i=1,2,3,\dots,n$), tedy $\mathbf{L}\{f_1(t)\}=F_1(s)$, $\mathbf{L}\{f_2(t)\}=F_2(s)$, ..., $\mathbf{L}\{f_n(t)\}=F_n(s)$, pak fce $f=a_1f_1+ a_2f_2+ \dots + a_nf_n$ je originál a \mathbf{L} -obraz fce f bude

$$\mathbf{L}\left\{\sum_i^n a_i f_i(t)\right\} = \sum_i^n a_i F_i(s),$$

kde a_i ($i=1,2,\dots,n$) jsou komplexní konstanty.

Slovy: obrazu lineární kombinace originálů (vzorů) odpovídá lineární kombinace jejich obrazů se stejnými koeficienty.

Důkaz: K důkazu použijeme definiční vztah Laplaceova integrálu a věty o linearitě integrálu:

$$\mathbf{L}\left\{\sum_1^n a_i f_i(t)\right\} = \int_0^\infty \sum_1^n a_i f_i(t) e^{-st} dt = \sum_1^n a_i \int_0^\infty f_i(t) e^{-st} dt = \sum_1^n a_i F_i(s).$$

2. Podobnost (věta o změně měřítka)

Věta: Nechť f je originál a F je její obraz, tj. $L\{f(t)\}=F(s)$, $\alpha > 0$ je reálná konstanta, pak

$$L\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Důkaz: Výpočtem definičního vztahu Laplaceova integrálu dostaneme:

$$L\{f(\alpha t)\} = \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(u) e^{-su/\alpha} \frac{1}{\alpha} du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

(substituce $\alpha t = u$)

3. Tlumení (věta o substituci)

Věta: Tuto vlastnost lze slovy formulovat takto: násobíme-li originál exponenciální fci $e^{\alpha t}$, vzniká v obraze posuv komplexní proměnné s o hodnotu α , α je komplexní konstanta.

Tedy, je-li $L\{f(t)\}=F(s)$, α je komplexní konstanta, pak

$$L\{f(t)e^{\alpha t}\}=F(s-\alpha)$$

Důkaz: K ověření nám opět postačí jednoduchý výpočet.

$$L\{f(t)e^{\alpha t}\}=\int_0^{\infty} e^{\alpha t} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-\alpha)t} dt = F(s-\alpha), \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0 + \operatorname{Re}(\alpha).$$

Poznámka: Název "tlumení" ukazuje na souvislost s fyzikálními ději (výraz $e^{\sigma t}$, kde $\sigma=\operatorname{Re}\alpha$, představuje např. při kmitavém pohybu za podmínky $\operatorname{Re}\alpha < 0$ tzv. tlumící faktor).

Příklad

Najdeme obraz fce $f(t) = e^{\alpha t} \cdot \eta(t)$, $t \in \mathbf{R}$ α je komplex. konst.

a) Na základě definice:

$$L\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)} \right]_0^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-\alpha)u}}{-(s-\alpha)} + \frac{1}{s-\alpha} = \frac{1}{s-\alpha}$$

zde $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-\alpha)u}}{-(s-\alpha)} = 0$ pro $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$.

b) na základě věty o tlumení přímo dostaneme:

$$L\{e^{\alpha t} \eta(t)\} = \frac{1}{s-\alpha}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$$

Příklad

Najdeme L -obraz fce $f(t) = \sin(\alpha t) \cdot \eta(t)$,

$$\sin \alpha t = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t})$$

dle věty o linearitě a následovně a dle věty o tlumení dostaneme :

$$L(\sin \alpha t) = \frac{1}{2i} (L\{e^{i\alpha t}\} - L\{e^{-i\alpha t}\}) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - i\alpha} - \frac{1}{s + i\alpha} \right) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}.$$

$$\operatorname{Re} s > \max(\operatorname{Re} \alpha_1, \operatorname{Re} \alpha_2)$$

Najdeme L -obraz fce $f(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t \cdot \eta(t)$, $\omega \in R$

$$L\{e^{\alpha t} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} s = \sigma > \operatorname{Re} \alpha.$$

Příklad

Použitím věty o podobnosti (věta o změně měřítka) určit L-obraz fce

$$f(t) = \sin(\alpha t) \cdot \eta(t),$$

víme - li, že

$$\text{L-obraz funkce } f(t) = \sin(t) \cdot \eta(t), \text{ je } L(\sin t) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Řešení:

Věta o podobnosti:

$$L\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

$$L(\sin \alpha t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2},$$

$$\operatorname{Re} s > \max(\operatorname{Re} \alpha_1, \operatorname{Re} \alpha_2)$$

4. Posunutí doprava (věta o translaci)

Věta: Necht' $L\{f(t)\}=F(s)$, pak posunutí proměnné t v originále f o konstantní reálnou hodnotu $\tau > 0$ se projeví vynásobením obrazu F výrazem $e^{-s\tau}$:

$$L\{f(t-\tau)\}=e^{-s\tau}F(s)$$

Důkaz: Sestavíme a vypočteme Laplaceův integrál:

$$L\{f(t-\tau)\}=\int_0^{\infty}f(t-\tau)e^{-st}dt=\int_0^{\tau}f(t-\tau)e^{-st}dt+\int_{\tau}^{\infty}f(t-\tau)e^{-st}dt;$$

První integrál je 0, poněvadž je rovna 0 integrovaná fce-dle předpokladů při kladném

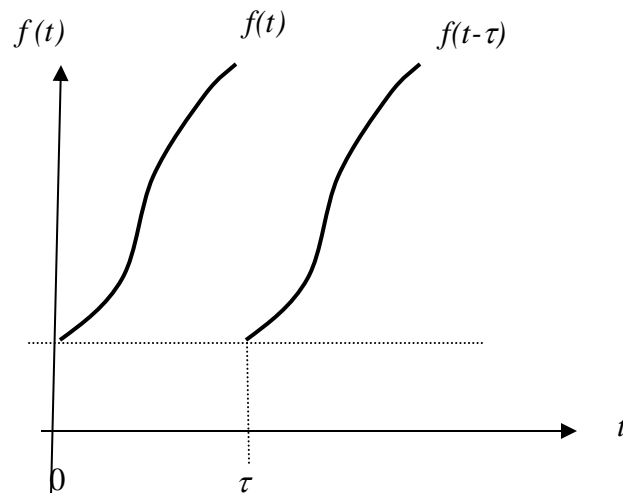
τ je

$$f(t-\tau)=\begin{cases} 0 & \text{pro } t < \tau, \\ f(t-\tau) & \text{pro } t \geq \tau; \end{cases}$$

ve druhém integrálu provedeme substituci

$t-\tau = u$, pak

$$L\{f(t-\tau)\}=\int_0^{\infty}f(u).e^{-(u+\tau)s}du=e^{-s\tau}\int_0^{\infty}f(u).e^{-su}du=e^{-s\tau}F(s)$$



Obr.5.5

Příklad

L-obraz fce

$$f(t) = \sin(t - \varphi) \cdot \eta(t)$$

Řešení: Použitím věty o posunutí doprava a výsledku předchozího příkladu:

$$f(t) = \sin(\alpha t) \cdot \eta(t),$$

$$L(\sin \alpha t) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}.$$

$$f(t) = \sin(t) \cdot \eta(t), \quad \alpha = 1$$

$$L(\sin t) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

$$f(t) = \sin(t - \varphi) \cdot \eta(t)$$

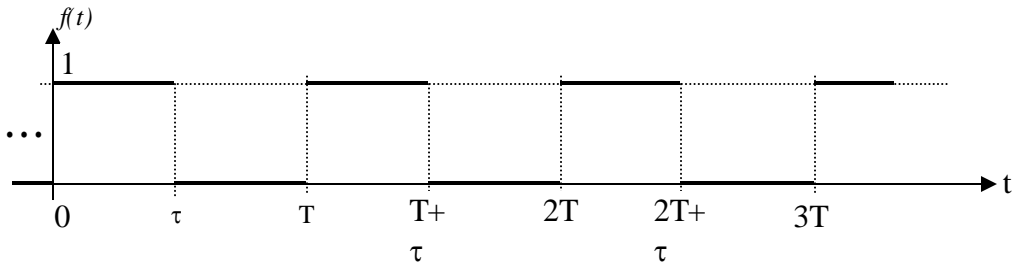
$$L(\sin(t - \varphi)) = \frac{e^{-s\varphi}}{s^2 + 1}.$$

$$\operatorname{Re} s > 0$$

Příklad

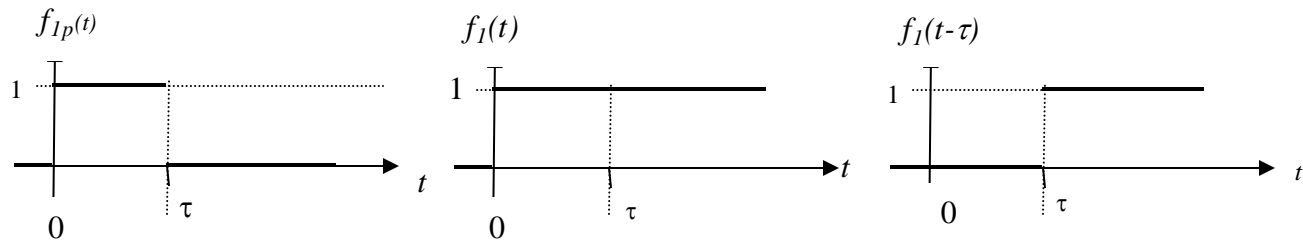
L-obraz periodické funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & nT \leq t \leq nT + \tau, \\ 0, & nT + \tau < t < (n+1)T, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Řešení:

1. Originál na 1. periodě je rozdíl dvou fcí: $f_1(t) = \eta(t)$, $f_1(t-\tau) = \eta(t-\tau)$



Dle věty o lineár.: $L\{f_{1p}(t)\} = L\{f_1(t)\} - L\{f_1(t-\tau)\}$, $L\{f_{1p}(t)\} = \frac{1}{s} - e^{-\tau s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s})$, $Re\ s > 0$.

2. Obraz na 2. periodě: $L\{f_{2p}(t)\} = \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s})e^{-Ts}$, $Re\ s > 0$.

3. Obraz na 3. periodě: $L\{f_{3p}(t)\} = \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s})e^{-2Ts}$, $Re\ s > 0$.

Příklad

n. Obraz na n -té periodě $L\{f_{n,p}(t)\} = \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s})e^{-(n-1)Ts}$, $Re\ s > 0$.

Obraz periodické fce použitím n period (věta o linearitě) a následovně pomocí limitního přechodu:

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s}) + \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s}) \cdot e^{-Ts} + \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s}) \cdot e^{-2Ts} + \dots + \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s}) \cdot e^{-nTs} \right] = \\ &= \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s}) \cdot (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \dots). \end{aligned}$$

$$\left| e^{-Ts} \right| < 1 \Rightarrow Re\ s > 0, \quad (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}.$$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-\tau s}}{1 - e^{-Ts}}$$

Příklad

Stejný výsledek dostaneme, budeme-li postupovat následovně:

1. Nechť existuje L-obraz periodické fce: $L\{f(t)\} = G(s)$.
2. L-obraz posunuté periodické fce: $L\{f(t-T)\} = G(s)e^{-sT}$.
3. L-obraz fce na první periodě bude: $L\{f(t)\} - L\{f(t-T)\} = G(s)(1 - e^{-sT})$.
4. Označíme-li L-obraz fce na první periodě $F(s)$, pak L-obraz period. fce bude

$$G(s) = L\{f_{per}(t)\} = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}.$$

Náš příklad:

Jelikož L-obraz fce uvažované na první periodě je

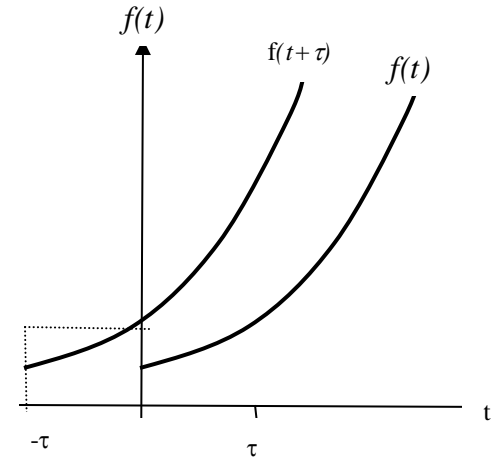
$$L\{f_1(t)\} = \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s}),$$

pak $G(s)(1 - e^{-sT}) = \frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s}) \Rightarrow G(s) = L\{f(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-\tau s}}{1 - e^{-Ts}}. \quad \text{Re } s > 0.$

4. Posunutí doleva (věta o předstihu)

Pozor!!! Posunutí doleva, tj. pro fci zadanou

$$f(t+\tau) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < -\tau \\ f(t+\tau) & \text{pro } t \geq -\tau, \end{cases} \quad \tau > 0$$



$$L\{f(t+\tau)\} = \int_0^{\infty} f(t+\tau) \cdot e^{-st} \cdot dt \quad \underset{\text{(sustituce } t+\tau=u)}{=} e^{s\tau} \int_{\tau}^{\infty} f(u) \cdot e^{-su} \cdot du$$

Příklad: L-obraz funkce $f(t) = \eta(t)$, při posunutí doleva bude

$$L\{\eta(t+\tau)\} = \int_0^{\infty} \eta(t+\tau) \cdot e^{-st} \cdot dt = e^{s\tau} \frac{1}{s} - e^{s\tau} \int_0^{\tau} 1 \cdot e^{-st} \cdot dt = e^{s\tau} \left(\frac{1}{s} + \frac{e^{-s\tau} - 1}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

5. Derivování originálu podle parametru

Věta: Necht' fce $f(t,x)$ je originál s indexem růstu σ_0 , splňující podmínku:

$$|f(t,x)| \leq M e^{\sigma t}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \right| \leq M e^{\sigma t}.$$

Zde $t \in [0, \infty)$, x je reálný parametr $x \in [0, l]$, l je reálná konstanta a Laplaceův integrál má tvar

$$F(s,x) = \int_0^{\infty} f(t,x) e^{-st} dt.$$

Předpokládejme existenci derivací $f'_x = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$, $F'_x = \frac{\partial F(s,x)}{\partial x}$,

pak parciální derivace originálu a obrazu podle společného parametru x jsou určeny vztahem:

$$\mathbf{L}\{f'_x\} = F'_x$$

Příklad

Dle věty o derivování podle parametru určíme Laplaceův obraz fce

$$f(t) = t \cdot \cos \omega t \cdot \eta(t).$$

Řešení: Víme, že
$$\mathbf{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Zde ω je reálný parametr, podle něhož derivujeme originál i obraz:

$$L\{t \cdot \cos \omega t\} = L\left\{\frac{\partial}{\partial \omega}(\sin \omega t)\right\} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

$$L\{t \cdot \cos \omega t\} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

6. Derivování originálu

Věta: Má-li fce $f(t)$ pro $t \in [0, \infty)$ spojitou derivaci $f'(t)$ a je-li $F(s)$ její L -obraz, pak platí:

$$\mathbf{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+)$$

Důkaz: Provedeme výpočet Laplaceova integrálu per partes:

$$\mathbf{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[f(t) e^{-st} \right]_0^u + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = -f(0_+) + sF(s),$$

Označení : $f(0_+) = \lim_{u \rightarrow 0_+} f(u) \stackrel{\text{ozn}}{=} f(0) \Rightarrow \mathbf{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

Věta: Má-li $f(t)$ spojitě derivace do n -tého řádu včetně a $F(s)$ je její L -obraz, pak L -obraz příslušné n -té derivace fce $f(t)$ bude:

$$\mathbf{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_+) - s^{n-2} f'(0_+) - \dots - f^{(n-1)}(0_+)$$

Důkaz: Tento výsledek se odvozuje úplnou matematickou indukcí.

Příklad

Odvodíme na základě věty o derivaci originálu L -obraz fce:

$$f(t) = \cos \omega t \cdot \eta(t).$$

Řešení: Víme, že $L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow L\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$

$$L\left\{\frac{d}{dt}(\sin \omega t)\right\} = L\{\omega \cdot \cos \omega t\} = \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2} - \sin 0 = \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow$$

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}(\sin \omega t)\right\} = L\left\{\frac{d}{dt}(\omega \cos \omega t)\right\} = L\{-\omega^2 \cdot \sin \omega t\} \Rightarrow$$

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}(\sin \omega t)\right\} = \frac{\omega s^2}{s^2 + \omega^2} - s \cdot \sin 0 - \omega \cos 0 = \frac{-\omega^3}{s^2 + \omega^2}$$

Ověření na základě věty o linearitě:

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}(\sin \omega t)\right\} = L\{-\omega^2 \cdot \sin \omega t\} = -\frac{\omega^2 \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = -\frac{\omega^3}{s^2 + \omega^2}$$

Pozor!!! Věta o derivování originálu platí jen pro spojité fce $f(t)$, které mají spojité všechny derivace až do řádu $(n-1)$ včetně na intervalu $(0, \infty)$. Není-li splněn tento předpoklad, vztah pro výpočet bude složitější. Má-li $f(t)$ v bodě $t=a$ nespojitost 1. druhu (skok), tj. budou konečné limity

$$\lim_{t \rightarrow a+} f(t) = f(a+); \quad \lim_{t \rightarrow a-} f(t) = f(a-),$$

vzorec bude mít navíc jeden člen, charakterizující tento skok.

Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \int_0^a f'(t)e^{-st} dt + \int_a^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \\ &= f(a-)e^{-as} - f(0+) + s \int_0^a f(t)e^{-st} dt + \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)e^{-st}] - \\ &\quad - f(a+)e^{-as} + s \int_a^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0+) - S(a)e^{-sa}, \end{aligned}$$

kde $S(a) = f(a+) - f(a-)$. Výpočet obou integrálů byl proveden metodou per partes .

7. Derivování obrazu

Věta: Necht' fce $f(t)$ je originál s úsečkou konvergence σ_0 a $F(s)$ je její L-obraz, pak i fce $-t f(t)$ je originál s úsečkou konvergence σ_0 a pro její L-obraz platí

$$L\{-t \cdot f(t)\} = F'(s)$$

Pozn.: Derivování obrazu podle proměnné s je ekvivalentní násobení originálu zápornou proměnnou t .

Důkaz: Fce $f(t)$ splňuje podmínky pro konvergenci Laplaceova integrálu, tj. existuje $L\{f(t)\} = F(s)$. Pak

$$L\{-t \cdot f(t)\} = -\int_0^{\infty} t \cdot f(t) e^{-ts} dt = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-ts} dt = F'(s)$$

Pozn.: Úplnou matematickou indukcí lze dokázat, že n -tá derivace obrazu (jestliže existuje):

$$L\{(-t)^n \cdot f(t)\} = F^{(n)}(s)$$

Příklad

Určete Laplaceův obraz mocninné fce, tj. $L\{t^n\}, t \geq 0, n \in N$

Řešení: Víme, že Laplaceův obraz Heavisideovy fce je $L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}$

Použitím věty o derivování obrazu :

$$L\{-t \cdot \eta(t)\} = -\frac{1}{s^2} \implies L\{t \cdot \eta(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{t^2 \cdot \eta(t)\} = \frac{2}{s^3},$$

$$L\{-t^3 \cdot \eta(t)\} = -\frac{3!}{s^4} \implies L\{t^3 \cdot \eta(t)\} = \frac{3!}{s^4},$$

Tedy obecně: $L\{t^n \cdot \eta(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re} s > 0.$

8. Integrovaní originálu

Věta: Necht' $f(t)$ je originál a f je fce spojitá v intervalu $[0, \infty)$, přičemž $L\{f(t)\} = F(s)$, pak platí

$$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Důkaz: Zaved'me označení

$$\int_0^t f(u)du = g(t), \quad (1).$$

$g(t)$ je fce horní meze (originál), $g(0)=0$, $L\{g(t)\} = G(s)$ (2).

Na základě věty o derivování originálu:

$$L\{g'(t)\} = L\{f(t)\} = sG(s) - g(0+) = s \cdot G(s) \quad (3).$$

Jelikož $L\{f(t)\} = F(s)$ dostáváme použitím vzorců (1)-(3):

$$s \cdot G(s) = F(s) \Rightarrow L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = L\{g(t)\} = G(s) = \frac{1}{s} F(s).$$

Příklad

Najdeme L -obraz fce $f(t) = \int_0^t e^u du, \quad t \geq 0.$

$$f(t) = \int_0^t e^u du = [e^u]_0^t = e^t - 1, \quad t \geq 0.$$

Řešení: Víme, že

$$L\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha \quad \Rightarrow \quad L\{e^t\} = \frac{1}{s - 1}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Dle věty o integrování originálu: $L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{(s-1)s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$

Výsledek můžeme ověřit výpočtem integrálu s následným použitím věty o lineárnosti:

$$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = L\{e^t - 1\} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{(s-1)s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

9. Integrovaní obrazu

Věta: Má-li fce $f(t)$ obraz $F(s)$ a fce $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ má obraz $G(s)$,
pak

$$\mathbf{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(q) dq,$$

zde horní mez u integrálu chápeme tak, že $\operatorname{Re} q \rightarrow \infty$.

Důkaz: Podle věty o derivování obrazu platí

$$\mathbf{L}\left\{-t \cdot \frac{f(t)}{t}\right\} = \mathbf{L}\{-f(t)\} = G'(s),$$

dle věty o lineárnosti

$$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\} = -G'(s)$$

Výsledek integrujeme v mezích, použitých ve znění věty

$$\int_s^{\infty} F(q) dq = -\int_s^{\infty} G'(q) dq = -\lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} G(q) + G(s) = G(s), \quad \text{zde } \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} G(q) = 0.$$

(1. Limitní věta)

Příklad

Najdeme obrazy fcí: $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, $si(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$, $t \geq 0$.

Řešení: Víme, že $L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$,

1. Dle věty o integrování obrazu bude

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{q^2 + 1} dq = \lim_{Re q \rightarrow \infty} \text{arc tg } q - \text{arc tg } s = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } s = \text{arc cotg}(s).$$

2. Použitím věty o integrování originálu dostaneme:

$$L\{si(t)\} = L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\} = \frac{\text{arc cotg}(s)}{s}.$$

zde fce $si(t)$ je tzv. sinusintegrál. Je známo, že sinusintegrál nemá primitivní funkci a přitom existuje L -obraz této fce.

10. Limitní věty – 1. limitní věta

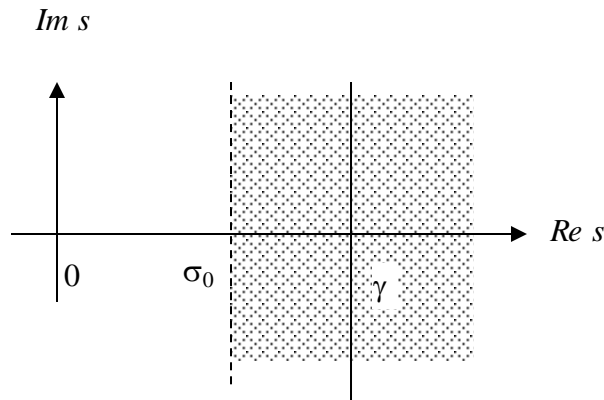
Věta: (podmínka konvergence).

Nechť $f(t)$ je fce s indexem růstu σ_0 , tj. $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$

a necht' $\sigma = \operatorname{Re} s = \gamma > 0$ je přímka, která se nachází v komplexní polorovině vpravo od σ_0

Pak L-obraz $f(t)$ tj. $F(s)$ absolutně a stejnoměrně konverguje k 0 v polorovině $\sigma = \operatorname{Re} s \geq \gamma$ tj.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |F(s)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.}$$



10. Limitní věty – 2. limitní věta

Věta: (počáteční hodnota).

Nechť $f(t)$ je originál a $F(s)$ je její L -obraz, nechť existuje konečná

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0_+), \text{ pak platí } \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0_+).$$

Důkaz: Nechť $F(s)$ je L -obrazem fce $f(t)$, tj. $L\{f(t)\} = F(s)$.

Dle věty o derivování originálu platí

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+)$$

z první limitní věty dostaneme: $L\{f'(t)\} = 0$ pro $s \rightarrow \infty$, pak

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s) - f(0_+)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0_+)}.$$

10. Limitní věty – 3. limitní věta

Věta: (konečná hodnota).

Nechť $F(s)$ je L -obrazem fce $f(t)$, tj. $L\{f(t)\}=F(s)$, pak

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Důkaz: Na základě věty o derivování originálu platí

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+)$$

Pro $s \rightarrow 0$ bude

$$\lim_{t \rightarrow 0} L\{f'(t)\} = \lim_{t \rightarrow 0} (sF(s) - f(0_+)),$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0_+) \Rightarrow$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0_+) = \int_0^{\infty} f'(t) \cdot dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0_+) \Rightarrow$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Zpětná Laplaceova transformace (kap. 6.)

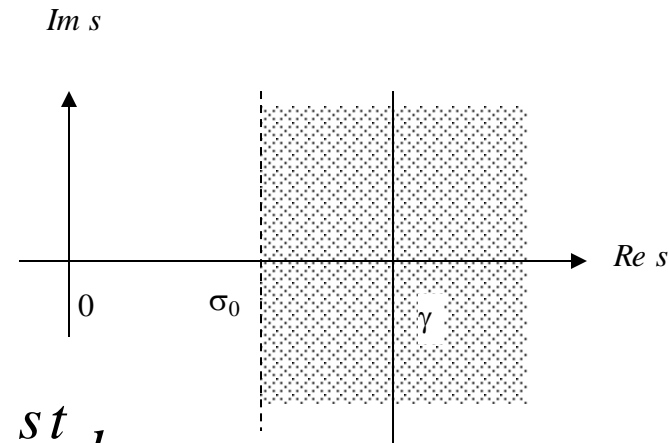
Úloha nalezení originálu na základě obrazu obecně není jednoznačná, tedy je nutno stanovit podmínky, za kterých

- k obrazu $F(s)$ bude existovat originál $f(t)$,
- zobrazení bude vzájemně jednoznačné : $f(t) \leftrightarrow F(s)$.

Věta: (Integrální vyjádření zpětné L -transformace)

*Necht' fce $f(t)$ je originálem a $F(s)$ jejím L -obrazem. Potom v libovolném bodě t , v němž je fce $f(t)$ spojitá, platí **Riemannův-Mellinův vzorec***

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) \cdot e^{st} ds,$$



kde $s = \text{Re } s + i \text{Im } s = \sigma + i \omega$, pak

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} F(s) \cdot e^{st} ds.$$

1. Bereme v úvahu jen hlavní hodnotu integrálu v.p. $\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$

(valeur principale), $F(s)$ v komplexní rovině \mathbf{C} má konečný počet izolovaných singulárních bodů ležících v polorovině $\text{Res} < \sigma$.

2. $F(s)$ je regulární fce v polorovině $\text{Res} \geq \gamma$, $\gamma > \sigma_0$ včetně bodu v nekonečnu $s = \infty$, zde σ_0 je index růstu.

3. $F(s)$ vyhovuje podmínce, že $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ 1. limitní věta,

$F(s)$ konverguje stejnoměrně v polorovině $\text{Res} \geq \gamma$, $\gamma > \sigma_0$.

4. Existuje konvergentní integrál $\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} |F(s)| ds$

Výpočet

Má-li fce $F(s)$ pouze izolované singulární body (v praxi se redukují vesměs na póly), přičemž singulární body leží vždy nalevo od přímky $\text{Re } s = \gamma$, pak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_r F(s)e^{st} ds = \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \text{Res}_{s=s_k} [F(s)e^{st}],$$

kde m je počet izolovaných singulárních bodů.

Jelikož fce e^{st} je regulární, tj. nemá žádné singulární body, pak originál lze vypočítat pro $t > 0$ ze vztahu:

$$f(t) = \sum_{\forall_k} \text{Res} [F(s) \cdot e^{st}]_{s=s_k}, \quad t > 0.$$

Příklad

Najdeme originál $f(t)$ k fci $F(s) = \frac{1}{s}$

Řešení: Originál je $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds$

Přímka γ se nachází v polorovině $\text{Re } s > 0$.

Fce e^{st}/s má jeden jednoduchý pól v bodě $s = 0$.

Integrál vypočteme pomocí rezidua:

$$f(t) = \frac{2\pi i}{2\pi i} \cdot \text{Res}_{s=0} \frac{e^{ts}}{s} = e^0 = 1, \quad t \geq 0.$$

Tedy originálem je jednotková (Heavisideova) fce:

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1 = \eta(t), \quad t \geq 0.$$

Příklad

Najdeme originál $f(t)$ fce $F(s) = \frac{s+2}{s^2(s^2+4)}$.

Řešení: Fce $F(s)$ má singulární body: $s_{1,2} = \pm 2i$, $s_3 = 0$,
 $F(s)$ je analytická pro $\text{Re } s > 0$.

Body $s_{1,2} = \pm 2i$ jsou jednoduché póly, bod $s_3 = 0$ je pól 2. řádu.

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s^2+4)} = \frac{s+2}{s^2(s+2i)(s-2i)}$$

Originál:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{s+2}{s^2(s+2i)(s-2i)} \cdot e^{st} ds$$

$$\gamma = \text{Re } s > 0.$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{s+2}{s^2(s+2i)(s-2i)} \cdot e^{st} ds = \sum_{n=1}^3 \operatorname{Res}_{s=s_n} \left[\frac{s+2}{s^2(s+2i)(s-2i)} \cdot e^{st} \right]$$

$$f_1(t) = \operatorname{Res}_{s=2i} \frac{(s+2)e^{st}}{s^2(s^2+4)} = \left[\frac{(s+2)e^{st}}{s^2(s+2i)} \right]_{s=2i} = \frac{2+2i}{-4 \cdot 4i} e^{2it} = \frac{1}{8} (i-1) e^{2it},$$

$$f_2(t) = \operatorname{Res}_{s=-2i} \frac{(s+2)e^{st}}{s^2(s^2+4)} = \left[\frac{(s+2)e^{st}}{s^2(s-2i)} \right]_{s=-2i} = \frac{2-2i}{-4 \cdot (-4i)} e^{-2it} = -\frac{1}{8} (i+1) e^{-2it},$$

$$f_3(t) = \operatorname{Res}_{s=0} \frac{(s+2)e^{st}}{s^2(s^2+4)} = \left[\frac{(s+2)e^{st}}{s^2+4} \right]_{s=0}' = \left[\frac{[e^{st} + (s+2)te^{ts}](s^2+4) - 2s(s+2)e^{ts}}{(s^2+4)^2} \right]_{s=0} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t.$$

Pak:

$$f(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t) = \frac{1}{8} [(i-1)e^{2it} - (i+1)e^{-2it}] + \frac{1}{4} + \frac{t}{2} = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2i} (e^{2it} - e^{-2it}) + \frac{1}{2} (e^{2it} + e^{-2it}) \right] \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{4} \cos 2t, \quad t \geq 0.$$

Pozn.1: Jsou-li $s_1 = \alpha + i \cdot \beta$ a $s_2 = \alpha - i \cdot \beta$ dva komplexně sdružené póly, pak pro součet rezidua v těchto bodech bude platit

$$\operatorname{Res}_{s=s_1} \frac{A_m(s) \cdot e^{st}}{B_n(s)} + \operatorname{Res}_{s=s_2} \frac{A_m(s) \cdot e^{st}}{B_n(s)} = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Res}_{s=s_1} \frac{A_m(s) \cdot e^{st}}{B_n(s)} \right].$$

Pro náš příklad:

$$\begin{aligned} f_1(t) + f_2(t) &= \operatorname{Res}_{s=2i} \frac{(s+2)e^{st}}{s^2(s^2+4)} + \operatorname{Res}_{s=-2i} \frac{(s+2)e^{st}}{s^2(s^2+4)} = \left[\frac{(s+2)e^{st}}{s^2(s+2i)} \right]_{s=2i} + \left[\frac{(s+2)e^{st}}{s^2(s-2i)} \right]_{s=-2i} = \\ &= \frac{1}{8} \left[(i-1)e^{2it} + (i+1)e^{-2it} \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f_1(t) + f_2(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Res}_{s=2i} \frac{(s+2) \cdot e^{st}}{s^2(s+2i)(s-2i)} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{8} (i-1) e^{2it} \right] = -\frac{1}{4} (\sin 2t + \cos 2t).$$

$$t \geq 0.$$

Pozn.2: Rozložíme funkci $F(s)$ na parciální zlomky:

$$\frac{s+2}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}.$$

Vypočteme koeficienty: $A = 1/4$, $B = 1/2$, $C = -1/4$, $D = -1/2$.

Na základě získaných koeficientů dostaneme obraz ve tvaru

$$F(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+4}.$$

Pro $\operatorname{Re} s > 0$ fce $F(s)$ je regulární, pak použitím známých vztahů originál bude

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t.$$

Bereme-li v úvahu, že jsme definovali jednotkovou (Heavisideovu) fci pro $t \geq 0$, pak i náš výsledek řešení bude platit pro $t \geq 0$.

Použití LT při řešení diferenciál. rovnic

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

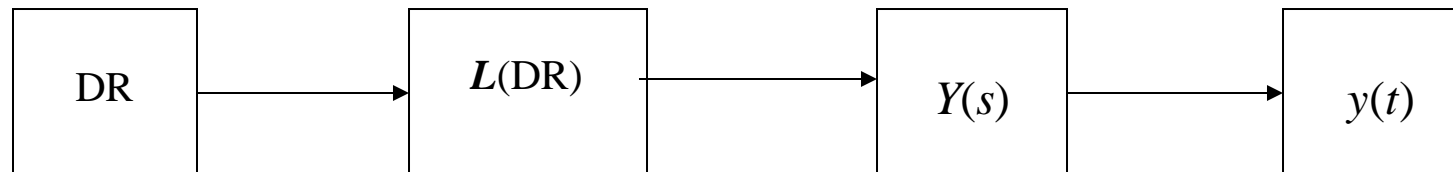
počáteční podmínky: $y(t_0) = c_0, y'(t_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$.

a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) jsou reálné konstanty ($a_n \neq 0$),

$f(t)$ je zadaná fce, k níž existuje **L**-obraz,

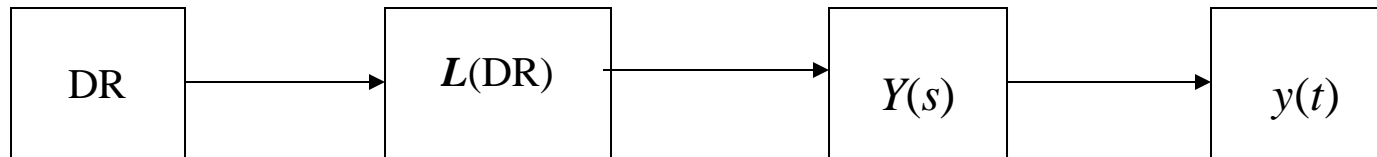
$y = y(t)$ je hledaná fce, o níž předpokládáme, že k ní existuje **L**-obraz

$y^{(k)} = y^{(k)}(t)$ jsou derivace k -tého řádu, k nimž taktéž existuje **L**-obraz



Laplaceova transformace: $LT\{f\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt,$

Hlavní etapy řešení LDR (soustavy LDR)



1. Stanovíme předpoklady pro řešení a ověříme splnění podmínek.

Označení: $Y(s)$ je L -obraz fce $y(t)$,

$F(s) = L\{f(t)\}$ je L -obraz fce $f(t)$.

Na základě předpokladů sestavíme L -obrazy $y^{(k)}(t)$.

2. Sestavíme L -obraz LDR (soustavy LDR) na základě věty o linearitě. Tímto obrazem bude rovnice algebraická (soustava algebr. rovnic).
3. Nalezneme řešení této algebraické rovnice (soustavy). Řešením bude $Y(s)$, tj. L -obraz fce $y(t)$.
4. Transformujeme nalezený obraz $Y(s)$ zpět na originál $y(t)$.
5. Nakonec provedeme kontrolu řešení.

Rozbor algoritmu při podmínce $t_0=0$

1. Fce $f(t)$ a $y(t)$ musí splňovat vlastnosti originálu, tj. příslušné Laplaceovy integrály musí být konvergentní.
Pro $f(t)$ tj. pravou stranu DR je nutno splnění podmínek ověřit a pak sestavit L -obraz fce $f(t)$, tj. $F(s) = L\{f(t)\}$.
Pro $y(t)$ splnění těchto podmínek budeme předpokládat.
2. Použitím věty o derivování originálu najdeme L -obrazy jednotlivých derivací fce $y(t)$:

$$L\{y'(t)\} = sY(s) - y(0_+) = sY(s) - c_0,$$

$$L\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0_+) - y'(0_+) = s^2Y(s) - sc_0 - c_1,$$

$$L\{y^{(n)}(t)\} = s^nY(s) - s^{n-1}c_0 - s^{n-2}c_1 - \dots - sc_{n-2} - c_{n-1} = s^nY(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}c_k.$$

Dle věty o lineárnosti sestavíme L -obraz dané DR :

$$\mathbf{L}\{a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y\} = \mathbf{L}\{f(t)\}$$

Dostaneme algebraickou rovnici n -tého stupně pro obraz $Y(s)$:

$$a_n (s^n Y(s) - s^{n-1} c_0 - \dots - c_{n-1}) + \dots + a_1 (sY(s) - c_0) + a_0 Y(s) = F(s).$$

3. L -obraz řešení DR:
$$Y(s) = \frac{F(s) + a_n (s^{n-1} c_0 + \dots + s c_{n-2} + c_{n-1}) + \dots + a_1 c_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Ve jmenovateli je mnohočlen n -tého stupně (**charakt. polynom**):

$$\mathbf{B}_n (s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$$

V čitateli je součet $F(s) + P_{n-1}(s)$, kde

$$P_{n-1}(s) = a_n (s^{n-1} c_0 + \dots + s c_{n-2} + c_{n-1}) + \dots + a_2 (s c_0 + c_1) + a_1 c_0$$

je polynom stupně nejvýše $n-1$, jehož koeficienty jsou závislé na počátečních hodnotách c_0, c_1, \dots, c_{n-1} .

Pak L -obraz řešení DR bude :
$$Y(s) = \frac{F(s) + P_{n-1}(s)}{B_n(s)}, \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0 .$$

4. Partikulární řešení DR $y(t)$ určíme jako originál k $Y(s)$, tj.

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1} \{ Y(s) \}, \quad t \geq t_0 :$$

- a) pomocí residua,
- b) rozkladem na parciální zlomky,
- c) užitím konvoluce.

5. Nakonec provedeme kontrolu řešení a ověření počátečních podmínek.

Pozn.: Postup řešení v praxi je nutno doplnit o některé dílčí mezikroky, spojené buď se speciálním zadáním pravé strany $f(t)$ DR nebo s tím, že počáteční podmínky nejsou vázány na nulový bod.

Příklad

Určíme partikulární řešení DR: $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$

$$a) \quad y(0) = y'(0) = 0; \quad b) \quad y(0) = y'(0) = 1$$

Řešení: a)

1. Analýza je společná pro obě zadání.

Ověření splnění podmínek pro pravou stranu DR $f(t) = 2e^{3t}$:

- $f(t)$ je spojitá na intervalu $[0, +\infty)$,
- pro $t < 0$ doplníme $f(t) = 0$, tj $f(t) = e^{3t} \cdot \eta(t)$, $\eta(t)$ je Heavisideova fce,
- $f(t)$ má ohraničený růst: $|e^{3t}| \leq M e^{\sigma t}$, zde stačí zvolit $M=1$ a $\sigma > 3$ (libovolná reálná konstanta větší než 3), například $\sigma = 4$, $\sigma_0 = 3$.

Skutečně $|e^{3t}| < 1 \cdot e^{4t}$.

Podmínky jsou splněny, teď sestavíme L -obraz fce:

$$f(t) = e^{3t} \cdot \eta(t) \quad \Rightarrow \quad L\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3}, \quad \operatorname{Re} s > 3.$$

Předpokládáme, že pro $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$ existují L -obrazy.

Nechť $Y(s)$ je L -obraz fce $y(t)$, tj. $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

Použitím věty o derivování originálu, sestavíme L -obrazy 1. a 2. derivace $y(t)$:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0_+),$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0_+) - y'(0_+).$$

2. Pro počáteční podmínky a) $y(0) = y'(0) = 0$:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s), \quad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s).$$

Použitím věty o linearitě sestavíme L -obraz zadané DR:

$$s^2 \cdot Y(s) - 3s \cdot Y(s) + 2 \cdot Y(s) = \frac{2}{s-3}.$$

3. L -obraz řešení je
$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)(s^2-3s+2)} = \frac{2}{(s-3)(s-1)(s-2)}$$

zde $B_2(s) = s^2 - 3s + 2$ je charakteristický polynom 2. řádu.

4. Fce $Y(s)$ bude regulární pro $\operatorname{Re} s > 3$.

Výpočet originálu $y(t)$:

i) pomocí residua, ii) rozkladem na parciální zlomky.

i) Obraz $Y(s)$ má 3 **jednoduché** póly $s = 1$, $s = 2$, $s = 3$.

Polynom v čitateli je $A_0(s) = 2$, jmenovatel je $B_3(s) = (s-1)(s-2)(s-3)$.

Výsledek (originál):

$$y(t) = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}_{s=s_k} \left[\frac{2e^{st}}{(s-1)(s-2)(s-3)} \right] = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

nebo:
$$y(t) = \left(e^t - 2e^{2t} + e^{3t} \right) \cdot \eta(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

ii) rozkladem na parciální zlomky dostaneme stejný výsledek:

$$Y(s) = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{(s-3)} \Rightarrow A = 1, B = -2, C = 1$$

$$y(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

5. Ověření řešení:

$$y'(t) = e^t - 4e^{2t} + 3e^{3t}, \quad t \geq 0. \quad y''(t) = e^t - 8e^{2t} + 9e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

Po dosazení do původní DR dostaneme:

$$LS = y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}, \quad PS = 2e^{3t} \Rightarrow LS = PS.$$

Ověření počátečních podmínek:

$$y(0) = e^0 - 2e^0 + e^0 = 0, \quad y'(0) = e^0 - 4e^0 + 3e^0 = 0.$$

Určíme partikulární řešení původní DR: $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$

$$b) y(0) = y'(0) = 1$$

Řešení: b)

1. Analýza zůstala beze změny.

Nechť $Y(s)$ je L -obraz fce $y(t)$, tj. $Y(s) = \mathbf{L} \{y(t)\}$.

Na základě věty o derivování originálu:

$$L\{y'(t)\} = sY(s) - y(0_+) = sY(s) - 1,$$

$$L\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0_+) - y'(0_+) = s^2Y(s) - s - 1.$$

2. L -obraz zadané DR: $s^2 \cdot Y(s) - s - 1 - 3(s \cdot Y(s) - 1) + 2 \cdot Y(s) = \frac{2}{s-3} \Rightarrow$

3. L -obraz řešení je:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)} \left[\frac{2}{(s-3)} + s - 3 + 1 \right] = \frac{2}{(s-3)(s-1)(s-2)} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)(s-1)(s-2)} + \frac{1}{s-1}, \quad \text{Re } s > 3.$$

Pozn.: Obraz lze sestavit přímo použitím charakteristického polynomu: $B_2(s) = s^2 - 3s + 2$.

Sestavíme polynomy $P_1(s) = s - 3$, $P_0(s) = 1$.

Pak

$$Y(s) = \frac{1}{B_2(s)} [F(s) + P_1(s)y_0 + P_0(s)y'_0] \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)} \left[\frac{2}{(s-3)} + (s-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \right] = \frac{2}{(s-1)(s-2)(s-3)} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)(s-1)(s-2)} + \frac{1}{s-1}, \quad \text{Re } s > 3.$$

4. Fce $Y(s)$ je regulární pro $Re(s) > 3$.

Výpočet originálu $y(t)$ pomocí residua:

$$y(t) = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}_{s=s_k} \left[\frac{2e^{st}}{(s-1)(s-2)(s-3)} \right] + \operatorname{Res}_{s=1} \frac{e^{st}}{s-1} = 2e^t - 2e^{2t} + e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

$$y(t) = (2e^t - 2e^{2t} + e^{3t}) \cdot \eta(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

5. Ověření řešení:

$$y'(t) = 2e^t - 4e^{2t} + 3e^{3t}, \quad y''(t) = 2e^t - 8e^{2t} + 9e^{3t}, \quad t \geq 0.$$

Po dosazení do původní DR dostaneme:

$$LS = y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}, \quad PS = 2e^{3t} \Rightarrow LS = PS.$$

Ověření počátečních podmínek:

$$y(0) = 2e^0 - 2e^0 + e^0 = 1, \quad y'(0) = 2e^0 - 4e^0 + 3e^0 = 1.$$

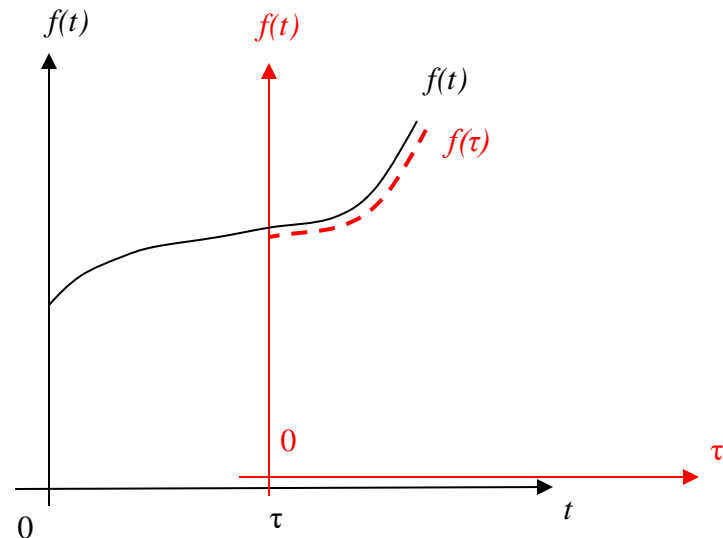
Rozbor algoritmu při podmínce $t_0 \neq 0$

Protože počáteční podmínky jsou zadány v bodě $t_0 \neq 0$, nelze je přímo použít pro nalezení obrazů derivací funkce $y(t)$.

Tento problém vyřešíme zavedením **substituce**: $t - t_0 = \tau$, tj. $t = \tau + t_0$.

Věta: Zavedením substituce $t = \tau + t_0$ dochází k posunutí soustavy souřadnic doprava, dostaneme novou fci $y(t) = y(\tau + t_0) = u(\tau)$ a k počátečních podmínek: $u(0), u'(0), \dots$

Derivace fce y podle τ budou formálně stejné jako derivace fce y podle t , navíc při $t = t_0$ bude $\tau = 0$.



Příklad

Určíme partikulární řešení původní DR: $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$,
 $y(1) = y'(1) = 1$.

Řešení:

1. Analýza zůstala beze změny.

Zavedeme substituci: $t - 1 = \tau$, tj. $t = \tau + 1$.

DR v novém souřadnicovém systému je: $u'' - 3u' + 2u = 2e^{3(\tau+1)}$,
 $u(0) = 1, u'(0) = 1$.

Nechť $U(s)$ je L -obraz fce $u(\tau)$, tj. $U(s) = L\{u(\tau)\}$.

Dle věty o derivování originálu:
 $L\{u'(\tau)\} = sU(s) - 1$,
 $L\{u''(\tau)\} = s^2U(s) - s - 1$.

2. L -obraz nové DR: $s^2U(s) - s - 1 - 3(sU(s) - 1) + 2U(s) = \frac{2e^3}{s - 3}$

3. L -obraz řešení je:

$$U(s) = \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)} \left[\frac{2e^3}{(s-3)} + (s-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \right] = \frac{2e^3}{(s-1)(s-2)(s-3)} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow$$

$$U(s) = \frac{2e^3}{(s-3)(s-1)(s-2)} + \frac{1}{s-1}, \quad \operatorname{Re} s > 3.$$

4. Fce $U(s)$ je regulární pro $\operatorname{Re} s > 3$.

Výpočet originálu $u(\tau)$:

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}_{s=s_k} \left[\frac{2e^3 e^{s\tau}}{(s-1)(s-2)(s-3)} \right] + \operatorname{Res}_{s=1} \frac{e^{s\tau}}{s-1} = e^3 (e^{3\tau} - 2e^{2\tau} + e^\tau) + e^\tau, \quad \tau \geq 0.$$

Po zpětné substituci:

$$y(t) = e^3 (e^{3(t-1)} - 2e^{2(t-1)} + e^{(t-1)}) + e^{(t-1)}, \quad t \geq 1.$$

Výsledek:

$$y(t) = e^{3t} - 2e^{2t+1} + e^{t+2} + e^{t-1}, \quad t \geq 1.$$

Rozbor algoritmu při nespojitě pravé straně

Příklad

$$2x' + x = f(t) \quad \text{při } x(0) = 0, \text{ kde } f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2), \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

Řešení:

1. Analýza:

Ověření splnění podmínek pro pravou stranu DR $f(t)$:

Fce $f(t)$ je po částech spojitá v intervalu $[0, \infty)$,

bod nespojitosti $t = 2$, pro $t < 0$ doplníme $f(t) = 0$,

$f(t)$ má ohraničený růst: $f(t) \leq M e^{\sigma t}$, stačí zvolit $M=1$ a $\sigma > 0$, $\sigma_0 = 0$.

Podmínky jsou splněny, teď sestavíme L -obraz fce

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-2s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Nechť $X(s) = L\{x(t)\}$, takže $L\{x'(t)\} = s \cdot X(s) - 0 = s \cdot X(s)$.

2. Dle věty o linearitě dostaneme L -obraz DR:

$$2s \cdot X(s) + X(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-2s}).$$

3. Obraz řešení : $X(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(2s+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s(s+0,5)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-2s}}{s(s+0,5)}, \operatorname{Re}(s) > 0.$

4. Originál: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

- Originál k prvnímu zlomku $\frac{1}{2s(s+0,5)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0,5}$, bude

$$x_1(t) = 1 - 1 \cdot e^{-t/2} = 1 - e^{-t/2}, \quad t \geq 0.$$

- Druhý zlomek se liší od prvního pouze činitelem e^{-2s} , originál k druhému zlomku na základě věty o posunutí bude

$$x_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{-e^{-2s}}{2s(s+0,5)} \right\} = - \left(1 - e^{(t-2)/2} \right) = e^{(t-2)/2} - 1, \quad t \geq 2.$$

Výsledek tedy bude ve tvaru:

$$x(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-2s}}{2s(s + 0,5)} \right\} = \begin{cases} x_1(t), & t \in [0, 2) \\ x_1(t) + x_2(t), & t \in [2, \infty). \end{cases}$$

po dosazení a po zjednodušení dostaneme řešení ve tvaru:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/2}, & 0 \leq t < 2, \\ (e - 1) \cdot e^{-t/2} & t \geq 2. \end{cases}$$

Výsledek rovněž můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$x(t) = 1 - e^{-t/2} + (e - 1) \cdot e^{-t/2} \cdot \eta(t - 2), \quad t \in \mathbf{R}.$$

5. Provedeme analýzu řešení $x(t)$ v okolí bodu $t = 2$, v němž pravá strana DR $f(t)$ je fce nespojitá.

Dle zadání DR lze očekávat, že řešení DR $x(t)$ bude spojitá fce, avšak její první derivace $x'(t)$ je fce v tomto bodě nespojitá.

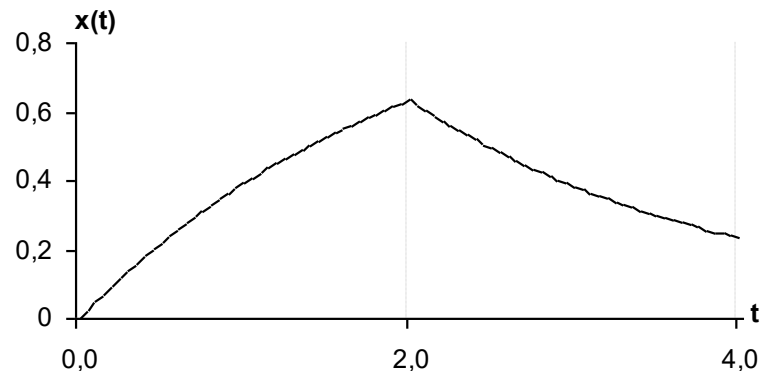
Vypočteme jednostranné limity funkce $x(t)$ v bodě $t = 2$:

$$\lim_{t \rightarrow 2_-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 2_-} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow 2_-} \left(1 - e^{-t/2} \right) = 1 - e^{-1};$$

$$\lim_{t \rightarrow 2_+} x(t) = \lim_{t \rightarrow 2_+} (x_1(t) + x_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 2_+} (e - 1)e^{-t/2} = 1 - e^{-1};$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 2_-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 2_+} x(t) = x(2) = 1 - e^{-1}.$$

Tedy řešení DR $x(t)$ je fce spojitá pro $t > 0$



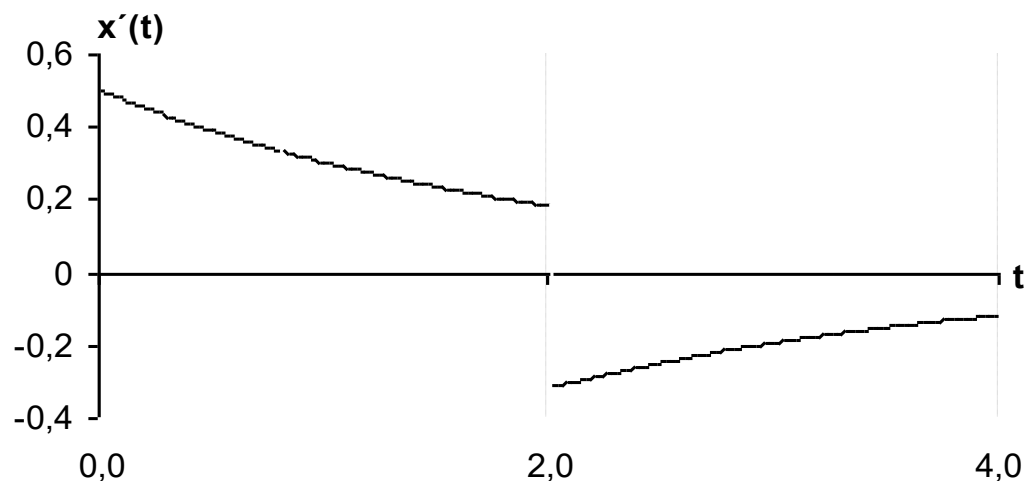
Teď vypočteme jednostranné limity fce $x'(t)$ v bodě $t = 2$:

$$\lim_{t \rightarrow 2_-} x'(t) = \lim_{t \rightarrow 2_-} x'_1(t) = \lim_{t \rightarrow 2_-} \frac{1}{2} e^{-t/2} = \frac{1}{2e};$$

$$\lim_{t \rightarrow 2_+} x'(t) = \lim_{t \rightarrow 2_+} (x'_1(t) + x'_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 2_+} \left(\frac{e-1}{-2} \right) e^{-t/2} = \frac{1}{2} (e^{-1} - 1);$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 2_-} x'(t) \neq \lim_{t \rightarrow 2_+} x'(t).$$

První derivace řešení DR $x'(t)$ je fce v bodě $t = 2$ nespojitá.



Příklad

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \geq \pi \end{cases} \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

Řešení:

1. Analýza: $L(y(t)) \stackrel{\text{ozn}}{=} Y(s), \quad L(f(t)) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$

2. L-obraz DR: $L(y'' + \omega^2 y) = L(f(t)),$

3. L-obraz řešení DR: $B_2 = s^2 + \omega^2$ – charakteristický polynom,

$$P_1 = s, \quad P_0 = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1} + s - 1 \right], \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 1)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 1)} + \frac{s - 1}{(s^2 + \omega^2)}.$$

4. Zpětná transformace:

$$y_1(t) = L^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2 + \omega^2}\right) = \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad t \geq 0.$$

$$y_2(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 1)}\right), \quad t \geq 0.$$

$$y_3(t) = L^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 1)}\right) = y_2(t - \pi), \quad t \geq \pi.$$

$$y(t) = \begin{cases} y_1 + y_2, & t \in [0, \pi) \\ y_1 + y_2 + y_3, & t \geq \pi \end{cases} = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \cdot \eta(t - \pi), \quad t \geq 0.$$

Hlavní etapy řešení SLDR (soustavy LDR)

$$L^n(y(t))=f(t)$$

1. Stanovíme předpoklady pro řešení a ověříme splnění podmínek.

Označení: $Y(s)=(Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_k(s))$ je L -obraz $y(t)=(y_1, y_2, \dots, y_k)$

$F(s)=L\{f(t)\}$ je L -obraz fce $f(t)=(f_1, f_2, \dots, f_k)$

Na základě předpokladů sestavíme L -obrazy $y^{(n)}(t)$.

2. Sestavíme L -obraz SLDR na základě věty o linearitě.
Tímto obrazem bude soustava algebraických rovnic.
3. Nalezneme řešení této soustavy algebraic. rovnic.
Řešením bude $Y(s)$, tj. L -obraz vektorové funkce $y(t)$.
4. Transformujeme nalezený obraz $Y(s)$ zpět na originál $y(t)$.
5. Nakonec provedeme kontrolu řešení.

Příklad

$$x' - 2y = 0$$

$$y' + 2x = 1$$

Určíme partikulární řešení SLDR:

$$a) \quad x(0) = 1, y(0) = 0; \quad b) \quad x(\pi) = 1, y(\pi) = 0$$

Řešení a):

1. Analýza: Předpokládáme, že pro fce $x(t), y(t)$ existují L -obrazy:

$$\exists \quad L\{x(t)\} \stackrel{ozn}{=} X(s), \quad L\{y(t)\} \stackrel{ozn}{=} Y(s).$$

Ověření podmínek pro pravou stranu SLDR $f(t) = (f_1, f_2) = (0, 1)(t)$:

- $f(t)$ je spojitá na intervalu $[0, \infty)$,
- pro $t < 0$ doplníme $f(t) = (0, 0)$,
- $f_1(t)$ má ohraničený růst: $|0| \leq M e^{\sigma t}$, zde $M=1$ a $\sigma > 0, \sigma_0=0$.

Skutečně $|0| < 1$.

$f_2(t)$ má ohraničený růst: $|1| \leq M e^{\sigma t}$, zde $M=2$ a $\sigma > 0, \sigma_0=0$.

Skutečně $|1| < 2$.

Podmínky jsou splněny, teď sestavíme L -obraz funkce

$$L\{0\} = 0, \quad L\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Předpokládáme, že pro $x'(t)$, $y'(t)$ existují L -obrazy.

Použitím věty o derivování originálu sestavíme L -obrazy:

$$L\{x'(t)\} = sX(s) - x(0_+), \quad L\{y'(t)\} = sY(s) - y(0_+).$$

2. Pro počáteční podmínky a) $x(0) = 1, y(0) = 0$:

$$L\{x'(t)\} = sX(s) - 1, \quad L\{y'(t)\} = sY(s).$$

Použitím věty o linearitě sestavíme L -obraz zadané SLDR (dostaneme soustavu algebraických rovnic):

$$s \cdot X(s) - 1 - 2 \cdot Y(s) = 0, \quad s \cdot X(s) - 2 \cdot Y(s) = 1,$$

$$s \cdot Y(s) + 2 \cdot X(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot X(s) + s \cdot Y(s) = \frac{1}{s}$$

3. Řešení soustavy alg. rovnic (například pomocí determinantů):

$$D_s = \begin{vmatrix} s & -2 \\ 2 & s \end{vmatrix} = s^2 + 4, \quad D_X = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{s} & s \end{vmatrix} = s + \frac{2}{s}, \quad D_Y = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 2 & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = -1.$$

$$L\text{-obraz řešení: } X(s) = \frac{D_X}{D_s} = \frac{s^2 + 2}{s \cdot (s^2 + 4)}; \quad Y(s) = \frac{D_Y}{D_s} = \frac{-1}{s^2 + 4}.$$

4. Fce $X(s)$, $Y(s)$ jsou regulární pro $\operatorname{Re} s > 0$.

Řešením SLDR bude dvojice fčí $(x(t), y(t))$ pro $t \geq 0$:

- Originál k obrazu $Y(s)$: $y(t) = -\frac{1}{2} \sin 2t, \quad t \geq 0.$

- $X(s)$ má 3 jednoduché póly: $s = 0, s = 2i, s = -2i.$

Originál k $X(s)$ bude $x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s^2 + 2}{s \cdot (s^2 + 4)}\right\} \Rightarrow$

$$x(t) = \operatorname{Re}_{s=0} \frac{(s^2 + 2)e^{st}}{s \cdot (s^2 + 4)} + 2 \operatorname{Re}_{s=2i} \left[\frac{(s^2 + 2)e^{st}}{s \cdot (s + 2i)(s - 2i)} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t, \quad t \geq 0.$$

Výsledek (originál): $(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t; -\sin 2t), \quad t \geq 0.$

5. Ověření řešení:

$$(x'(t), y'(t)) = (-\sin 2t, -\cos 2t), \quad t \geq 0.$$

Po dosazení do původní SLDR dostaneme:

$$LS = \left(\begin{array}{l} -\sin 2t + 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right) = 0 \\ -\cos 2t + 2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) = 1 \end{array} \right), \quad PS = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow LS = PS.$$

Ověření počátečních podmínek:

$$x(0) = \frac{1}{2} (1 + \cos 0) = 1, \quad y(0) = -\frac{1}{2} \cdot \sin 0 = 0$$

Řešení b):

$$x' - 2y = 0$$

$$y' + 2x = 1$$

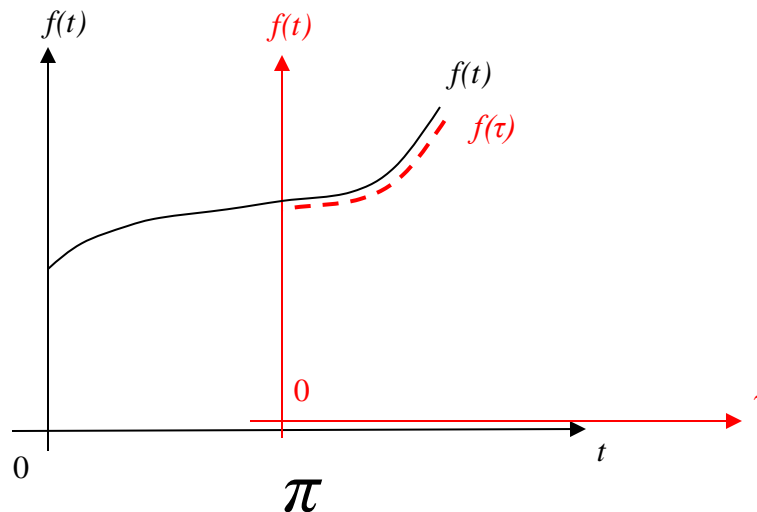
$$x(\pi) = 1, y(\pi) = 0$$

Počáteční podmínky jsou zadány v bodě $t_0 \neq 0$.

Zavedeme substituce: $t - \pi = \tau$, tj. $t = \tau + \pi$

Věta: Zavedením substituce $t = \tau + \pi$ dochází k posunutí soustavy souřadnic doprava, dostaneme novou fci $(u(\tau), v(\tau)) = a$ k počátečním podmínkám: $u(0) = 1, v(0) = 0, \dots$

Derivace podle τ budou formálně stejné jako derivace x, y podle t , navíc při $t = \pi$ bude $\tau = 0$.



1. Analýza zůstala beze změny.

SLDR v novém souřadnicovém systému bude

$$\begin{aligned} u' - 2v &= 0 \\ v' + 2u &= 1 \end{aligned} \quad u(0) = 1, v(0) = 0$$

Nechť $U(s)$ je L -obraz fce $u(\tau)$, tj. $U(s) = \mathcal{L}\{u(\tau)\}$,

Nechť $V(s)$ je L -obraz fce $v(\tau)$, tj. $V(s) = \mathcal{L}\{v(\tau)\}$.

Dle věty o derivování originálu: $\mathcal{L}\{u'(\tau)\} = sU(s) - 1$, $\mathcal{L}\{v'(\tau)\} = sV(s)$.

2. L -obraz nové SLDR (stejně jako v prvním případě):

$$s \cdot U(s) - 2 \cdot V(s) = 1,$$

$$2 \cdot U(s) + s \cdot V(s) = \frac{1}{s}$$

3. Řešení soustavy alg. rovnic je stejné:

$$D_s = \begin{vmatrix} s & -2 \\ 2 & s \end{vmatrix} = s^2 + 4, \quad D_U = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{s} & s \end{vmatrix} = s + \frac{2}{s}, \quad D_V = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 2 & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = -1.$$

L-obraz řešení: $U(s) = \frac{D_U}{D_s} = \frac{s^2 + 2}{s \cdot (s^2 + 4)}$; $V(s) = \frac{D_V}{D_s} = \frac{-1}{s^2 + 4}$, $Re s > 0$.

4. Řešením SLDR v nové soustavě bude dvojice fcí $(u(\tau), v(\tau))$, $\tau \geq 0$

- Originál k obrazu $V(s)$ je $v(\tau) = -\frac{1}{2} \sin 2\tau$, $\tau \geq 0$.
- Originál k $U(s)$ je (výpočet je stejný jako v 1.případě)

$$u(\tau) = L^{-1}\{U(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s^2 + 2}{s \cdot (s^2 + 4)}\right\} \Rightarrow u(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\tau, \quad \tau \geq 0.$$

Výsledek (originál):

$$(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2(t - \pi); -\sin 2(t - \pi)), \quad t \geq \pi.$$

$$(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t; -\sin 2t), \quad t \geq \pi.$$

Příklad

$$x' - 2y = 0$$

$$y' + 2x = f(t) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi), \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases} \quad \text{poč. pod.} \quad x(0) = 1, y(0) = 0;$$

Řešení:

1. Analýza je stejná jako v předchozích případech.

Pozor!!! pravá strana je nespojitá.

$$\text{L-obraz} \quad L\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-\pi s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

$$\text{Necht' } X(s) = L\{x(t)\}, \text{ pak } L\{x'(t)\} = s \cdot X(s) - 1,$$
$$Y(s) = L\{y(t)\}, \text{ pak } L\{y'(t)\} = s \cdot Y(s)$$

2. L-obraz SLDR:

$$s \cdot X(s) - 2 \cdot Y(s) = 1,$$

$$2 \cdot X(s) + s \cdot Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-\pi s}$$

3. Obraz řešení :

$$D_s = s^2 + 4, \quad D_X = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1-e^{-\pi s}}{s} & s \end{vmatrix} = s + \frac{2-e^{-\pi s}}{s}, \quad D_Y = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 2 & \frac{1-e^{-\pi s}}{s} \end{vmatrix} = -1-e^{-\pi s}.$$

$$X(s) = \frac{D_X}{D_s} = \frac{s^2 + 2 - e^{-\pi s}}{s \cdot (s^2 + 4)}; \quad Y(s) = \frac{D_Y}{D_s} = \frac{-1 - e^{-\pi s}}{s^2 + 4}. \quad \text{Re}(s) > 0.$$

4. Originálem bude dvojice fcí $(x(t), y(t))$, přičemž

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$x_1(t) = L^{-1} \left[\frac{s^2 + 2}{s \cdot (s^2 + 4)} \right]; \quad y_1(t) = L^{-1} \left[\frac{-1}{s^2 + 4} \right], \quad t \geq 0$$

$$x_2(t) = L^{-1} \left[\frac{-e^{-\pi s}}{s \cdot (s^2 + 4)} \right]; \quad y_2(t) = L^{-1} \left[\frac{-e^{-\pi s}}{s^2 + 4} \right], \quad t \geq \pi$$

Výpočet originálu: $x_1(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, $y_1(t) = -\sin 2t$, $t \geq 0$

$$y_2(t) = L^{-1} \left[\frac{-e^{-\pi s}}{s^2 + 4} \right] = -\frac{1}{2} \sin 2t, \quad t \geq \pi$$

$$x_2(t) = L^{-1} \left[\frac{-e^{-\pi s}}{s \cdot (s^2 + 4)} \right] = \left[\operatorname{Re}_{s=0} s \frac{-e^{-st}}{s \cdot (s^2 + 4)} \right] + 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Re}_{s=2i} s \frac{-e^{-st}}{s \cdot (s^2 + 4)} \right] \Rightarrow$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{4} + 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Re}_{s=2i} s \frac{-e^{-st}}{s \cdot (s + 2i)(s - 2i)} \right] \Rightarrow$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{4} - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{-e^{-2it}}{2i \cdot 4i} \right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2t, \quad t \geq \pi$$

Výsledek: $x(t) = \begin{cases} x_1(t), & 0 \leq t < \pi, \\ x_1(t) + x_2(t) & t \geq \pi. \end{cases}$

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & 0 \leq t < \pi, \\ y_1(t) + y_2(t) & t \geq \pi. \end{cases}$$

- chyba - numerický výpočet c_n sec2_4
- algoritmus FFT
- Konvoluce, Stieljetsova transformace kap2_1
- Dirichletovo, Fejerovo jádro, Gibbs. jev kap2_3
- Fourierova transformace kap_7N

kap5_Multir_5

sec5_6-7

Filtrace signálu DT