

Vrstevnice

Příklad 2.

Zadání:

Určete rovnice vrstevnic funkce

$$f(x, y) = 1 - |x| - |y|$$

a znázorněte ty z nich, které vzniknou průnikem rovin $f(x, y) = c$,
 $c = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Řešení:

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

Rovnice vrstevnic jsou ve tvaru

$$v_f(c): 1 - |x| - |y| = c.$$

Pro $c > 1$ je $v_f = \emptyset$, protože $1 - |x| - |y| \leq 1$.

Pro $c = 1$ je $v_f = 1$ pro $x = 0 \wedge y = 0$, protože

$$1 - |x| - |y| = 1$$

$$|x| + |y| = 0$$

$$|y| = -|x|.$$

Dostaneme $(0, 0)$.

Pro $c = 0$ je

$$1 - |x| - |y| = 0$$
$$|y| = 1 - |x|.$$

Z poslední rovnosti vyplývají tyto případy

1. V prvním případě uvažujme $y \geq 0$, pak
 - (a) pro $x \geq 0$ je $y = 1 - x$,
 - (b) pro $x < 0$ je $y = 1 + x$.
2. Ve druhém případě, tj. $y < 0$, dostaneme
 - (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = x - 1$
 - (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = -x - 1$.

Pro kóty $c = -1, -2, -3, -4$ dopadne situace obdobným způsobem.
 $c = -1$:

$$1 - |x| - |y| = -1$$
$$|y| = 2 - |x|.$$

1. Pro $y \geq 0$ dostaneme

(a) pro $x \geq 0$ rovnicí $y = 2 - x$,

(b) a pro $x < 0$ rovnicí $y = 2 + x$.

2. Pro $y < 0$, dostaneme

(a) pro $x \geq 0$ rovnicí $y = x - 2$

(b) a pro $x < 0$ rovnicí $y = -x - 2$.

$$c = -2:$$

$$1 - |x| - |y| = -2$$

$$|y| = 3 - |x|.$$

1. Pro $y \geq 0$ dostaneme

(a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = 3 - x$,

(b) a pro $x < 0$ rovnici $y = 3 + x$.

2. Pro $y < 0$, dostaneme

(a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = x - 3$

(b) a pro $x < 0$ rovnici $y = -x - 3$.

$c = -3$:

$$1 - |x| - |y| = -3$$

$$|y| = 4 - |x|.$$

1. Pro $y \geq 0$ dostaneme

(a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = 4 - x$,

(b) a pro $x < 0$ rovnici $y = 4 + x$.

2. Pro $y < 0$, dostaneme

(a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = x - 4$

(b) a pro $x < 0$ rovnici $y = -x - 4$.

$c = -4$:

$$1 - |x| - |y| = -4$$
$$|y| = 5 - |x|.$$

1. Pro $y \geq 0$ dostaneme

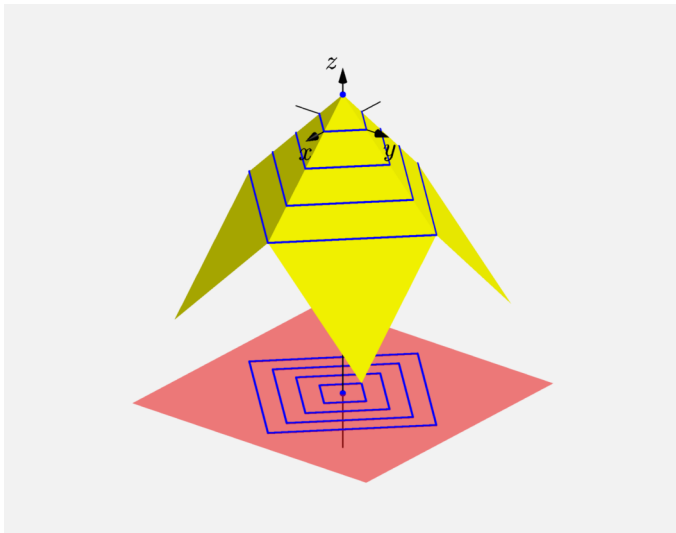
(a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = 5 - x$,

(b) a pro $x < 0$ rovnici $y = 5 + x$.

2. Pro $y < 0$, dostaneme

(a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = x - 5$

(b) a pro $x < 0$ rovnici $y = -x - 5$.



Obrázek 1: Vrstevnice funkce $f(x, y)$