Taylorův mnohočlen

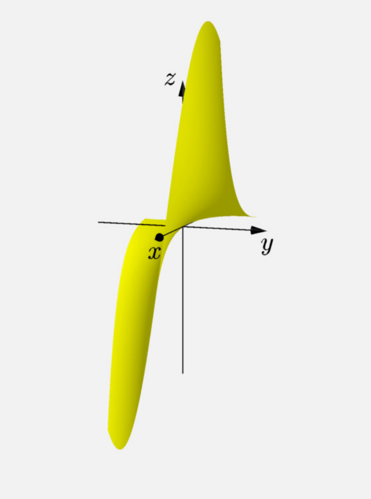
Příklad 3.

Zadání:

Najděte Taylorův mnohočlen prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$$

se středem v bodě $S = (0, 0)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Pro Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu platí

$$T_4\left(x,y\right) = f\left(0,0\right) + \mathrm{d}f_{(0,0)}\left(x-0,y-0\right) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{(0,0)}\left(x-0,y-0\right) + \\ + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f_{(0,0)}\left(x-0,y-0\right) + \frac{1}{24}\mathrm{d}^4 f_{(0,0)}\left(x-0,y-0\right)\ .$$

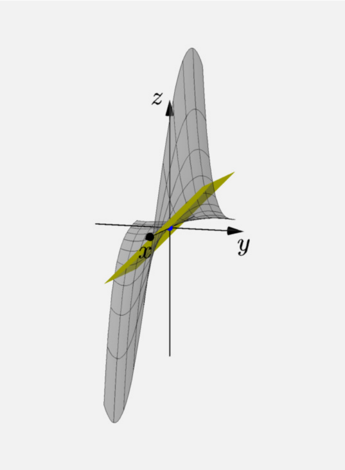
Parciální derivace prvního řádu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y \,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y \,.$$

Taylorův mnohočlen prvního řádu

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + \mathrm{d}f_{(0,0)}(x - 0, y - 0)$$

$$T_1(x, y) = 1 \cdot (y - 0) = y \,.$$



Obrázek 2: Taylorův mnohočlen 1. řádu

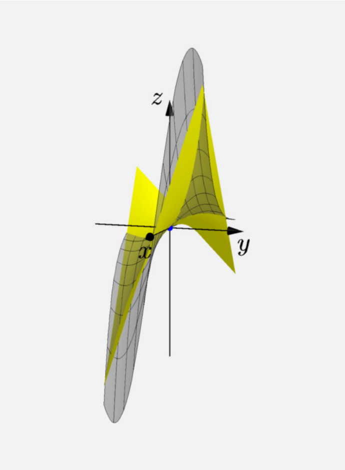
Parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y$$

Taylorův mnohočlen druhého řádu

$$T_2(x,y) = f(0,0) + \mathrm{d}f_{(0,0)}(x-0, y-0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{(0,0)}(x-0, y-0)$$

$$T_2(x,y) = y + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 1 \cdot (x-0)(y-0) = y + xy\,.$$



Obrázek 3: Taylorův mnohočlen 2. řádu

Parciální derivace třetího řádu

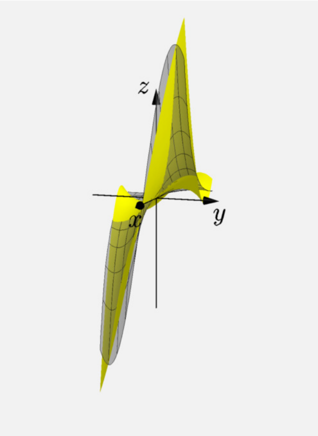
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y\,, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y\,,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x y^2}(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y\,, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -\mathrm{e}^x \cos y$$

Taylorův mnohočlen třetího řádu

$$\begin{aligned} T_3(x,y) = {} & f(0,0) + \mathrm{d}f_{(0,0)}(x-0,y-0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{(0,0)}(x-0,y-0) + \\ & + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f_{(0,0)}(x-0,y-0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3(x,y) &= y + xy + \frac{1}{6}\cdot 3 \cdot 1 \cdot (x-0)^3(y-0) + (-1)\cdot(y-0)^3 = \\ &= y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3\,. \end{aligned}$$



Obrázek 4: Taylorův mnohočlen 3. řádu

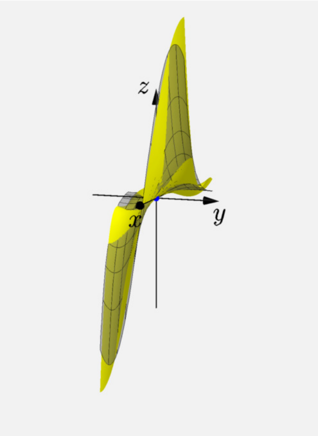
Parciální derivace čtvrtého řádu

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\,(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y \ ,$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 y}\,(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y \ ,$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 y^2}\,(x, y) = -\mathrm{e}^x \sin y \ ,$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x y^3}\,(x, y) = -\mathrm{e}^x \cos y \ ,$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\,(x,\ y) = \mathrm{e}^x \sin y$$

Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu

$$T_4\left(x,y\right)=f\left(0,0\right)+\mathrm{d}f_{(0,0)}\left(x-0,y-0\right)+\frac{1}{2}\mathrm{d}^2f_{(0,0)}\left(x-0,y-0\right)+$$
$$+\frac{1}{6}\mathrm{d}^3f_{(0,0)}\left(x-0,y-0\right)+\frac{1}{24}\mathrm{d}^4f_{(0,0)}\left(x-0,y-0\right)$$

$$T_4\left(x,y\right)=y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{24}\cdot 4\cdot 1\cdot (x-0)^3(y-0)+$$
$$+\frac{1}{24}\cdot 4\cdot(-1)\cdot(x-0)(y-0)^3=y+xy+\frac{1}{2}x^2y-$$
$$-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{6}x^3y-\frac{1}{6}xy^3\,.$$



Obrázek 5: Taylorův mnohočlen 4. řádu

	$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$(x,y)=(1,1)$	$(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$
$f(x,y)$	0,7904390834	2,287355287	4,470462379
$T_1(x,y)$	0,5000000000	1,000000000	1,500000000
chyba	0,2904390834	1,287355287	2,970462379
$T_2(x,y)$	,7500000000	2,000000000	3,750000000
chyba	0,0404390834	,287355287	0,720462379
$T_3(x,y)$	0,7916666667	2,333333333	4,875000000
chyba	0,0012275833	0,045978046	0,404537621
$T_4(x,y)$	0,7916666667	2,333333333	4,875000000
chyba	0,0012275833	0,045978046	0,404537621

Tabulka 1: Tabulka funkčních hodnot