

Taylorův mnohočlen

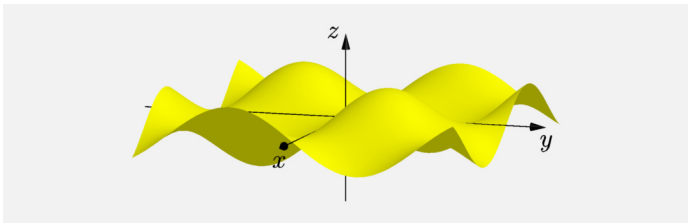
Příklad 1.

Zadání:

Najděte Taylorův mnohočlen prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce

$$f(x, y) = \sin x \sin y$$

se středem v bodě $S = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Pro Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu platí

$$\begin{aligned}T_4(x, y) &= f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\&+ \frac{1}{2}d^2f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\&+ \frac{1}{6}d^3f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\&+ \frac{1}{24}d^4f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) .\end{aligned}$$

Parciální derivace prvního řádu

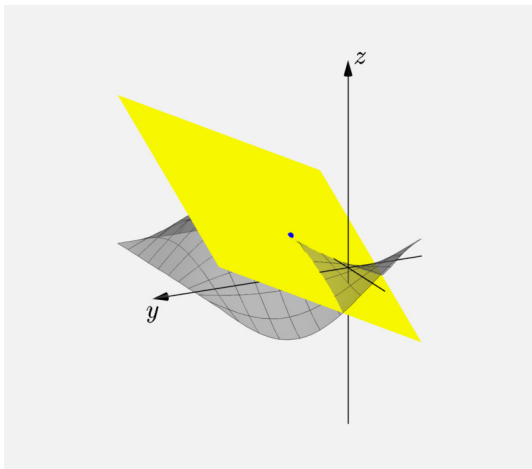
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x \sin y ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin x \cos y .$$

Taylorův mnohočlen prvního řádu

$$T_1(x, y) = f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$T_1(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y - \frac{\pi}{2} + 1\right) .$$



Obrázek 2: Taylorův mnohočlen 1. řádu

Parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\sin x \sin y,$$

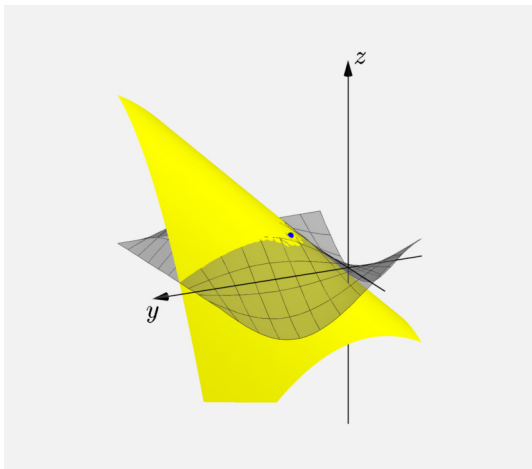
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) = \cos x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\sin x \sin y.$$

Taylorův mnohočlen druhého řádu

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}d^2f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$T_2(x, y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x + y + xy - \frac{\pi}{2} + 1 \right).$$



Obrázek 3: Taylorův mnohočlen 2. řádu

Parciální derivace třetího řádu

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = -\cos x \sin y ,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}(x, y) = -\sin x \cos y ,$$

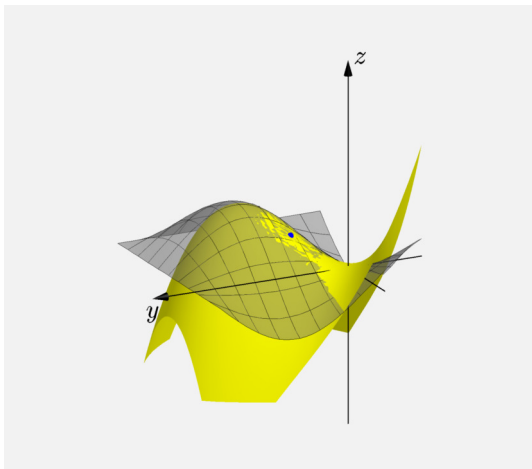
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x y^2}(x, y) = -\cos x \sin y ,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = -\sin x \cos y .$$

Taylorův mnohočlen třetího řádu

$$\begin{aligned}T_3(x, y) &= f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\&+ \frac{1}{2}d^2f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\&+ \frac{1}{6}d^3f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_3(x, y) &= -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{8}y^2\pi - \frac{1}{16}y\pi^2 + \frac{1}{8}x^2\pi - \frac{1}{16}x\pi^2 - \\&- \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{96}\pi^3 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2} + \\&+ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xy\pi.\end{aligned}$$



Obrázek 4: Taylorův mnohočlen 3. řádu

Parciální derivace čtvrtého řádu

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y) = \sin x \sin y ,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 y}(x, y) = -\cos x \cos y ,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 y^2}(x, y) = \sin x \sin y .$$

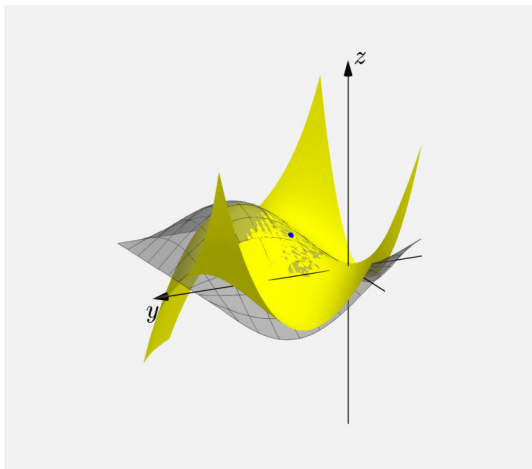
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x y^3}(x, y) = -\cos x \cos y ,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, y) = \sin x \sin y ,$$

Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu

$$\begin{aligned}T_4(x, y) &= f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\&+ \frac{1}{2}d^2f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\&+ \frac{1}{6}d^3f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\&+ \frac{1}{24}d^4f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_4(x, y) &= -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{8}y^2\pi - \frac{1}{16}y\pi^2 + \frac{1}{8}x^2\pi - \frac{1}{16}x\pi^2 - \\&- \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y - \frac{1}{12}xy^3 + \frac{1}{8}x^2y^2 - \frac{1}{12}x^3y + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x - \\&- \frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{96}\pi^3 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{48}y^4 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}xy\pi.\end{aligned}$$



Obrázek 5: Taylorův mnohočlen 4. řádu

	$(x, y) = \left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right)$	$(x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$	$(x, y) = \left(\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right)$
$f(x, y)$	0,3454915029	0,2500000000	0,1882550992
$T_1(x, y)$	0,3429203673	0,2382006122	0,1634007872
chyba	0,0025711356	0,0117993878	0,0248543120
$T_2(x, y)$	0,3429203673	0,2382006122	0,1634007872
chyba	0,0025711356	0,0117993878	0,0248543120
$T_3(x, y)$	0,3455042237	0,2501629103	0,1888250301
chyba	0,000012720791	0,00016291030	0,00056993091
$T_4(x, y)$	0,3455042237	0,2501629103	0,1888250301
chyba	0,000012720791	0,00016291030	0,00056993091

Tabulka 1: Tabulka funkčních hodnot