Směrová derivace

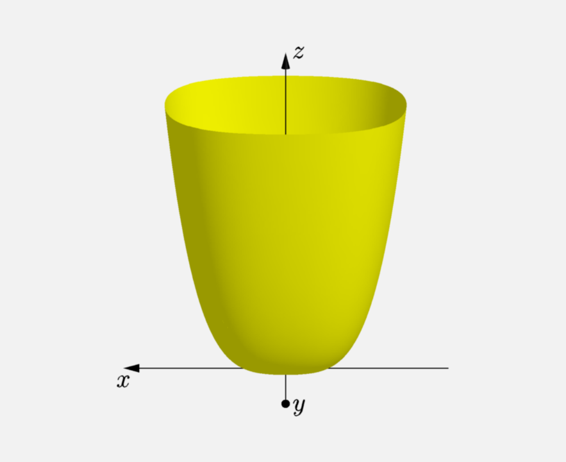
Příklad 3.

Zadání:

Je zadaná funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{5}x^2y^2 + \frac{1}{5}y^4\ .$$

Najděte jednotkový vektor $\mathbf{u}$, pro nějž je směrová derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0) = (1,1)$ maximální a určete její hodnotu.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Směrová derivace je největší ve směru vektoru

$$\mathbf{u} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|},$$

kde $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ je označení pro gradient funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) a platí

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) .$$

První parciální derivace jsou rovny

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{2}{5}xy^2 \,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4}{5}y^3 + \frac{2}{5}x^2y \,.$$

Po dosazení bodu $(1,1)$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{6}{5} \,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{6}{5} \,.$$

Gradient je roven

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right) \,.$$

Nyní můžeme vypočítat velikost gradientu

$$\|\operatorname{grad} f(1,1)\| = \frac{6\sqrt{2}}{5}\ .$$

Směrová derivace je největší ve směru vektoru

$$\mathbf{u} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ .$$

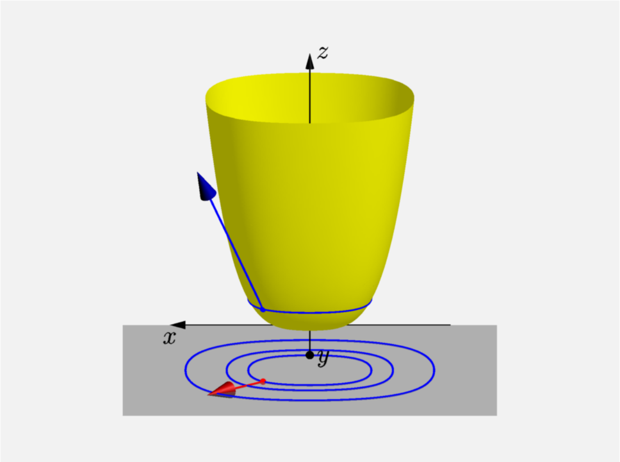
Pro maximální hodnotu směrové derivace platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}\,(x_0, y_0) &= \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0),\ \mathbf{u} \rangle = \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0), \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} \rangle = \\
&= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0),\ \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \rangle = \\
&= \frac{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|^2}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|\,,
\end{aligned}
$$

kde $\langle\ ,\ \rangle$ je označení pro skalární součin.

Hodnota směrové derivace je

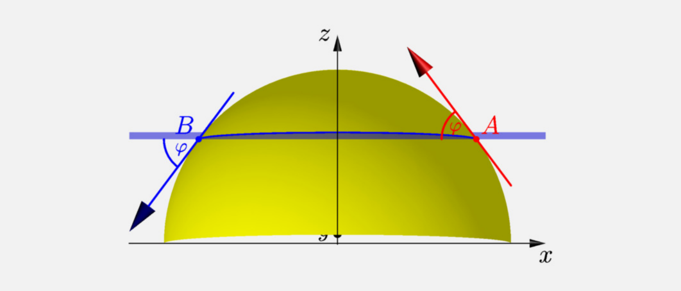
$$
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}\,(x_0, y_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\| = \frac{6\sqrt{2}}{5}
$$



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ se znázorněným gradientem

Jak souvisí gradient s průběhem (tvarem) funkce $f(x, y)$?

Gradient nám udává směr, ve kterém funkce $f(x, y)$ nejrychleji roste/klesá. Pro lepší představu si zkusme představit vrstevnice funkce $f(x, y)$ tak, jako by se jednalo o vrstevnice na mapě (Pozn.: Gradient je kolmý na vrstevnice).



Obrázek 3: Geometrický význam gradientu