# Směrová derivace

## Příklad 2.

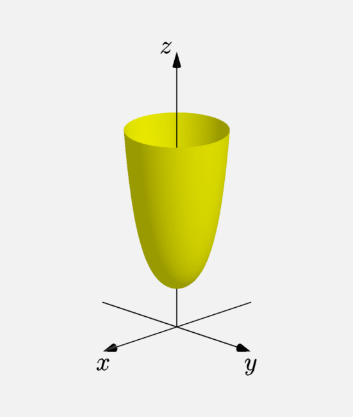
**Zadání:**

Vypočítejte derivaci funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}$$

v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ve směru vektoru

$$\mathbf{u} = (2, 1)\ .$$




Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

**Řešení:**

Zadaný vektor normujeme

$$\mathbf{u} = \frac{(2,1)}{\|\,(2,1)\,\|} = \frac{(2,1)}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,1)\ .$$

První parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnných $x$ a $y$ jsou rovny

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\cdot 2x = 2x\mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) = \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\cdot 2y = 2y\mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\ .$$

Po dosazení $(1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(1,1) = 2\cdot 1\cdot \mathrm{e}^{\left(1^2+1^2\right)} = 2\mathrm{e}^2\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(1,1) = 2\cdot 1\cdot \mathrm{e}^{\left(1^2+1^2\right)} = 2\mathrm{e}^2\ .$$

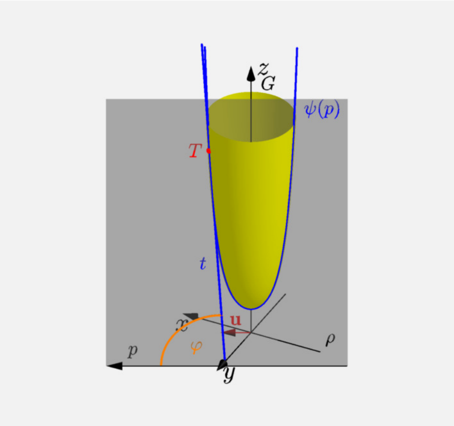
Směrová derivace odpovídá výrazu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0,y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0,y_0),\ \mathbf{u}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot u_2,$$

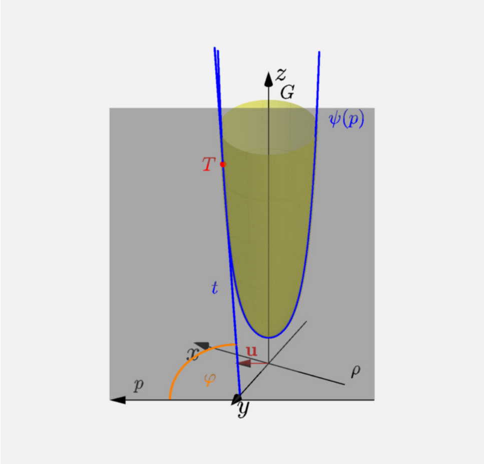
kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je označení pro skalární součin.

Tedy

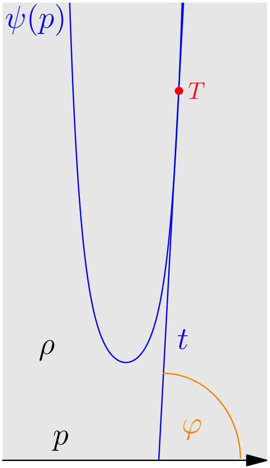
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0,y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0,y_0),\ \mathbf{u}\rangle = 2\mathrm{e}^2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\mathrm{e}^2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6\mathrm{e}^2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}\mathrm{e}^2}{5}\ .$$




Obrázek 2: Směrová derivace




Obrázek 3: Směrová derivace – průhledně




Obrázek 4: Směrová derivace – rovina $\rho$