Směrová derivace

Příklad 1.

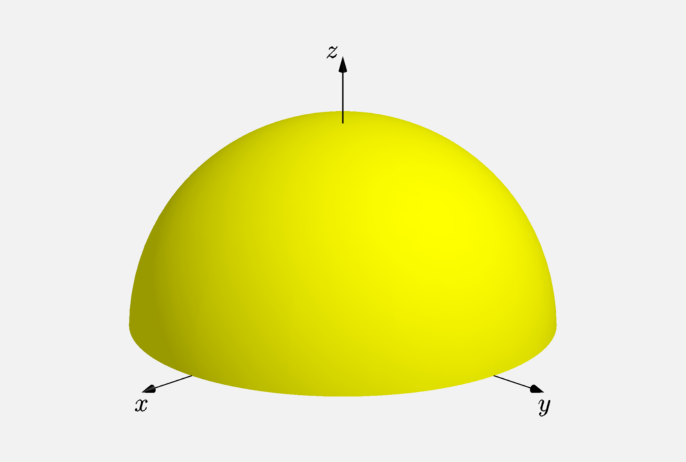
Zadání:

Vypočítejte derivaci funkce

$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

v bodě $(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ ve směru jednotkového vektoru

$$\mathbf{u} = \frac{(-2,1)}{||(-2,1)||} \ .$$



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

První parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnných x a y jsou rovny

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\left(9 - x^2 - y^2\right)^{\frac{-1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(9 - x^2 - y^2\right)^{\frac{-1}{2}}(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\,.$$

Po dosazení $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right) = \frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = -\frac{10}{\sqrt{35}}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{35}}\,.$$

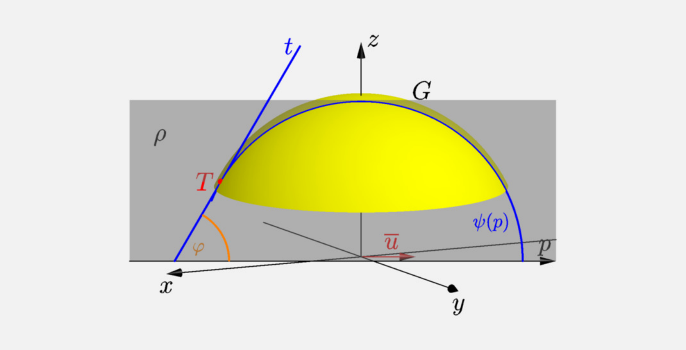
Směrová derivace odpovídá výrazu

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}\,(x_0, y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0),\ \mathbf{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot u_2,$$

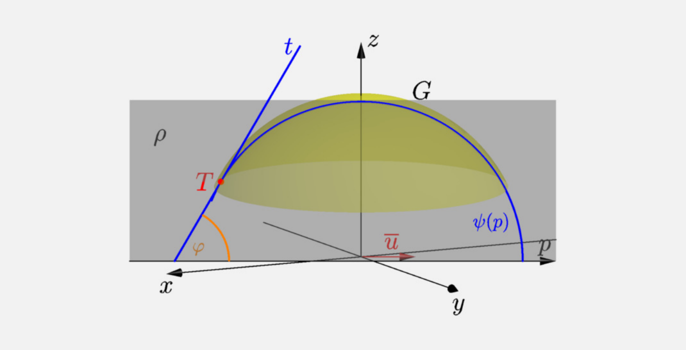
kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je označení pro skalární součin.

Tedy

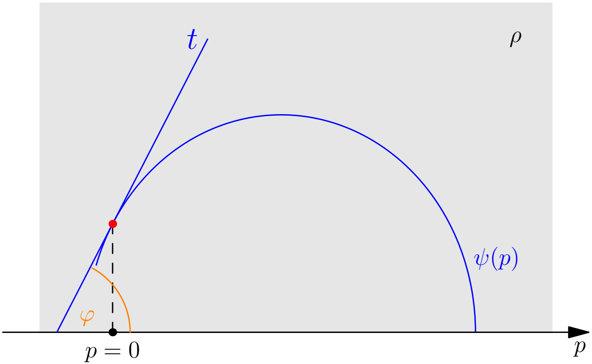
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}\,(x_0, y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0),\ \mathbf{u} \rangle = -\frac{10}{\sqrt{35}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{3}{\sqrt{35}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{23}{5\sqrt{7}}\,.$$



Obrázek 2: Směrová derivace



Obrázek 3: Směrová derivace – průhledně



Obrázek 4: Směrová derivace – rovina ρ

Závěrem si ukažme výpočet směrové derivace přímo z definice.

Položme $\psi(p) = f(A + p\mathbf{u})$, kde $p \in \mathbb{R}$ a $A = (x_0, y_0)$.

Platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \psi'(0) &= \lim_{p\to 0} \frac{\psi(p) - \psi(0)}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{f(A + p\mathbf{u}) - f(A)}{p} = \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{f(x_0 + pu_1, y_0 + pu_2) - f(x_0, y_0)}{p} \, .\end{aligned}$$

Funkce $\psi(p)$ odpovídá výrazu

$$\psi(p) = f(A + p(u)) = f\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}p, -\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}}p\right) =$$

$$= \sqrt{9 - \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}p\right)^2 - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}}p\right)^2} =$$

$$= \sqrt{9 - \left(\frac{25}{4} - \frac{10}{\sqrt{5}}p + \frac{4}{5}p^2\right) - \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{2\sqrt{5}}p + \frac{1}{5}p^2\right)}$$

$$\psi(p) = \sqrt{\frac{35}{16} + \frac{23}{2\sqrt{5}}p - p^2}\,.$$

Derivace $\psi(p)$ je rovna

$$\psi'(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{35}{16} + \frac{23}{2\sqrt{5}}p - p^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{23}{2\sqrt{5}} - 2p\right) \, .$$

Po dosazení za $p = 0$ dostaneme

$$\psi'(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{35}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{23}{2\sqrt{5}} = \frac{23}{5\sqrt{7}} \, .$$