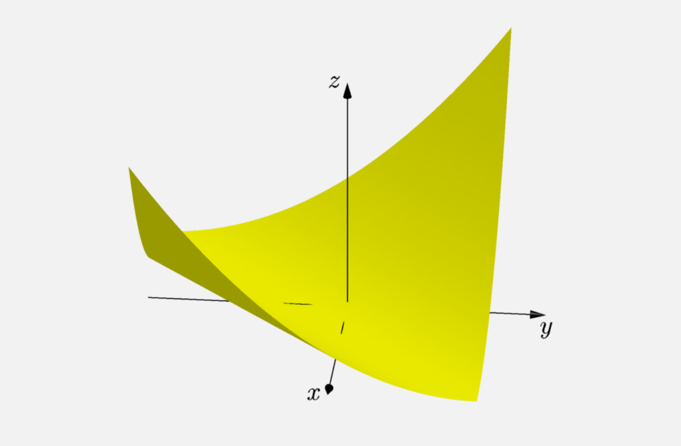
Lokální extrémy

Příklad 3.

Zadání:

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{10}\,(x-y-1)^2 \ .$$



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

První parciální derivace jsou rovny výrazům

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x - 2y - 2}{10} \,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x + 2y + 2}{10} \,.$$

Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých vyjádříme x a y (stacionární body)

$$\frac{2x - 2y - 2}{10} = 0$$
$$\frac{2x - 2y - 2}{10} = 0 \,.$$

Vyjádřeme si, čemu se rovná y

$$
\begin{gathered}
2x - 2y - 2 = 0 \\
x - y - 1 = 0 \\
y = x - 1\,.
\end{gathered}
$$

Stacionárních bodů je tedy nekonečně mnoho $(x, x-1)$.

Druhé parciální derivace jsou rovny

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) = \frac{2}{10}\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) = \frac{2}{10}\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial xy}\,(x,y) = -\frac{2}{10}\,.
\end{gathered}
$$

Determinant $J(x,y)$ je roven

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{2}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Extrém buď zde není, nebo je neostrý.

Uvažujme pomocnou funkci jedné proměnné $g(u) = \frac{1}{10}\,(u-1)^2$, kde $u = x - y$.

Hledáme stacionární body funkce $g(u)$

$$g'(u) = \frac{1}{10}(2u - 2) = 0$$
$$u - 1 = 0$$
$$u = 1\,.$$

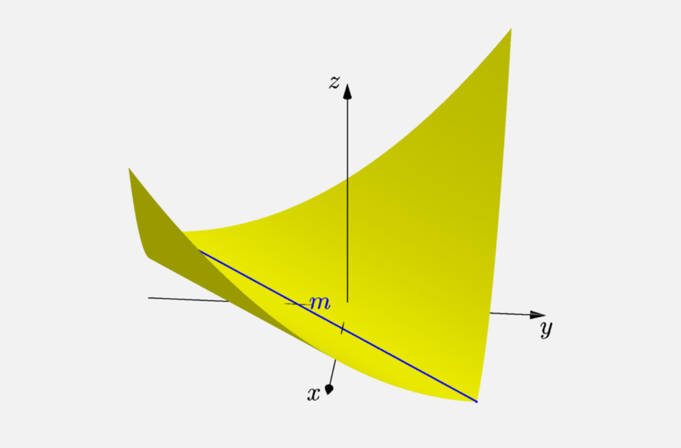
Získali jsme podezřelý bod $u = 1$.

Pro $u \in (-\infty, 1)$ platí $g'(u) < 0$, tzn. funkce je zde klesající.

Pro $u \in (1, \infty)$ platí $g'(u) > 0$, tzn. funkce je zde rostoucí.

Pro $u \neq 1$ platí $g(u) > g(1)$, tzn. bod $u = 1$ je minimem funkce $g(u)$.

Body nalezené přímky $y = x - 1$ jsou neostrými lokálními minimy funkce $f(x, y)$.



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ s extrémem