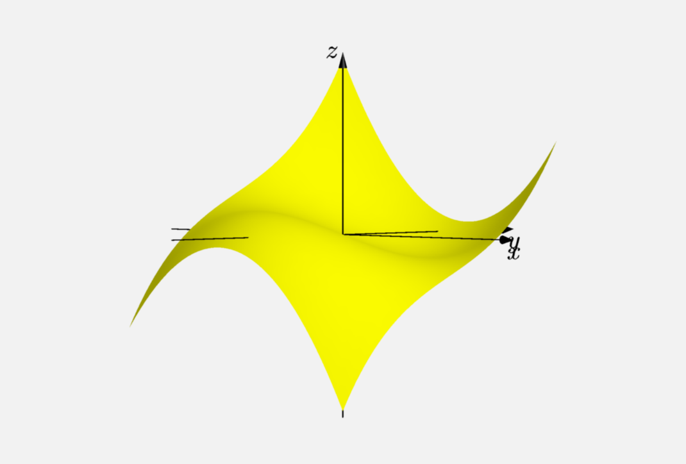
Lokální extrémy

Příklad 1.

Zadání:

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{27}{10}x^2y + \frac{14}{10}y^3 - \frac{69}{10}y - \frac{54}{10}x\ .$$



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

První parciální derivace jsou rovny výrazům

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{54}{10}xy - \frac{54}{10}\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{27}{10}x^2 + \frac{42}{10}y^2 - \frac{69}{10}\,. \end{aligned}$$

Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých vyjádříme x a y (stacionární body)

$$\frac{54}{10}xy - \frac{54}{10} = 0$$
$$\frac{27}{10}x^2 + \frac{42}{10}y^2 - \frac{69}{10} = 0\,,$$

$$54xy - 54 = 0$$
$$xy - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{y}\,,$$

$$27x^2 + 42y^2 - 69 = 0$$
$$27\frac{1}{y^2} + 42y^2 - 69 = 0$$
$$42y^4 - 69y^2 + 27 = 0$$

Substituce: $a = y^2$

$$42a^2 - 69a + 27 = 0$$
$$a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1,\ y_2 = -1$$
$$a_2 = \frac{9}{14} \quad \Rightarrow \quad y_3 = \frac{3}{\sqrt{14}},\ y_4 = -\frac{3}{\sqrt{14}}\,.$$

Nalezené stacionární body jsou $(1,1)$, $(-1,-1)$, $\left(\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$.

Druhé parciální derivace jsou rovny

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{54}{10} y \,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{84}{10} y \,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \frac{54}{10} x \,.$$

Sestavíme determinant $J(x,y)$ podle

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} .$$

V našem případě $J(x,\ y)$ vypadá následovně

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{54}{10}y & \frac{54}{10}x \\ \frac{54}{10}x & \frac{84}{10}y \end{vmatrix} = \frac{4536y^2 - 2916x^2}{100} .$$

Pro body $(1,1)$ a $(-1,-1)$ platí

$$J(x,y) = \frac{1620}{100} > 0\,,$$

tzn. v těchto bodech se extrém nachází.

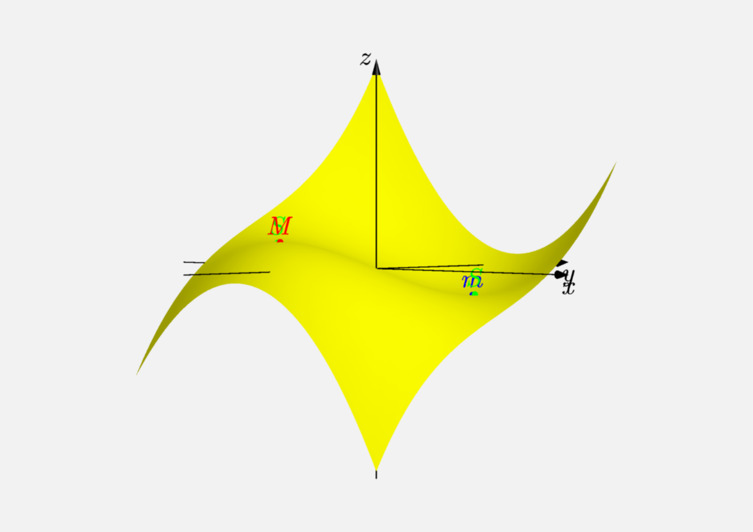
Po dosazení bodů $\left(\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ dostaneme

$$J(x,y) = -\frac{1620}{100} < 0\,,$$

tzn. v těchto bodech se extrém nenachází.

Pro bod $(1,1)$ platí
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \frac{54}{10} > 0\,,$$
a tudíž je v tomto bodě ostré lokální minimum.

Po dosazení bodu $(-1,-1)$ zjistíme, že
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -\frac{54}{10} < 0\,,$$
a tedy se v tomto bodě nachází ostré lokální maximum.



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ s extrémy