Globální extrémy

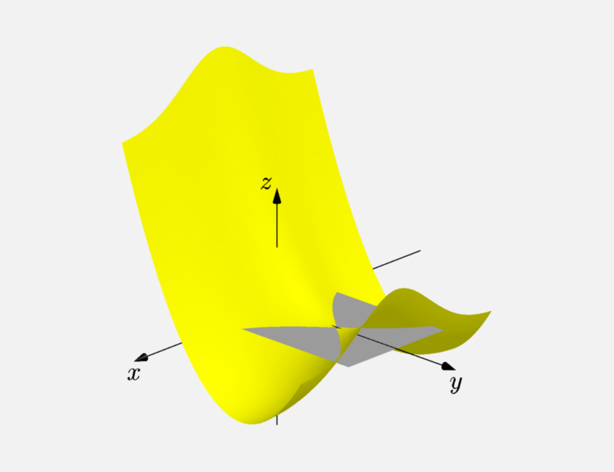
Příklad 3.

Zadání:

Najděte globální extrémy funkce

$$f(x,y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-x^2}$$

na množině $M = \langle -1, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

a) Hledáme podezřelé body, pro které platí

$$(x,y) \in (-1,1) \times (0,2)\ .$$

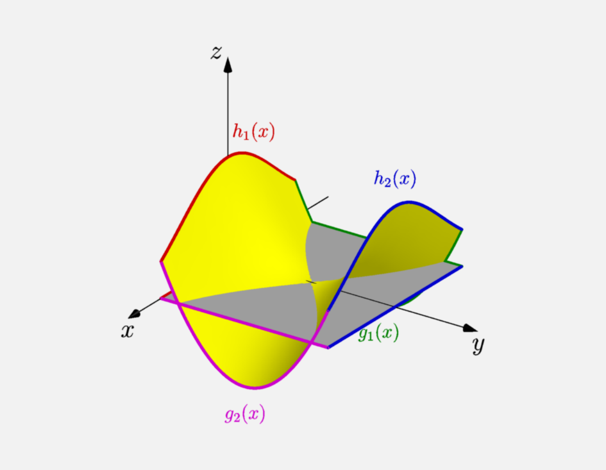
První parciální derivace funkce $f(x,y)$ odpovídají výrazům

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2$$

Soustava rovnic je ve tvaru

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0\ ,$$
$$2y - 2 = 0\ .$$

Dostaneme $c_1 = (0,1)$.



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ se zvýrazněnou hranicí

b)

i) $\partial M_1 = \langle -1, 1\rangle \times \{0\}$:

$$h_1(x) = f(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_1, tj. v množině $(-1,1) \times \{0\}$. První derivace $h_1(x)$ je rovna

$$h_1'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \ .$$

Položíme ji rovnou nule

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \ .$$

Dostaneme $c_2 = (0,0)$.

K podezřelým bodům přidáme i krajní body ∂M_1, tzn. body $c_3 = (-1,0)$ a $c_4 = (1,0)$.

ii) $\partial M_2 = \langle -1, 1\rangle \times \{2\}$:

$$h_2(x) = f(x, 2) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_2, tj. v množině $(-1, 1) \times \{2\}$. První derivace $h_2(x)$ je rovna

$$h_2'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \ .$$

Položíme ji rovnou nule

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \ .$$

Dostaneme $c_5 = (0, 2)$.

K podezřelým bodům přidáme i krajní body ∂M_2, tzn. body $c_6 = (-1, 2)$ a $c_7 = (1, 2)$.

iii) $\partial M_3 = \{-1\} \times \langle 0, 2\rangle$:

$$g_1(y) = f(-1, y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-1}$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_3, tj. v množině $\{-1\} \times (-1, 1)$. První derivace $g_1(y)$ je rovna

$$g_1'(y) = 2y - 2\ .$$

Položíme ji rovnou nule

$$2y - 2 = 0\ .$$

Dostaneme $c_8 = (-1, 1)$.

Krajní body ∂M_3 již jsou obsaženy v předchozích případech.

iv) $\partial M_4 = \{1\} \times \langle 0, 2 \rangle$:

$$g_2(y) = f(1, y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-1}$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_4, tj. v množině $\{1\} \times (-1, 1)$. První derivace $g_2(y)$ je rovna

$$g_2'(y) = 2y - 2 \; .$$

Položíme ji rovnou nule

$$2y - 2 = 0 \; .$$

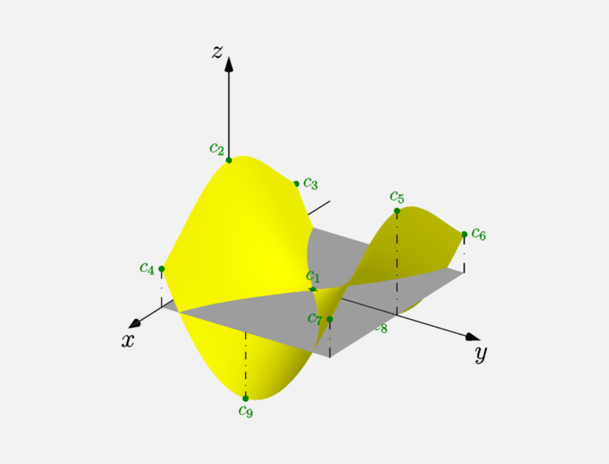
Dostaneme $c_9 = (1, 1)$.

Krajní body ∂M_4 již jsou obsaženy v předchozích případech.

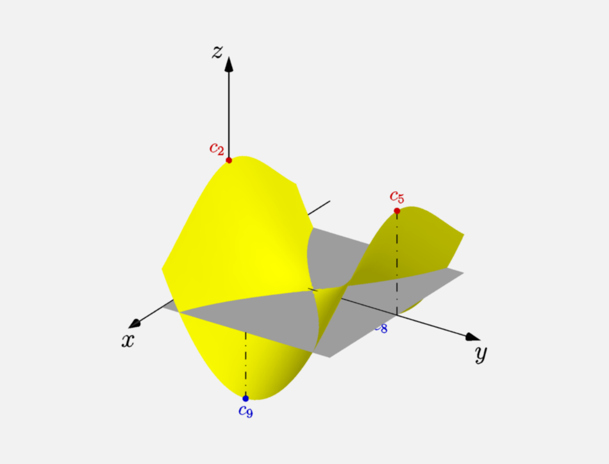
Příslušné funkční hodnoty v uvažovaných bodech jsou rovny

$$
\begin{aligned}
f(c_1) &= f(0,1) = 1^2 - 2\cdot 1 + \mathrm{e}^{-0^2} = 0\,,\\
f(c_2) &= f(0,0) = 0^2 - 2\cdot 0 + \mathrm{e}^{-0^2} = 1\,,\\
f(c_3) &= f(-1,0) = 0^2 - 2\cdot 0 + \mathrm{e}^{-(-1)^2} = \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_4) &= f(1,0) = 0^2 - 2\cdot 0 + \mathrm{e}^{-1^2} = \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_5) &= f(0,2) = 2^2 - 2\cdot 2 + \mathrm{e}^{-0^2} = 1\,,\\
f(c_6) &= f(-1,2) = -2^2 - 2\cdot 2 + \mathrm{e}^{-(-1)^2} = \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_7) &= f(1,2) = 2^2 - 2\cdot 2 + \mathrm{e}^{-1^2} = \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_8) &= f(-1,1) = 1^2 - 2\cdot 1 + \mathrm{e}^{-(-1)^2} = -1 + \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_9) &= f(1,1) = 1^2 - 2\cdot 1 + \mathrm{e}^{-1^2} = -1 + \mathrm{e}^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že v c_2 a c_5 je globální maximum a v c_8 a c_9 je globální minimum.



Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y)$ s podezřelými body



Obrázek 4: Graf funkce $f(x, y)$ s maximem a minimem