Globální extrémy

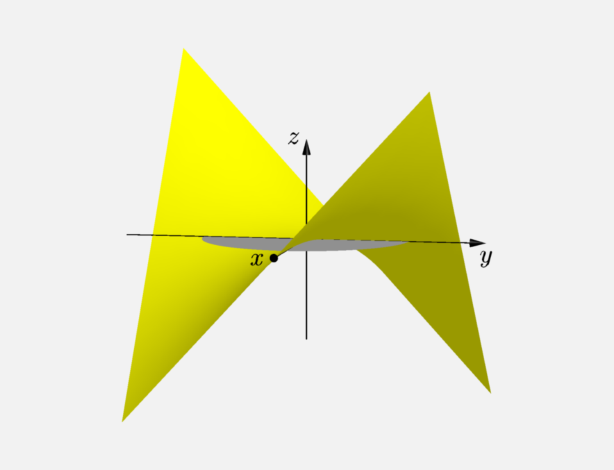
Příklad 2.

Zadání:

Najděte globální extrémy funkce

$$f(x, y) = 3xy$$

na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

a) Hledáme podezřelé body, pro které platí

$$(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 4\} \,.$$

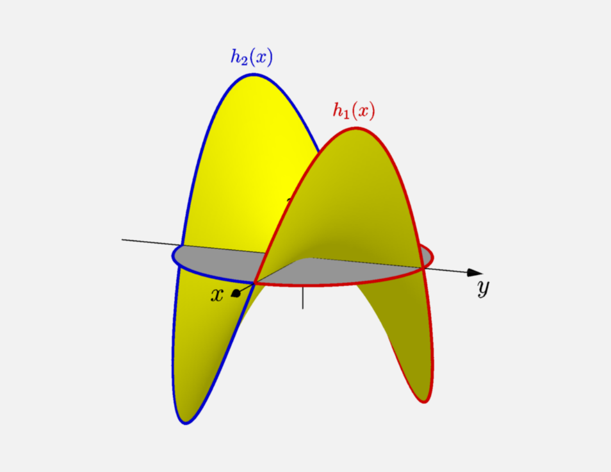
První parciální derivace funkce $f(x, y)$ odpovídají výrazům

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x \,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y$$

Soustava rovnic je ve tvaru

$$3x = 0 \,,$$
$$3y = 0 \,.$$

Dostaneme $c_1 = (0, 0)$.



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ se zvýrazněnou hranicí

b)

i) $\partial M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \langle -2, 2\rangle \wedge y = \sqrt{4-x^2}\}$:

$$h_1(x) = f(x, \sqrt{4-x^2}) = 3x\sqrt{4-x^2}$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_1, tj. v množině $(-1,1) \times \{0\}$. První derivace $h_1(x)$ je rovna

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= 3\sqrt{4-x^2} + 3x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}(-2x) = \\ &= 3\sqrt{4-x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{3(4-x^2) - 3x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{12-6x^2}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

Položíme ji rovnou nule

$$\begin{aligned}\frac{12-6x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= 0\\ 12-6x^2 &= 0\\ 6x^2 &= 12\\ x^2 &= 2\\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Dostaneme

$$y_{1,2} = \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-\left(\pm\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\,.$$

Nalezli jsme body $c_2 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ a $c_3 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

K podezřelým bodům přidáme i krajní body ∂M_1, tzn. body $c_4 = (-2, 0)$ a $c_5(2, 0)$.

ii) $\partial M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \langle -2, 2\rangle \wedge y = -\sqrt{4-x^2}\}$:

$$h_2(x) = f(x, -\sqrt{4-x^2}) = -3x\sqrt{4-x^2}$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_2, tj. v množině $(-1,1) \times \{2\}$. První derivace $h_2(x)$ je rovna

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= -3\sqrt{4-x^2} - 3x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}(-2x) = \\ &= -3\sqrt{4-x^2} + \frac{3x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{-3(4-x^2)+3x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{-12+6x^2}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

Položíme ji rovnou nule

$$\begin{aligned}
\frac{-12+6x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= 0 \\
-12+6x^2 &= 0 \\
6x^2 &= 12 \\
x^2 &= 2 \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

Dostaneme

$$y_{1,2} = -\sqrt{4-x^2} = -\sqrt{4-\left(\pm\sqrt{2}\right)^2} = -\sqrt{2}\,.$$

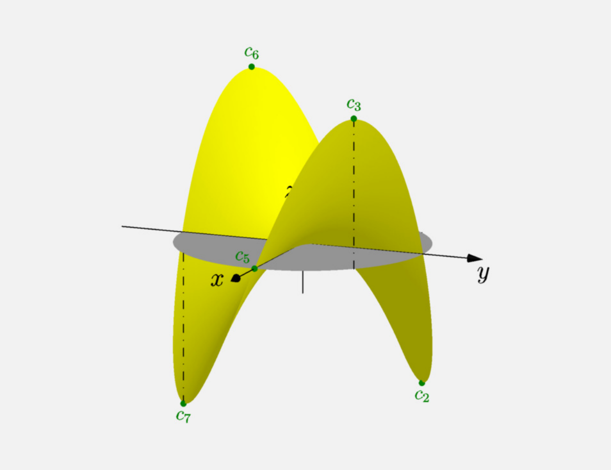
Nalezli jsme body $c_6 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ a $c_7 = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Krajní body ∂M_2 jsou již obsaženy v předchozím případě.

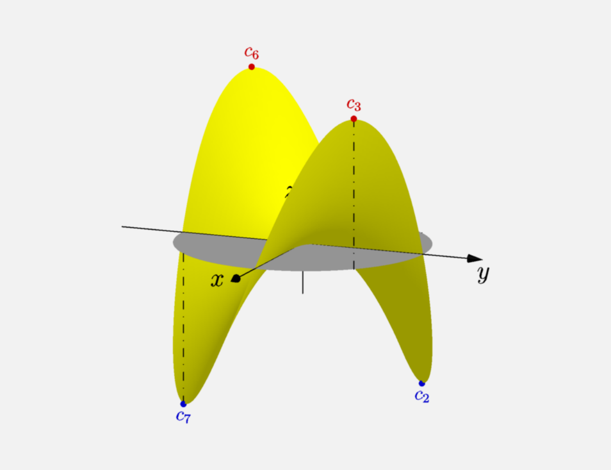
Příslušné funkční hodnoty v uvažovaných bodech jsou rovny

$$
\begin{aligned}
f(c_1) &= f(0,0) = 0\,, \\
f(c_2) &= f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = -6\,, \\
f(c_3) &= f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 6\,, \\
f(c_4) &= f(-2,0) = 0\,, \\
f(c_5) &= f(2,0) = 0\,, \\
f(c_6) &= f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 6\,, \\
f(c_7) &= f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -6\,.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že globální maximum nastává v bodech c_3 a c_6 a globální minimum nastává v c_2 a c_7.



Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y)$ s podezřelými body



Obrázek 4: Graf funkce $f(x, y)$ s maximem a minimem

Poznámka na závěr:

Pozornější čtenář si všiml, že krajní body, které vznikly při rozdělení hranice, jsme nemuseli vůbec uvažovat jako podezřelé. Kdybychom totiž použili opačnou parametrizaci ∂M, tj.

$$\partial M\colon x^2 + y^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad y \in \langle -2, 2\rangle \wedge x = \pm\sqrt{4 - x^2}\ ,$$

dostali bychom jiné krajní body a to $(0, -2)$, $(0, 2)$. Z toho vyplývá, že v daných krajních bodech nemůže být extrém.