

Globální extrémy

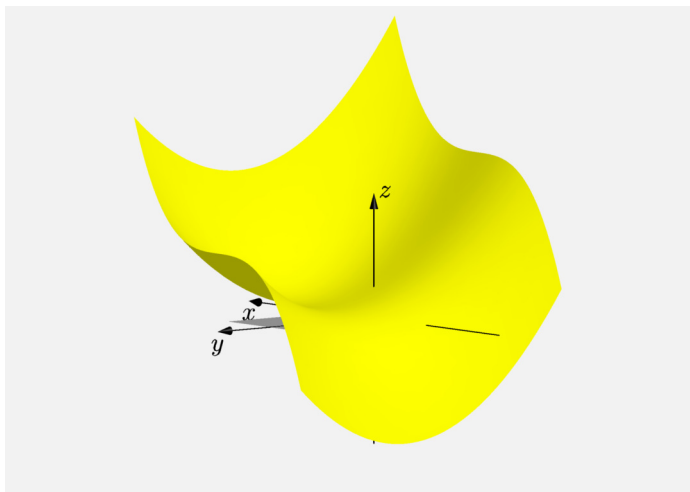
Příklad 1.

Zadání:

Najděte globální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 2y + 2$$

na množině $M = \langle -1, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

a) Hledáme podezřelé body, pro které platí

$$(x, y) \in (-1, 1) \times (0, 2) .$$

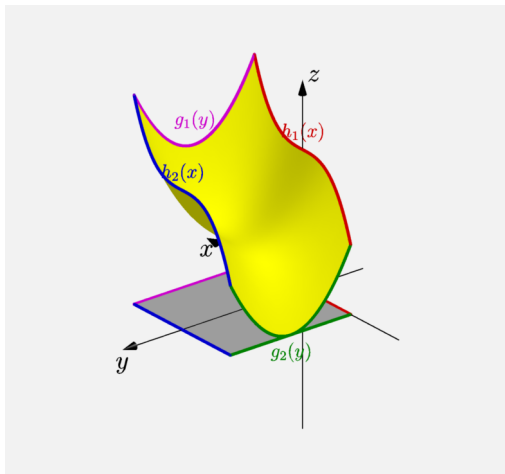
První parciální derivace funkce $f(x, y)$ odpovídají výrazům

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 , \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y - 2 .\end{aligned}$$

Soustava rovnic je ve tvaru

$$\begin{aligned}3x^2 &= 0 , \\ 2y - 2 &= 0 .\end{aligned}$$

Dostaneme $c_1 = (0, 1)$.



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ se zvýrazněnou hranicí

b)

i) $\partial M_1 = \langle -1, 1 \rangle \times \{0\}$:

$$h_1(x) = f(x, 0) = x^3 + 2$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_1 , tj. v množině $(-1, 1) \times \{0\}$.
První derivace $h_1(x)$ je rovna

$$h_1'(x) = 3x^2 .$$

Položíme ji rovnou nule

$$3x^2 = 0 .$$

Dostaneme $c_2 = (0, 0)$.

K podezřelým bodům přidáme i krajní body ∂M_1 , tzn. body $c_3 = (-1, 0)$ a $c_4 = (1, 0)$.

ii) $\partial M_2 = \langle -1, 1 \rangle \times \{2\}$:

$$h_2(x) = f(x, 2) = x^3 + 2$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_2 , tj. v množině $(-1, 1) \times \{2\}$. První derivace $h_2(x)$ je rovna

$$h_2'(x) = 3x^2 .$$

Položíme ji rovnou nule

$$3x^2 = 0 .$$

Dostaneme $c_5 = (0, 2)$.

K podezřelým bodům přidáme i krajní body ∂M_2 , tzn. body $c_6 = (-1, 2)$ a $c_7 = (1, 2)$.

iii) $\partial M_3 = \{-1\} \times \langle 0, 2 \rangle$:

$$g_1(y) = f(-1, y) = y^2 - 2y + 1$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_3 , tj. v množině $\{-1\} \times (-1, 1)$.
První derivace $g_1(y)$ je rovna

$$g_1'(y) = 2y - 2.$$

Položíme ji rovnou nule

$$2y - 2 = 0.$$

Dostaneme $c_8 = (-1, 1)$.

Krajní body ∂M_3 již jsou obsaženy v předchozích případech.

iv) $\partial M_4 = \{1\} \times \langle 0, 2 \rangle$:

$$g_2(y) = f(1, y) = y^2 - 2y + 3$$

Hledáme stacionární body uvnitř ∂M_4 , tj. v množině $\{1\} \times (-1, 1)$.
První derivace $g_2(y)$ je rovna

$$g_2'(y) = 2y - 2.$$

Položíme ji rovnou nule

$$2y - 2 = 0.$$

Dostaneme $c_9 = (1, 1)$.

Krajní body ∂M_4 již jsou obsaženy v předchozích případech.

Příslušné funkční hodnoty v uvažovaných bodech jsou rovny

$$f(c_1) = f(0, 1) = 0^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1 ,$$

$$f(c_2) = f(0, 0) = 0^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 ,$$

$$f(c_3) = f(-1, 0) = -1^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 1 ,$$

$$f(c_4) = f(1, 0) = 1^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 3 ,$$

$$f(c_5) = f(0, 2) = 0^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2 ,$$

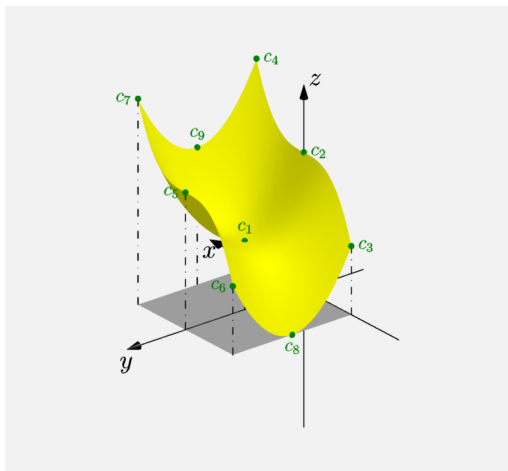
$$f(c_6) = f(-1, 2) = -1^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 1 ,$$

$$f(c_7) = f(1, 2) = 1^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 3 ,$$

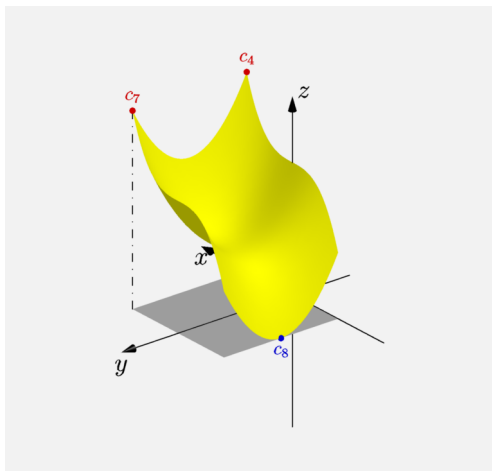
$$f(c_8) = f(-1, 1) = -1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 0 ,$$

$$f(c_9) = f(1, 1) = 1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 2 .$$

Vidíme, že v c_4 a c_7 je globální maximum a v c_8 je globální minimum.



Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y)$ s podezřelými body



Obrázek 4: Graf funkce $f(x, y)$ s maximem a minimem