Diferenciál

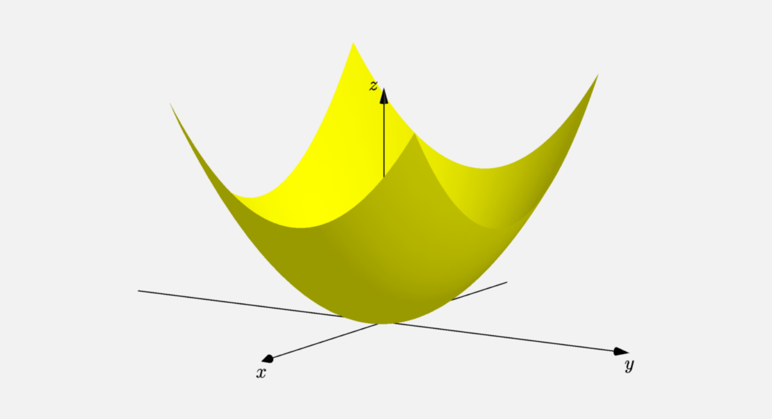
Příklad 2. (Výpočet přibližné hodnoty)

Zadání:

a) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$.

b) Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\,(2{,}5)^2 + (-0{,}25)^2 \ .$$



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

a) Předpis tečné roviny τ je

$$\tau\colon\ z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

neboli

$$\tau\colon\ z - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}\,(x - x_0, y - y_0)\ .$$

První parciální derivace funkce $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) = x\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y) = 2y\ .$$

Dosazení bodu $(1,0)$ do předpisu pro první parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Výpočet funkční hodnoty $f(x,y)$ v bodě $(1,0)$

$$f(x_0,y_0) = f(1,0) = \frac{1}{2}1^2 + 0^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Dosazení do předpisu roviny τ

$$\tau\colon\, z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

$$\tau\colon\, z - \frac{1}{2} = 1\cdot(x-1) + 0\cdot(y-0)\,,$$

kde $1\cdot(x-1) + 0\cdot(y-0) = \mathrm{d}f_{(1,0)}\,(x-1, y-0)$.

Výsledná rovnice roviny τ má tvar

$$\tau\colon\, z - \frac{1}{2} = x - 1$$

$$\tau\colon\, -x + z + \frac{1}{2} = 0\,.$$

b) Vzhledem k zadání uvažujeme

- funkci $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$, viz obr. 1 ,
- bod $(x_0, y_0) = (1, 0)$,
- diference $\mathrm{d}x = 1{,}5$ a $\mathrm{d}y = -0{,}25$.

Pro výpočet diferenciálu použijeme vypočtené parciální derivace z části **a)**.

Diferenciál $\mathrm{d}f_{(1,0)}\,(1{,}5; -0{,}25)$ je roven

$$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}\,(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}f_{(1,0)}\,(1{,}5; -0{,}25) = 1 \cdot 1{,}5 + 0 \cdot (-0{,}25)$$

$$\mathrm{d}f_{(1,0)}\,(1{,}5; -0{,}25) = 1{,}5\,.$$

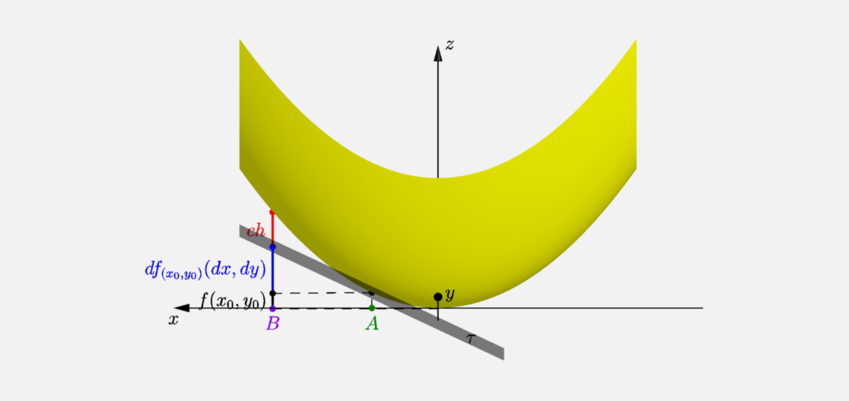
Přibližná hodnota $f(x, y) = \frac{1}{2}\,(2{,}5)^2 + (-0{,}25)^2$ je rovna

$$\frac{1}{2}\,(2{,}5)^2 + (-0{,}25)^2 \doteq f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}\,(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

$$\frac{1}{2}\,(2{,}5)^2 + (-0{,}25)^2 \doteq 0{,}5 + 1{,}5 = 2\,.$$

Při aproximaci funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ tečnou rovinou τ jsme se dopoustili jisté chyby.

$$
\begin{aligned}
chyba &= f(x, y) - \left(f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}\,(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\right) \\
chyba &= f(2{,}5; -0{,}25) - \left[f(1, 0) + \mathrm{d}f_{(1,0)}\,(1{,}5; -0{,}25)\right] \\
chyba &= 1{,}1875\ .
\end{aligned}
$$



Obrázek 2: Diferenciál