Diferenciál

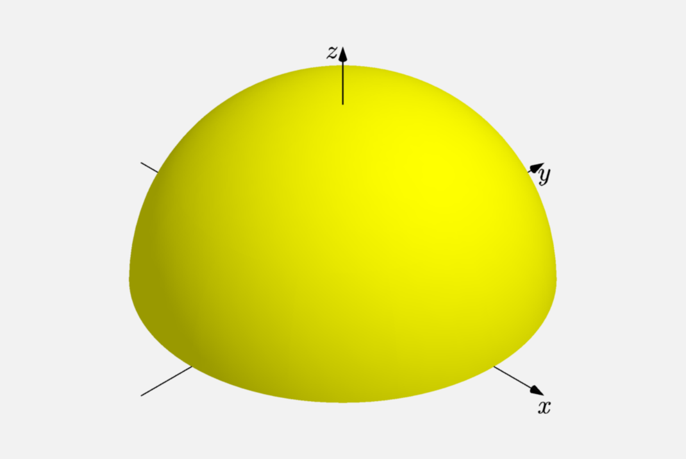
Příklad 1. (Tečná rovina)

Zadání:

Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

v bodě $T = (1, -2, ?)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Předpis tečné roviny τ je

$$\tau\colon\; z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

neboli

$$\tau\colon\; z - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0)\ .$$

První parciální derivace funkce $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\ .$$

Dosazení bodu $(1,-2)$ do předpisu pro první parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = -\frac{1}{2}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = 1\,.$$

Výpočet funkční hodnoty $f(x,y)$ v bodě $(1,-2)$

$$f(x_0,y_0) = f(1,-2) = \sqrt{9-1-4} = 2\,.$$

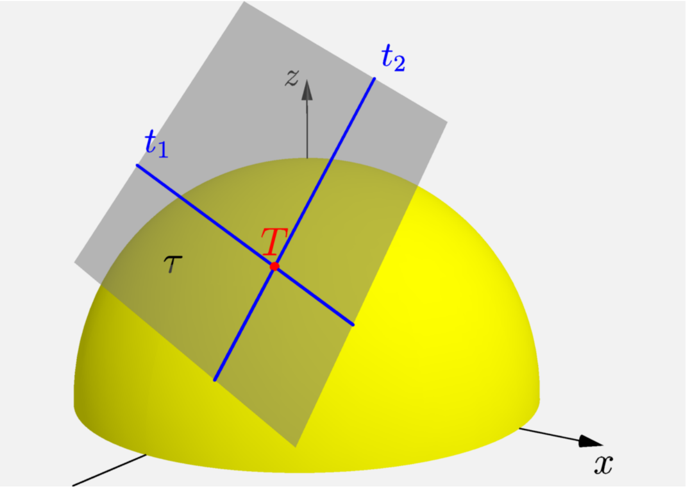
Dosazení do předpisu roviny τ

$$\tau\colon\, z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$
$$\tau\colon\, z - 2 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y + 2)\ ,$$

kde $-\frac{1}{2} \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y + 2) = \mathrm{d}f_{(1,-2)}\,(x - 1, y + 2)$.

Výsledná rovnice roviny τ má tvar

$$\tau\colon\, z - 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + y + 2$$
$$\tau\colon\, x - 2y + 2z - 9 = 0\,.$$



Obrázek 2: Tečná rovina ke grafu $f(x, y)$ v bodě T

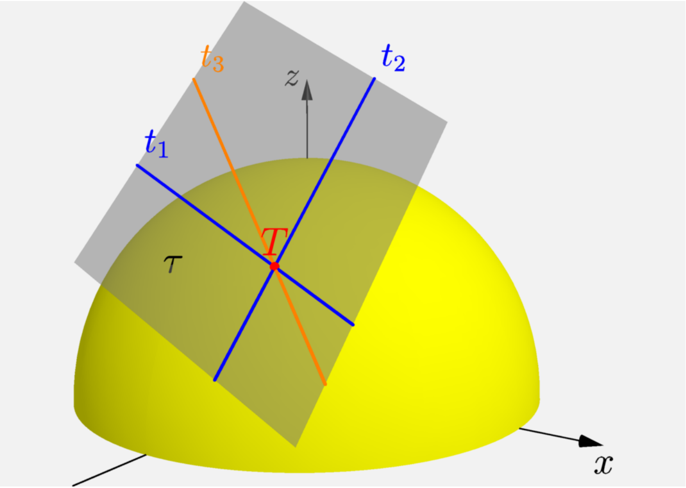
Geometrický význam směrové derivace ve vztahu k tečné rovině:

Směrovou derivaci spočtěme například ve směru vektoru

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) .$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0, y_0) &= \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0), \mathbf{u} \rangle = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot u_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} . \end{aligned}$$

Číslo $\frac{2}{\sqrt{5}}$ nám udává směrnici „třetí“ tečny.



Obrázek 3: Tečná rovina a tři tečny ke grafu funkce $f(x, y)$