Definiční obor funkce dvou proměnných

Příklad 3.

Zadání:

Určete a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)\,(1 - y^2)}\,.$$

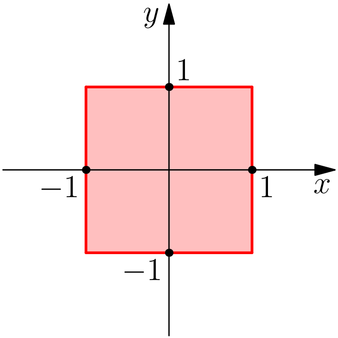
Řešení:

První situace (výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven 0):

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &\geq 0 & \wedge && 1 - y^2 &\geq 0 \\ (1-x)(1+x) &\geq 0 & \wedge && (1-y)(1+y) &\geq 0 \\ x &\in \langle -1, 1\rangle & \wedge && y &\in \langle -1, 1\rangle\ . \end{aligned}$$

$D_1(f)$ je roven

$$D_1(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \langle -1, 1\rangle \wedge y \in \langle -1, 1\rangle \right\}\ .$$



Obrázek 1: Definiční obor $D_1(f)$

Druhý případ (výraz pod odmocninou musí být menší nebo roven 0):

$$\begin{array}{rcr} 1-x^2 \leq 0 & \wedge & 1-y^2 \leq 0 \\ (1-x)(1+x) \leq 0 & \wedge & (1-y)(1+y) \leq 0\,, \end{array}$$

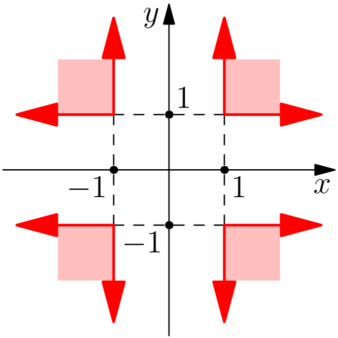
a tedy

$$x \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty) \wedge y \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty)\,.$$

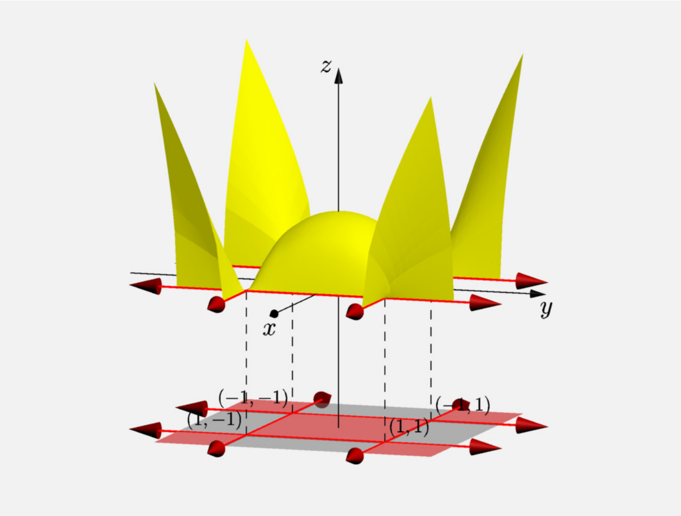
$D_2(f)$ je roven

$$\begin{aligned} D_2(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\, & x \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty) \wedge \\ & y \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty)\big\}\,. \end{aligned}$$

Výsledný $D(f)$ odpovídá množině $D(f) = D_1(f) \cup D_2(f)$.



Obrázek 2: Definiční obor $D_2(f)$



Obrázek 3: Definiční obor + funkce $f(x, y)$