Definiční obor funkce dvou proměnných

Příklad 1.

Zadání:

Určete a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arcsin(2x) + \sqrt{1 - y^2}\ .$$

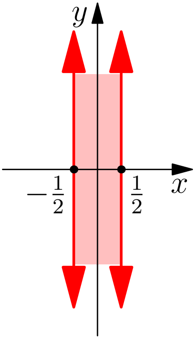
Řešení:

Z funkce $\arcsin$ dostaneme

$$\begin{aligned} 2x \in \langle -1, 1\rangle \quad \Rightarrow \quad 2x &\geq -1 \quad \wedge \quad 2x \leq 1 \\ x &\geq -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definiční obor prvního členu součtu, značen $D_1(f)$, je roven

$$D_1(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \wedge y \in \mathbb{R} \right\} .$$



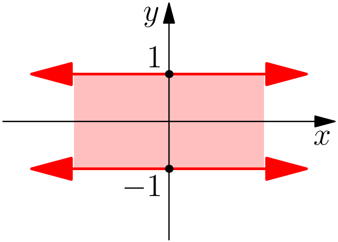
Obrázek 1: Definiční obor $D_1(f)$

Ze druhého členu součtu vyplývá

$$\begin{aligned} 1 - y^2 &\geq 0 \\ 1 &\geq y^2 \\ 1 &\geq |y| \quad \Rightarrow \quad y \in \langle -1, 1 \rangle \, , \end{aligned}$$

a tedy $D_2(f)$ je roven

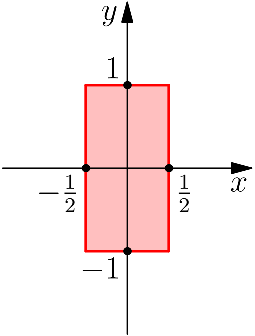
$$D_2(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R} \wedge y \in \langle -1, 1 \rangle \right\} \, .$$



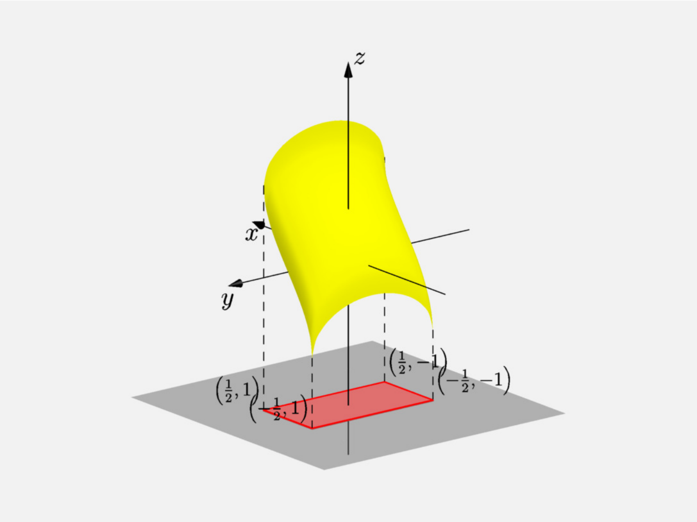
Obrázek 2: Definiční obor $D_2(f)$

Výsledný definiční obor funkce $D(f)$ je tvořen

$$D(f) = D_1(f) \cap D_2(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \wedge y \in \langle -1, 1 \rangle \right\} .$$



Obrázek 3: Definiční obor $D(f)$



Obrázek 4: Definiční obor + funkce $f(x,\ y)$