

## Vrstevnice

### Příklad 3.

#### Zadání:

Určete rovnice vrstevnic funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{(x-1)^2 + y^2}$$

a znázorněte ty z nich, které vzniknou průnikem rovin  $f(x, y) = c$ ,  $c = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5$ .

#### Řešení:

V první řadě určíme čemu je roven definiční obor funkce  $f(x, y)$ , tzn. určíme takové  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , pro něž má předpis  $\frac{1}{(x-1)^2 + y^2}$  smysl. Jelikož je zadaný výraz tvořen zlomkem, musíme zajistit, aby se jmenovatel nerovnal nule

$$(x-1)^2 + y^2 \neq 0.$$

Všimneme si, že levá strana nerovnice nám připomíná rovnici kružnice s posunutým středem do  $(1, 0)$ . V důsledku toho nesmí být  $(1, 0)$  součástí definičního oboru, protože v  $(1, 0)$  nabývá výraz  $(x-1)^2 + y^2$  hodnoty nula. Výsledný definiční obor je ve tvaru

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1 \wedge y \neq 0\}.$$

Nyní přejdeme k určování rovnic jednotlivých vrstevnic. Rovnice vrstevnic jsou ve tvaru

$$v_f(c): \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} = c.$$

Pro  $c < 0$  je  $v_f = \emptyset$ , protože  $\frac{1}{(x-1)^2 + y^2} \geq 0$  pro  $\forall (x, y) \in D(f)$ .

Pro  $c = 0$  je  $v_f = \emptyset$ , protože

$$\frac{1}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \\ 1 \neq 0.$$

Uvědomme si ale, že čím větší bude jmenovatel, tím menší bude hodnota výrazu  $\frac{1}{(x-1)^2 + y^2}$ . Graf funkce  $f(x, y)$  se tak bude blížit ke kótě  $c = 0$ , ale dosáhne ji až v nekonečnu.

Pro  $c > 0$  je  $\frac{1}{(x-1)^2+y^2} = c$ :

$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 4,$$

$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 3,$$

$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 2,$$

$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 1,$$

$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2} = 2 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = \frac{1}{2},$$

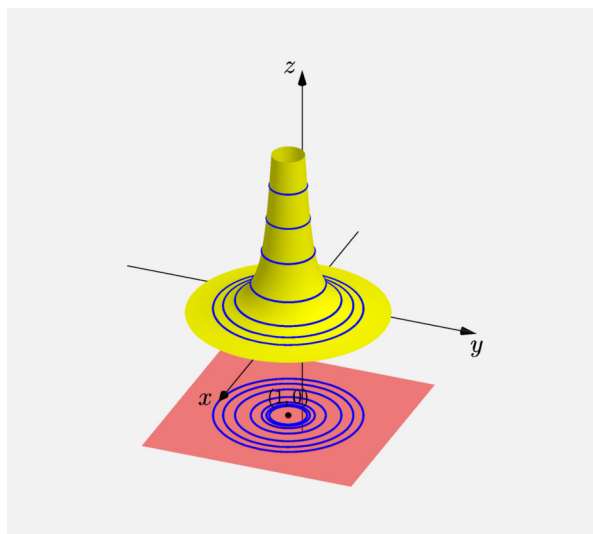
$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2} = 3 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2} = 4 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = \frac{1}{4}.$$

Pro  $c > 0$  jsou rovnice vrstevnic ve tvaru

$$(x-1)^2+y^2 = \frac{1}{c}.$$

Jedná se o kružnice s posunutým středem do  $(1, 0)$  o poloměru  $\sqrt{\frac{1}{c}}$ . Výsledné vrstevnice jsou zobrazeny na obr. 1 modrou barvou. Žlutou barvou je znázorněn graf funkce  $f(x, y)$ . Červenou barvou je znázorněn definiční obor, který jsme určili výše. Bod v rovině  $xy$ , který není součástí definičního oboru je znázorněn černou barvou.



Obrázek 1: Vrstevnice funkce  $f(x, y)$