Vrstevnice

Příklad 2.

Zadání:

Určete rovnice vrstevnic funkce $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$ a znázorněte ty z nich, které vzniknou průnikem rovin $f(x,y) = c$, $c = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Řešení:

Dříve než se pustíme do určování rovnic vrstevnic, je zapotřebí se zamyslet nad tím, jaký je definiční obor zadané funkce a jaký je její obor hodnot. Z předpisu funkce je patrné, že za proměnné x a y můžeme dosadit jakékoliv reálné číslo, proto pro její definiční obor platí $D_f = \mathbb{R}^2$. Definičním oborem nejsme nijak omezeni. Obor hodnot také nebude problém určit. Absolutní hodnota z x a y bude vždy kladné číslo. Nejmenší možnou dvojici čísel, kterou můžeme do zadaného předpisu $f(x,y)$ dosadit, je $(0,0)$. Při dosazení $(0,0)$ do $f(x,y)$ obdržíme hodnotu 1. Při dosazování libovolných jiných reálných dvojic do $f(x,y)$ dostaneme hodnoty, které jsou menší než 1. V důsledku toho platí pro oboro hodnot $H_f = (-\infty, 1\rangle$. Je tedy zřejmé, že uvažovat kóty $c = 2, 3, 4$ uvedené v zadání nemá smysl. Vyšší hodnoty než 1 nejsme u zadané funkce $f(x,y)$ schopni získat. Nyní přejděme k určování rovnic vrstevnic.

Rovnice vrstevnic jsou ve tvaru

$$v_f(c)\colon 1 - |x| - |y| = c.$$

Už víme, že kóty $c > 1$ nemá smysl uvažovat, tzn. pro $c > 1$ je $v_f = \emptyset$, protože $1 - |x| - |y| \leq 1$.

Pro $c = 1$ je $v_f = 1$ pro $x = 0 \wedge y = 0$, protože

$$\begin{aligned} 1 - |x| - |y| &= 1 \\ |x| + |y| &= 0 \\ |y| &= -|x| \end{aligned}$$

a to nastane pouze v případě $x = 0 \wedge y = 0$. Vrstevnice pro $c = 1$ je tvořena pouze jedním bodem v souřadnicích $(0,0)$.

Pro $c = 0$ je

$$\begin{aligned} 1 - |x| - |y| &= 0 \\ |y| &= 1 - |x|. \end{aligned}$$

Z poslední rovnosti vyplývají tyto případy

1. V prvním případě uvažujme $y \geq 0$, pak

   (a) pro $x \geq 0$ je $y = 1 - x$,

   (b) pro $x < 0$ je $y = 1 + x$.

2. Ve druhém případě, tj. $y < 0$, dostaneme

   (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = x - 1$

   (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = -x - 1$.

Obdrželi jsme čtyři úsečky, přičemž se každá z nich nachází v jiném kvadrantu. Kvadranty jsou určeny uvažovanými omezeními pro x a y, např. v prvním případě se jedná o první kvadrant, protože $y \geq 0$ a $x \geq 0$. Spojením jednotlivých úseček získáme další vrstevnici. V tomto případě se už nejedná o pouhý bod.

Pro kóty $c = -1, -2, -3, -4$ dopadne situace obdobným způsobem.
$c = -1$:

$$\begin{aligned} 1 - |x| - |y| &= -1 \\ |y| &= 2 - |x|. \end{aligned}$$

1. Pro $y \geq 0$ dostaneme

   (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = 2 - x$,

   (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = 2 + x$.

2. Pro $y < 0$, dostaneme

   (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = x - 2$

   (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = -x - 2$.

$c = -2$:

$$\begin{aligned} 1 - |x| - |y| &= -2 \\ |y| &= 3 - |x|. \end{aligned}$$

1. Pro $y \geq 0$ dostaneme

   (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = 3 - x$,

   (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = 3 + x$.

2. Pro $y < 0$, dostaneme

   (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = x - 3$

   (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = -x - 3$.

$c = -3$:

$$\begin{aligned} 1 - |x| - |y| &= -3 \\ |y| &= 4 - |x|. \end{aligned}$$

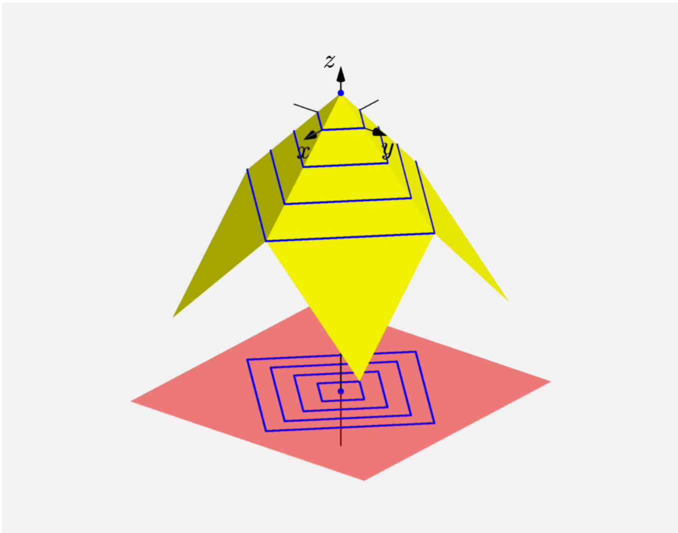
1. Pro $y \geq 0$ dostaneme
   (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = 4 - x$,
   (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = 4 + x$.
2. Pro $y < 0$, dostaneme
   (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = x - 4$
   (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = -x - 4$.

$c = -4$:

$$\begin{aligned} 1 - |x| - |y| &= -4 \\ |y| &= 5 - |x|. \end{aligned}$$

1. Pro $y \geq 0$ dostaneme
   (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = 5 - x$,
   (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = 5 + x$.
2. Pro $y < 0$, dostaneme
   (a) pro $x \geq 0$ rovnici $y = x - 5$
   (b) a pro $x < 0$ rovnici $y = -x - 5$.

Výsledné vrstevnice spolu s grafem funkce $f(x, y)$ jsou vykreslené na obr. 1. Modrou barvou jsou znázorněné jednotlivé vrstevnice. Žlutou barvou je znázorněn graf funkce $f(x, y)$. Rovina xy je obarvena červenou barvou a představuje definiční obor funkce $f(x, y)$.



Obrázek 1: Vrstevnice funkce $f(x, y)$