

Vrstevnice

Příklad 1.

Zadání:

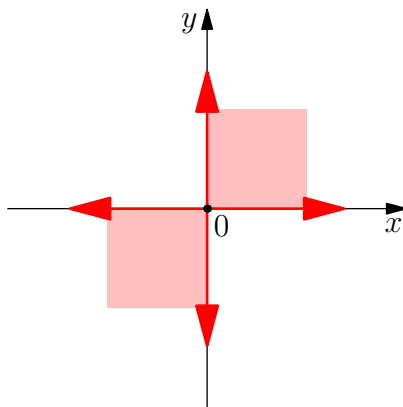
Určete rovnice vrstevnic funkce $f(x, y) = \sqrt{xy}$ a znázorněte ty z nich, které vzniknou průnikem rovin $f(x, y) = c$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Řešení:

Určíme definiční obor funkce $f(x, y)$, resp. určíme takové $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má předpis \sqrt{xy} smysl.

Vzhledem k výrazu pod odmocninou, pro který musí platit $xy \geq 0$, dostáváme výsledný $D(f)$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\} .$$



Obrázek 1: Definiční obor $D(f)$

Rovnice vrstevnic jsou ve tvaru

$$v_f(c): \sqrt{xy} = c.$$

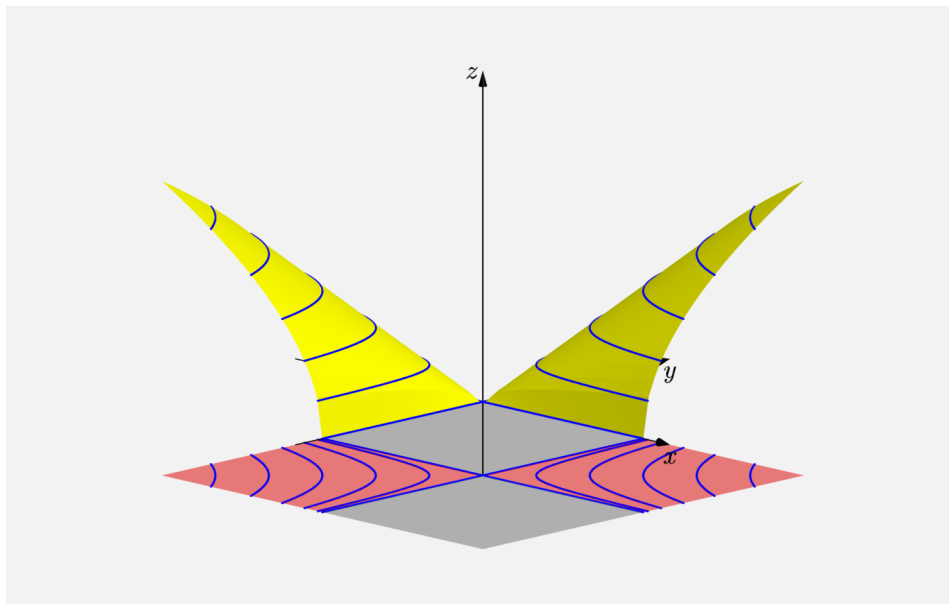
Pro $c < 0$ je $v_f = \emptyset$, protože $\sqrt{xy} \geq 0$ pro $\forall (x, y) \in D(f)$.

Pro $c = 0$ je $v_f = 0$ pro $x = 0 \vee y = 0$, tzn. pro $c = 0$ je vrstevnice totožná s osou x a osou y .

Pro $c > 0$ je $c = \sqrt{xy}$:

$$\begin{aligned} 1 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{1}{x}, & 4 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{16}{x}, \\ 2 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{4}{x}, & 5 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{25}{x}, \\ 3 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{9}{x}. \end{aligned}$$

Výsledné vrstevnice pro $c > 0$ představují hyperboly. Na obr. 2 jsou modrou barvou znázorněné výsledné vrstevnice. Žlutou barvou je znázorněn graf funkce $f(x, y)$. Rovina xy je obarvena šedou barvou. Červenou barvou je znázorněn definiční obor, který jsme určili výše.



Obrázek 2: Vrstevnice funkce $f(x, y)$