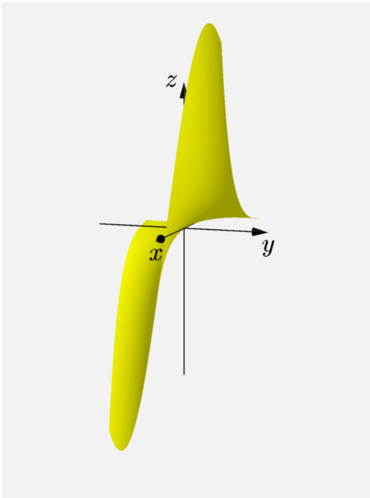
Taylorův mnohočlen

Příklad 3.

Zadání:

Najděte Taylorův mnohočlen prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ (obr. 1) se středem v bodě $S = (0,0)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y)$

Řešení:

Připomeňme si, že pro Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu platí

$$T_4(x,y) = f(0,0) + \mathrm{d}f_{(0,0)}(x-0, y-0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{(0,0)}(x-0,y-0) + \\ + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f_{(0,0)}(x-0,y-0) + \frac{1}{24}\mathrm{d}^4 f_{(0,0)}(x-0,y-0)\ .$$

Začněme s Taylorovým mnohočlenem prvního řádu, ke kterému potřebujeme spočítat první parciální derivace

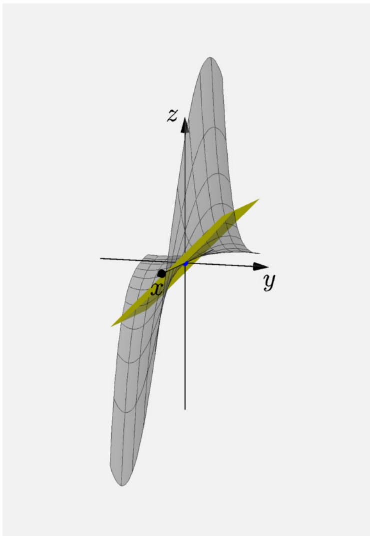
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y\ .$$

Taylorův mnohočlen prvního řádu pak odpovídá výrazu

$$T_1\left(x,y\right) = f\left(0,0\right) + \mathrm{d}f_{(0,0)}\left(x-0,y-0\right)$$

$$T_1\left(x,y\right) = 1\cdot\left(y-0\right) = y\;.$$

Na obr. 2 je šedou barvou znázorněný graf funkce $f(x,y)$. Žlutou barvou je znázorněn graf Taylorova mnohočlenu prvního řádu tvořící tečnou rovinu, která v okolí středu $S=(0,0)$ nahrazuje funkci $f(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$. Zadaný střed S je vykreslen modrou barvou.



Obrázek 2: Taylorův mnohočlen 1. řádu

Na obr. 2 jsme viděli, že Taylorův mnohočlen prvního řádu tvoří tečnou rovinu, která se dotýká grafu funkce $f(x,y)$ v zadaném středu S. Tato aproximace v okolí středu S na nás nepůsobí moc dobrým dojmem. Pokusme se aproximaci zpřesnit a to pomocí Taylorova mnohočlenu druhého řádu.
K tomu budeme potřebovat druhé parciální derivace

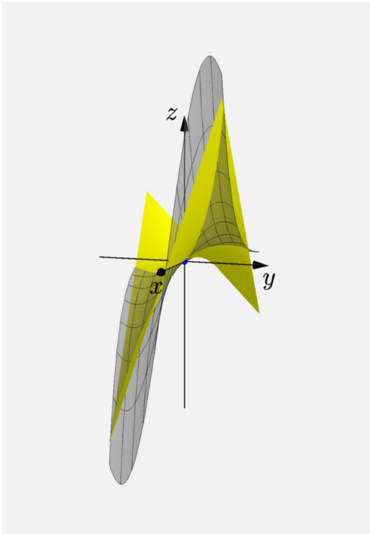
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right) = \mathrm{e}^x\sin y\;,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}\left(x,y\right) = \mathrm{e}^x\cos y\;,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x,y\right) = -\mathrm{e}^x\sin y$$

a pomocí nich sestavíme Taylorův mnohočlen druhého řádu

$$T_2(x,y) = f(0,0) + \mathrm{d}f_{(0,0)}(x-0, y-0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{(0,0)}(x-0, y-0)$$

$$T_2(x,y) = y + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot (x-0)(y-0) = y + xy\,.$$

Na obr. 3 už vidíme přesnější kopírování tvaru funkce $f(x,y)$ (šedá barva) Taylorovým mnohočlenem druhého řádu (žlutá barva) v okolí středu S (modrá barva).



Obrázek 3: Taylorův mnohočlen 2. řádu

Aproximace pomocí Taylorova mnohočlenu druhého řádu v okolí středu S už na nás působí věrohodnějším dojmem. To nám ale ještě nestačí. Proveďme více přesnější nahrazení funkce $f(x,y)$ v okolí středu S Taylorovým mnohočlenem třetího řádu.
Vypočtěme tedy třetí parciální derivace

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y\,, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y\,,$$

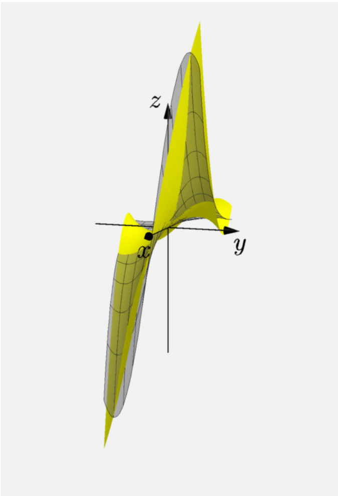
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x y^2}(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin y\,, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -\mathrm{e}^x \cos y$$

a sestavme odpovídající Taylorův mnohočlen

$$T_3(x,y) = f(0,0) + \mathrm{d}f_{(0,0)}(x-0,y-0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{(0,0)}(x-0,y-0) + \\ + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f_{(0,0)}(x-0,y-0)$$

$$T_3(x,y) = y + xy + \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 1\cdot (x-0)^3(y-0) + (-1)\cdot(y-0)^3 = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3\,.$$

Na obr. 4 máme opět žlutou barvou znázorněný graf Taylorova mnohočlenu (tentokráte třetího řádu). Níže uvedená grafika nám vizuálně dokazuje mnohem lepší aproximaci funkce $f(x,y)$ Taylorovým mnohočlenem třetího řádu v okolí středu S mnohem než tomu bylo v předchozích případech.



Obrázek 4: Taylorův mnohočlen 3. řádu

Nyní zbývá splnit už jen poslední bod zadání, tj. nalézt Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu.

Spočítejme odpovídající čtvrté parciální derivace

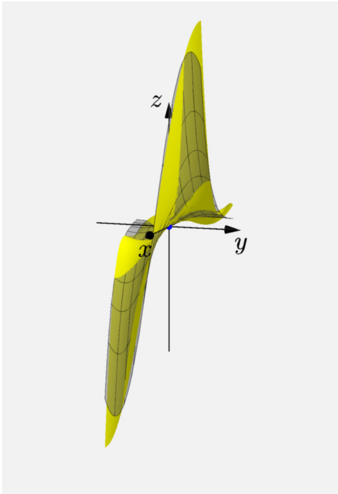
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\,(x, y) &= \mathrm{e}^x \sin y\,, \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 y}\,(x, y) &= \mathrm{e}^x \cos y\,, \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 y^2}\,(x, y) &= -\mathrm{e}^x \sin y\,, \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x y^3}\,(x, y) &= -\mathrm{e}^x \cos y\,, \\
\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\,(x,\ y) &= \mathrm{e}^x \sin y
\end{aligned}$$

a vyjádřeme si Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu

$$\begin{aligned}
T_4\,(x, y) = f\,(0, 0) + \mathrm{d}f_{(0,0)}\,(x - 0, y - 0) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{(0,0)}\,(x - 0, y - 0) + \\
+ \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f_{(0,0)}\,(x - 0, y - 0) + \frac{1}{24}\mathrm{d}^4 f_{(0,0)}\,(x - 0, y - 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4\,(x, y) = y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}\cdot 4\cdot 1\cdot (x-0)^3(y-0) + \\
+ \frac{1}{24}\cdot 4\cdot(-1)\cdot(x-0)(y-0)^3 = y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{6}x^3 y - \frac{1}{6}xy^3\,.
\end{aligned}$$

Na obr. 5 je žlutou barvou znázorněn graf Taylorova mnohočlenu čtvrtého řádu. Z obrázku je patrné, že nám Taylorův mnohočlen poměrně dobře nahrazuje funkci $f(x, y)$ v okolí středu S a toho jsme přesně chtěli dosáhnout.



Obrázek 5: Taylorův mnohočlen 4. řádu

Podívejme se ještě na tabulku 1, která se nachází níže. Zelenou barvou jsou zde uvedeny funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ ve zvolených bodech $\left(\frac{7}{16}, \frac{7}{16}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ a $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$. Černou barvou jsou uvedeny funkční hodnoty Taylorova mnohočlenu příslušného řádu. Červenou barvou jsou uvedeny absolutní chyby, tzn. $chyba = |f(x, y) - T_i(x, y)|$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Uvedené $chyby$ nám ukazují odlišnost mezi hodnotou aproximovanou a reálnou. Tabulka nám také dokazuje i tvrzení, že čím blíže jsou umístěny body (x, y), ve kterých počítáme funkční hodnoty, středu S, tím bude $chyba$ menší (tzn. čím menší okolí středu S použijeme, tím přesnější bude aproximace).

Pozor. V některých případech můžeme nalézt bod, ve kterém bude hodnota aproximace mnohem přesnější než v okolí zadaného středu S. Tento fakt je to způsoben „rozmanitostí“ průběhu funkce $f(x, y)$ a Taylorova mnohočlenu, tzn. při „divočejším“ průběhu funkce $f(x, y)$ nebo Taylorova mnohočlenu se může stát, že se tyto funkce někde, zdůrazňujeme slovo někde, mohou protínat.

	$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(x, y) = (1, 1)$	$(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
$f(x, y)$	0,7904390834	2,287355287	4,470462379
$T_1(x, y)$	0,5000000000	1,000000000	1,500000000
chyba	0,2904390834	1,287355287	2,970462379
$T_2(x, y)$	,7500000000	2,000000000	3,750000000
chyba	0,0404390834	,287355287	0,720462379
$T_3(x, y)$	0,7916666667	2,333333333	4,875000000
chyba	0,0012275833	0,045978046	0,404537621
$T_4(x, y)$	0,7916666667	2,333333333	4,875000000
chyba	0,0012275833	0,045978046	0,404537621

Tabulka 1: Tabulka funkčních hodnot