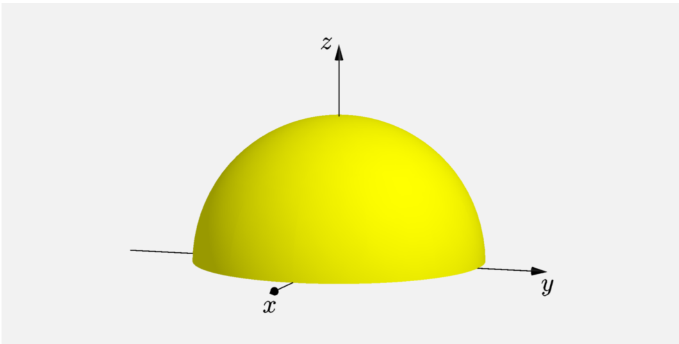
Taylorův mnohočlen

Příklad 2.

Zadání:

Najděte Taylorův mnohočlen prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ (obr. 1) se středem v bodě $S=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y)$

Řešení:

Pro Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu platí

$$T_4(x,y)=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\mathrm{d}f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{d}^2f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{6}\mathrm{d}^3f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24}\mathrm{d}^4f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right).$$

Z výše uvedeného vzorce je patrné, že musíme vypočítat parciální derivace až čtvrtého řádu. Začněme s Taylorovým mnohočlenem prvního řádu.
Parciální derivace prvního řádu jsou rovny

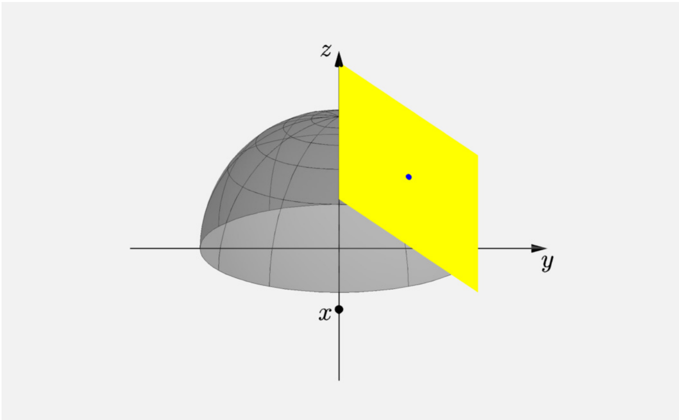
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Taylorův mnohočlen prvního řádu odpovídá výrazu

$$T_1\left(x, y\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathrm{d}f_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right)$$

$$T_1\left(x, y\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)\ .$$

Na obr. 2 je šedou barvou znázorněný graf funkce $f(x, y)$. Modrou barvou je označen střed S. Žlutou barvou je znázorněn graf Taylora mnohočlen prvního řádu tvořící tečnou rovinu, která v okolí středu $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nahrazuje funkci $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.



Obrázek 2: Taylorův mnohočlen 1. řádu

Jak to bude vypadat s Taylorovým mnohočlenem druhého řádu?
Vyjádříme si parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x, y\right) = \frac{-1 + y^2}{\sqrt{\left(1 - x^2 - y^2\right)^3}}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}\left(x, y\right) = -\frac{xy}{\sqrt{\left(1 - x^2 - y^2\right)^3}}\ ,$$

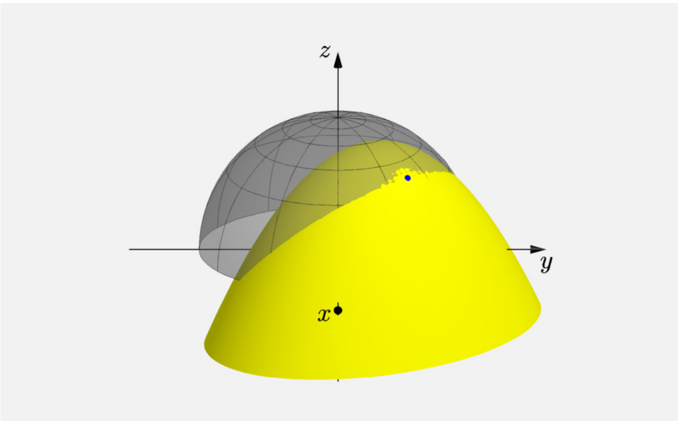
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x, y\right) = \frac{-1 + x^2}{\sqrt{\left(1 - x^2 - y^2\right)^3}}\ .$$

Sestavíme Taylorův mnohočlen druhého řádu

$$T_2(x,y) = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \mathrm{d}f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = {} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 . \end{aligned}$$

Na obr. 3 vidíme, že průběh Taylorova mnohočlenu druhého řádu (žlutá barva) kopíruje tvar funkce $f(x,y)$ (šedá barva) v okolí středu S (modrá barva) s větší přesností než tomu bylo u tečné roviny uvedené výše.



Obrázek 3: Taylorův mnohočlen 2. řádu

Jak to bude s Taylorovým mnohočlenem třetího řádu? Opravdu bude nahrazení funkce $f(x,y)$ v okolí středu S tímto mnohočlenem přesnější než tomu bylo v předchozích případech?
Vypočítáme parciální derivace třetího řádu

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \frac{3x\left(-1+y^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)^5}}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x y^2}(x,y) = \frac{x\left(-1+x^2-2y^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)^5}},$$

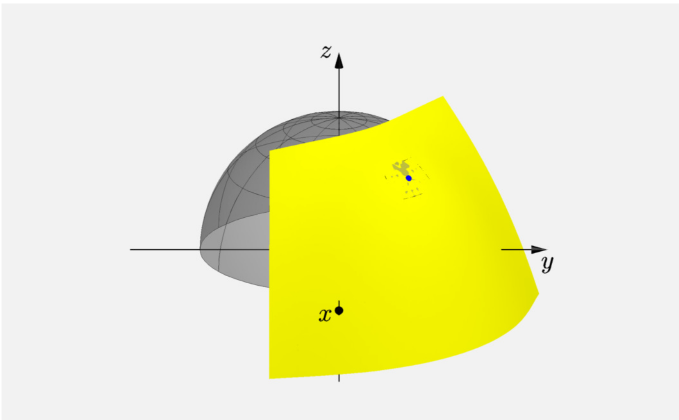
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}(x,y) = -\frac{y\left(1+2x^2-y^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)^5}}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = \frac{3y\left(-1+x^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)^5}}.$$

Taylorův mnohočlen třetího řádu je roven

$$T_3\left(x,y\right)=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\mathrm{d}f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{d}^2f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right)+ \\ +\frac{1}{6}\mathrm{d}^3f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right)$$

$$T_3\left(x,y\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2- \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3- \\ -\frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y-\frac{1}{2}\right)^3.$$

Na obr. 4 máme opět žlutou barvou znázorněný graf Taylorova mnohočlenu (tentokráte třetího řádu). Vidíme, že průběh Taylorova mnohočlenu třetího řádu nahrazuje funkci $f(x,y)$ v okolí středu S mnohem precizněji než tomu bylo v předchozích případech.



Obrázek 4: Taylorův mnohočlen 3. řádu

Nyní zbývá splnit už jen poslední bod zadání, tj. nalézt Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu.

Parciální derivace čtvrtého řádu jsou rovny

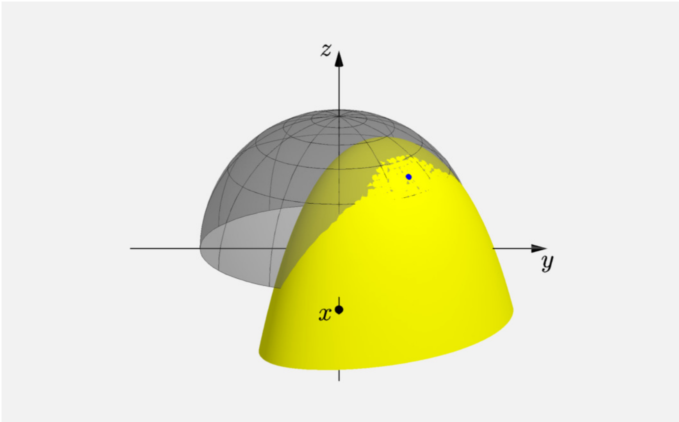
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y) &= \frac{3\left(-4x^2+4x^2y^2-1+2y^2-y^4\right)}{\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)^7}}\,, \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 y}(x,y) &= -\frac{3xy\left(2x^2+3-3y^2\right))}{\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)^7}}\,, \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 y^2}(x,y) &= \frac{-x^2+2x^4-11x^2y^2-1-y^2+2y^4}{\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)^7}}\,, \\
\frac{\partial^4 f}{\partial x y^3}(x,y) &= \frac{3xy\left(-3+3x^2-2y^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)^7}}\,, \\
\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,\ y) &= \frac{3\left(1-2x^2+4y^2+x^4-4x^2y^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)^7}}\,.
\end{aligned}
$$

Vyjádříme si Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu

$$
\begin{aligned}
T_4(x,y) = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &+ \mathrm{d}f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right) + \\
&+ \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24}\mathrm{d}^4 f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_4(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} &- \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \\
&- \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 - \\
&- \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(y-\frac{1}{2}\right) - \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y-\frac{1}{2}\right)^3 - \\
&- \frac{21\sqrt{2}}{16}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{11\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\left(y-\frac{1}{2}\right) - \\
&- \frac{31\sqrt{2}}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{21\sqrt{2}}{16}\left(y-\frac{1}{2}\right)^4\,.
\end{aligned}
$$

Na obr. 5 je graf Taylorova mnohočlenu čtvrtého řádu znázorněn žlutou barvou. Z obrázku je patrné, že nám Taylorův mnohočlen tvoří opět paraboloid stejně, jako tomu bylo u Taylorova mnohočlenu druhého řádu (obr. 3).



Obrázek 5: Taylorův mnohočlen 4. řádu

Podívejme se ještě na tabulku 1, která se nachází níže. Zelenou barvou jsou zde uvedeny funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ ve zvolených bodech $\left(\frac{7}{16}, \frac{7}{16}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ a $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$. Černou barvou jsou uvedeny funkční hodnoty Taylorova mnohočlenu příslušného řádu. Červenou barvou jsou uvedeny absolutní chyby, tzn. $chyba = |f(x, y) - T_i(x, y)|$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Podle $chyby$ víme, jak moc se liší aproximovaná hodnota od hodnoty reálné. Také víme, že čím blíže jsou umístěny body (x, y), ve kterých počítáme funkční hodnoty, středu S a čím vyšší je řád Taylorova mnohočlenu, tím bude $chyba$ menší.

Jak je z tabulky 1 patrné, tak pro bod $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ toto pravidlo zřejmě neplatí. Nejmenší $chyba$ nastala v případě Taylorova mnohočlenu druhého řádu. Je to způsobeno tím, že bod $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ leží relativně daleko od středu $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

	$(x,y)=\left(\frac{7}{16},\frac{7}{16}\right)$	$(x,y)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$	$(x,y)=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$
$f(x,y)$	0,7856128181	0,9354143468	0,9842509842
$T_1(x,y)$	0,7954951286	1,060660172	1,237436867
chyba	0,0098823105	0,1252458252	0,2531858828
$T_2(x,y)$	0,7844465852	0,8838834762	0,8396893024
chyba	0,0011662329	0,0515308706	0,1445616818
$T_3(x,y)$	0,7858276531	0,9722718239	1,137999976
chyba	0,0002148350	0,0368574771	0,1537489918
$T_4(x,y)$	0,7855687028	0,9059805632	0,8024004683
chyba	0,0000441153	0,0294337836	0,1818505159

Tabulka 1: Tabulka funkčních hodnot