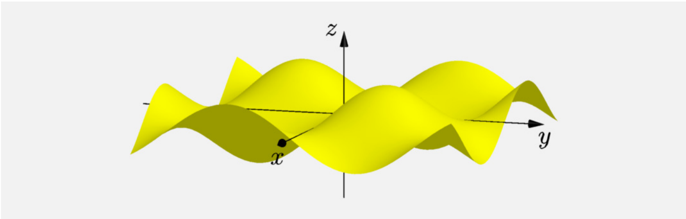
Taylorův mnohočlen

Příklad 1.

Zadání:

Najděte Taylorův mnohočlen prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce $f(x, y) = \sin x \sin y$ (obr. 1) se středem v bodě $S = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Pro Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu platí

$$T_4(x,y) = f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{d}f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\ + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{24}\mathrm{d}^4 f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) .$$

Je vidět, že musíme vypočítat parciální derivace až čtvrtého řádu. Začneme Taylorovým mnohočlenem prvního řádu.
Vypočteme parciální derivace prvního řádu

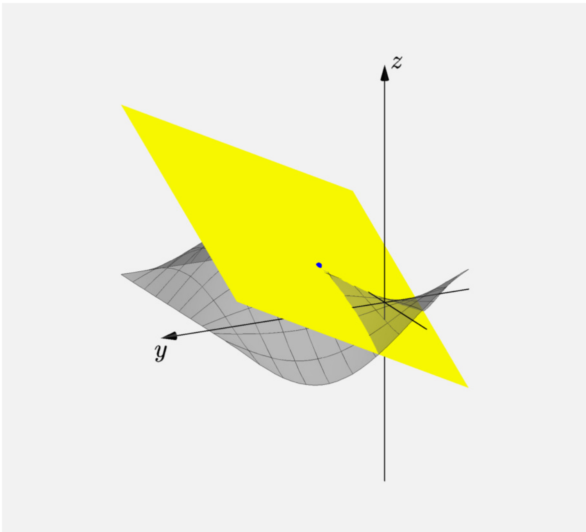
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \sin y ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x \cos y .$$

Sestavíme Taylorův mnohočlen prvního řádu

$$T_1(x,y) = f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{d}f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$T_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y - \frac{\pi}{2} + 1\right) .$$

Na obr. 2 je šedou barvou znázorněný graf funkce $f(x, y)$. Graf funkce $f(x, y)$ je pro lepší přehlednost vykreslen pouze v mezích $\langle -1, \pi\rangle \times \langle -1, \pi\rangle$. Modrou barvou je označen střed S. Žlutou barvou je znázorněn graf Taylorova mnohočlenu prvního řádu. Vidíme, že grafem Taylorova mnohočlenu prvního řádu je tečná rovina. Tzn. že v okolí středu $S = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ jsme nahradili funkci $f(x, y) = \sin x \sin y$ tečnou rovinou.



Obrázek 2: Taylorův mnohočlen 1. řádu

Dále si vyjádříme Taylorův mnohočlen druhého řádu. Pro něj budeme potřebovat parciální derivace druhého řádu

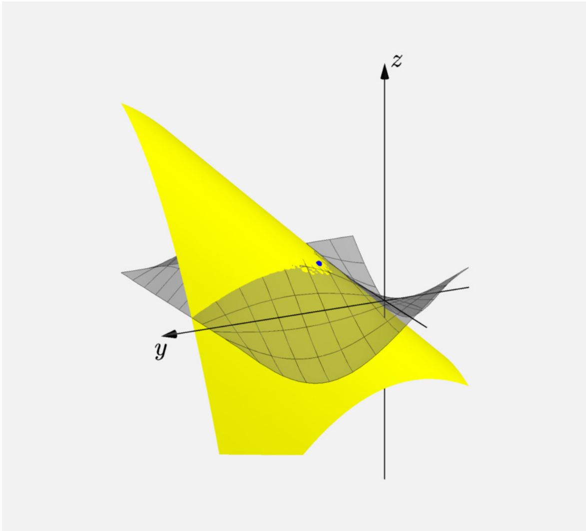
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\sin x \sin y\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) = \cos x \cos y\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\sin x \sin y\,.$$

Taylorův mnohočlen druhého řádu je roven

$$T_2(x, y) = f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{d}f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4},\ y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$T_2(x, y) = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x + y + xy - \frac{\pi}{2} + 1\right)\,.$$

Na obr. 3 je graf Taylorova mnohočlenu druhého řádu znázorněn žlutou barvou. Taylorův mnohočlen druhého řádu nám funkci $f(x, y)$ v okolí středu S nahrazuje s větší přesností, než tomu bylo v případě Taylorova mnohočlenu prvního řádu.



Obrázek 3: Taylorův mnohočlen 2. řádu

Zkusme dosáhnout ještě lepší náhrady funkce $f(x, y)$ v okolí středu S. Té docílíme Taylorovým mnohočlenem třetího řádu.
Vyjádříme si parciální derivace třetího řádu

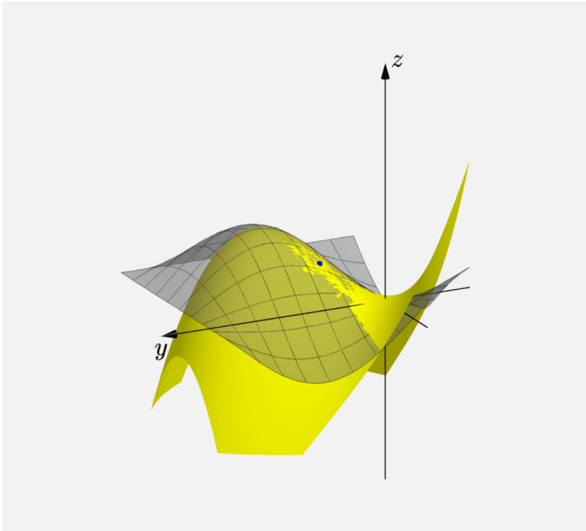
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = -\cos x \sin y\,, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x y^2}(x, y) = -\cos x \sin y\,,$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}(x, y) = -\sin x \cos y\,, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = -\sin x \cos y\,.$$

Taylorův mnohočlen třetího řádu odpovídá výrazu

$$T_3(x, y) = f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{d}f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\ + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$T_3(x, y) = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{8}y^2\pi - \frac{1}{16}y\pi^2 + \frac{1}{8}x^2\pi - \frac{1}{16}x\pi^2 - \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y - \\ - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{96}\pi^3 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xy\pi\,.$$

Na obr. 4 je graf Taylorova mnohočlenu třetího řádu znázorněn žlutou barvou. Je vidět, že Taylorův mnohočlen třetího řádu má už komplikovanější tvar, než tomu bylo v předchozích případech. Taylorův mnohočlen třetího řádu zase o něco více přesněji nahrazuje funkci $f(x, y)$ v okolí středu S.



Obrázek 4: Taylorův mnohočlen 3. řádu

Poslední případ nahrazení funkce $f(x,y)$ v okolí středu S provedeme pomocí Taylorova mnohočlenu čtvrtého řádu. Parciální derivace čtvrtého řádu jsou rovny

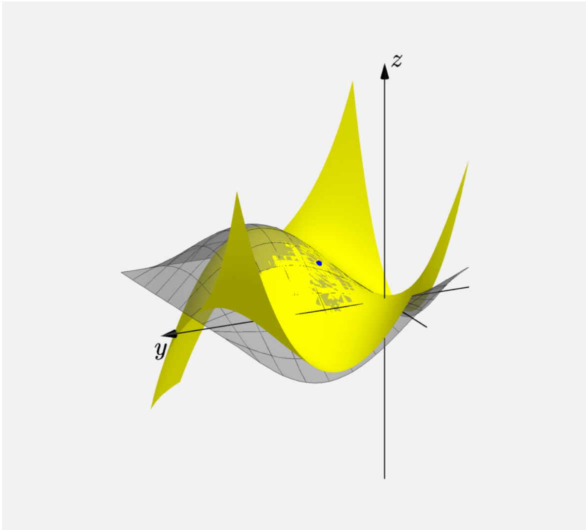
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y) = \sin x \sin y\,, \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x y^3}(x,y) = -\cos x \cos y\,,$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 y}(x,y) = -\cos x \cos y\,, \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,y) = \sin x \sin y\,,$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 y^2}(x,y) = \sin x \sin y\,.$$

Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu

$$T_4(x,y) = f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{d}f_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}\left(x-\frac{\pi}{4},y-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}\left(x-\frac{\pi}{4},y-\frac{\pi}{4}\right) + \\ + \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}\left(x-\frac{\pi}{4},y-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{24}\mathrm{d}^4 f_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}\left(x-\frac{\pi}{4},y-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$T_4(x,y) = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{8}y^2\pi - \frac{1}{16}y\pi^2 + \frac{1}{8}x^2\pi - \frac{1}{16}x\pi^2 - \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y - \\ - \frac{1}{12}xy^3 + \frac{1}{8}x^2y^2 - \frac{1}{12}x^3y + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{96}\pi^3 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2} + \\ + \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{48}y^4 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}xy\pi\,.$$

Na obr. 5 vidíme graf Taylorova mnohočlenu čtvrtého řádu (žlutá barva), který nám nahrazuje průběh funkce $f(x, y)$ (šedá barva) v okolí středu S (červená barva) s ještě větší přesností než Taylorův mnohočlen třetího řádu.



Obrázek 5: Taylorův mnohočlen 4. řádu

Abychom si o Taylorových mnohočlenech udělali ještě lepší obrázek, tak se podívejme na tabulku 1. Zelenou barvou jsou zde uvedeny funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ ve zvolených bodech $\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ a $\left(\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right)$. Černou barvou jsou uvedeny funkční hodnoty Taylorova mnohočlenu příslušného řádu. Červenou barvou jsou uvedeny absolutní chyby, tzn. $chyba = |f(x, y) - T_i(x, y)|$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Podle $chyby$ vidíme, jak moc se liší aproximovaná hodnota od hodnoty reálné.

Z tabulky je patrné, že čím blíže jsou umístěny body (x, y), ve kterých počítáme funkční hodnoty, středu S a čím vyšší je řád Taylorova mnohočlenu, tím bude $chyba$ menší. Všimněme si však toho, že se $chyba$ zmenšuje jenom co druhý krok. Je to způsobeno tím, že funkce $\sin x$ je lichá, takže ke změně bude docházet pouze při každém lichém řádu Taylorova mnohočlenu.

	$(x,y)=\left(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{5}\right)$	$(x,y)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$	$(x,y)=\left(\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{7}\right)$
$f(x,\ y)$	0,3454915029	0,2500000000	0,1882550992
$T_1(x,y)$	0,3429203673	0,2382006122	0,1634007872
chyba	0,0025711356	0,0117993878	0,0248543120
$T_2(x,y)$	0,3429203673	0,2382006122	0,1634007872
chyba	0,0025711356	0,0117993878	0,0248543120
$T_3(x,y)$	0,3455042237	0,2501629103	0,1888250301
chyba	0,000012720791	0,00016291030	0,00056993091
$T_4(x,y)$	0,3455042237	0,2501629103	0,1888250301
chyba	0,000012720791	0,00016291030	0,00056993091

Tabulka 1: Tabulka funkčních hodnot