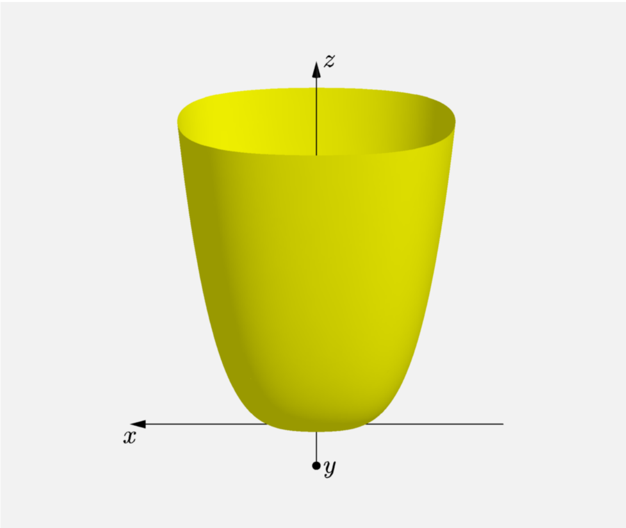
Směrová derivace

Příklad 3.

Zadání:

Je zadaná funkce $f(x,y) = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{5}x^2y^2 + \frac{1}{5}y^4$ (obr. 1). Najděte jednotkový vektor $\mathbf{u}$, pro nějž je směrová derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0) = (1,1)$ maximální a určete její hodnotu.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y)$

Řešení:

Víme, že směrová derivace je největší ve směru vektoru, pro který platí

$$\mathbf{u} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0,y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|},$$

kde $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)$ je označení pro gradient funkce $f(x,y)$ v bodě (x_0,y_0) a platí

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Gradient je tedy vektor, jehož složky jsou rovny příslušným parciálním derivacím. Pro jeho výpočet budeme muset vyjádřit první paricální derivace funkce $f(x,y)$. Jejich obecný tvar je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{2}{5}xy^2 \,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4}{5}y^3 + \frac{2}{5}x^2y \,.$$

Po dosazení bodu $(1,1)$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{6}{5}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{6}{5}\,.$$

Gradient je roven

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \left(\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right)\,.$$

Nyní můžeme vypočítat velikost gradientu

$$\|\operatorname{grad} f(1,1)\| = \frac{6\sqrt{2}}{5}\,.$$

Směrová derivace je největší ve směru vektoru

$$\mathbf{u} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0,y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Nyní zbývá už jen poslední bod zadání a to vypočítat hodnotu směrové směrové derivace.
Pro maximální hodnotu směrové derivace platí

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0,y_0) &= \langle \operatorname{grad} f(x_0,y_0),\, \mathbf{u}\rangle = \langle \operatorname{grad} f(x_0,y_0), \frac{\operatorname{grad} f(x_0,y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|}\rangle = \\
&= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|}\langle \operatorname{grad} f(x_0,y_0),\, \operatorname{grad} f(x_0,y_0)\rangle = \\
&= \frac{\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|^2}{\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|} = \|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|\,,
\end{aligned}$$

kde $\langle\ ,\ \rangle$ je označení pro skalární součin.

Hodnota směrové derivace je tedy

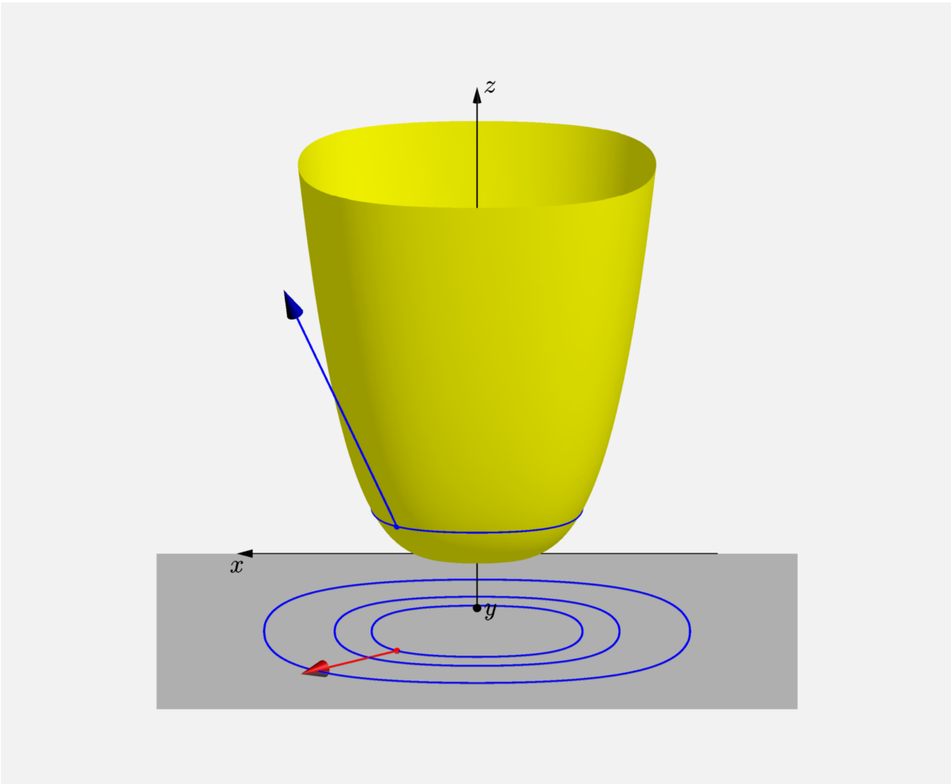
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0,y_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\| = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

Podívejme se detailněji na vztah gradientu k směrové derivaci.

Výsledné číslo $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ má pro nás vzhledem k směrové derivaci význam směrnice tečny ke grafu funkce jedné proměnné $\psi(p)$ (p je parametr) v bodě $p = 0$. Funkce $\psi(p)$ je průnikem funkce $f(x, y)$ a roviny ρ. Rovina ρ je rovnoběžná s osou z a je určena vektorem gradientu $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Označíme-li si průsečnici roviny ρ a roviny xy jako osu p, pak hodnota směrové derivace $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ je tangenta úhlu φ, který svírá tečna ke grafu funkce $\psi(p)$ s kladnou částí osy p.

Všimněme si tedy, že velikost gradientu se rovná tangentě úhlu mezi tečnou a rovinou xy, tj. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \|\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0)\| = \mathrm{tg}\, \varphi$.

Na obr. 2 je žlutou barvou znázorněn graf funkce $f(x, y)$. Červenou barvou je znázorněn bod $(1, 1)$ a gradient. Modrou barvou je znázorněn směr největšího růstu a vrstevnice funkce $f(x, y)$. Vodorovná rovina xy je obarvena šedou barvou.

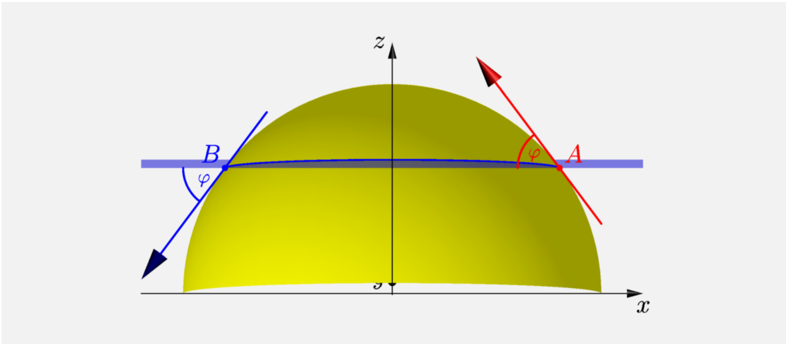


Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ se znázorněným gradientem

Poznámka:
Jak souvisí gradient s průběhem (tvarem) funkce $f(x,y)$?

Gradient nám udává směr, ve kterém funkce $f(x,y)$ nejrychleji roste/klesá. Pro lepší představu si zkusme představit vrstevnice funkce $f(x,y)$ tak, jako by se jednalo o vrstevnice na mapě (Pozn.: Gradient je kolmý na vrstevnice).

Pokud bychom chtěli z bodu A co nejrychleji stoupat (viz červená šipka obr. 3), pak půjdeme ve směru gradientu ($\operatorname{tg}\varphi$ je největší – kladné). V případě, kdybychom chtěli z bodu B co nejrychleji klesat (viz modrá šipka obr. 3), pak zvolíme směr opačný ke gradientu ($\operatorname{tg}\varphi$ je nejmenší – záporné).[1]



Obrázek 3: Geometrický význam gradientu

[1]Logicky by se toto vysvětlení mělo vztahovat pouze k jednomu bodu. Pro lepší přehlednost v obrázku jsou však uvedeny body dva.