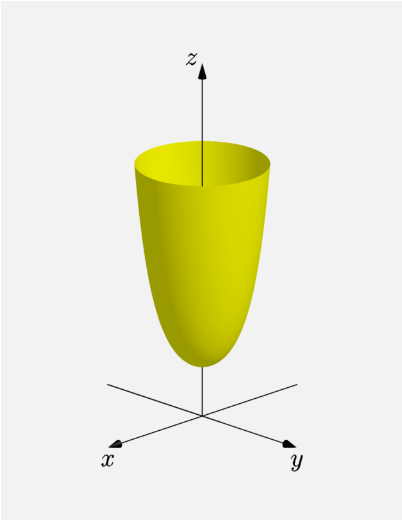
Směrová derivace

Příklad 2.

Zadání:

Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}$ (obr. 1) v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ve směru vektoru $\mathbf{u} = (2, 1)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Ještě dříve než se pustíme do samotného výpočtu směrové derivace, je zapotřebí zadaný vektor normovat

$$\mathbf{u} = \frac{(2,1)}{\|\,(2,1)\,\|} = \frac{(2,1)}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,1)$$

Pro jednoduchost budeme upravený jednotkový vektor značit stejným způsobem jako vektor zadaný. S připraveným jednotkovým vektorem můžeme přejít na výpočet směrové derivace. Nejdříve vypočítáme první parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle proměnných x a y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)} \cdot 2x = 2x\mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)} \cdot 2y = 2y\mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\,.$$

Dosadíme zadaný bod $(1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{\left(1^2+1^2\right)} = 2\mathrm{e}^2\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{\left(1^2+1^2\right)} = 2\mathrm{e}^2\,.$$

Vypočteme derivaci ve směru vektoru $\mathbf{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Pro výpočet derivace ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ využijeme gradient

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0,y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0,y_0),\, \mathbf{u}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot u_2,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je označení pro skalární součin.
Tedy

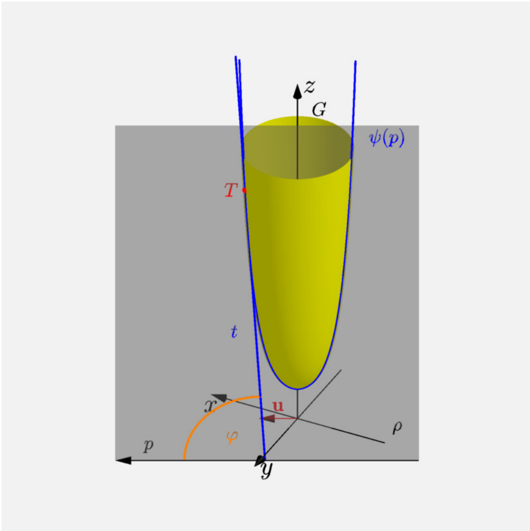
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0,y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0,y_0),\, \mathbf{u}\rangle = 2\mathrm{e}^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\mathrm{e}^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6\mathrm{e}^2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}\mathrm{e}^2}{5}\,.$$

Nyní se zaměříme na geometrický význam směrové derivace.

1. Průnikem grafu G funkce $f(x,y)$ a roviny určené předpisem $\rho\colon\ = 0$ je graf funkce $\psi(p)$ (p je parametr).

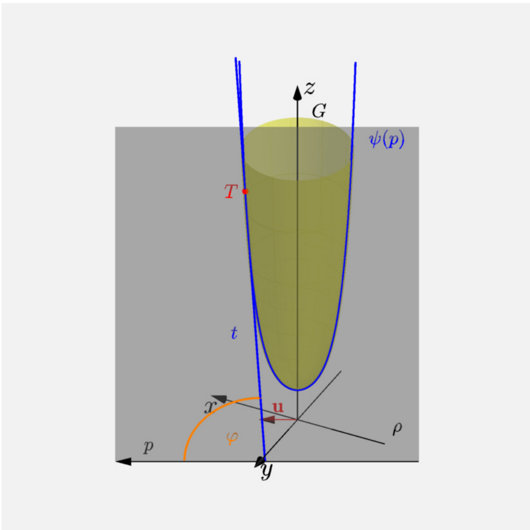
2. V rovině ρ existuje tečna t ke grafu funkce $\psi(p)$ v bodě $p = 0$. Tato tečna t má směrnici určenou námi vypočítanou derivací funkce $f\,(x,y)$ ve směru vektoru $\mathbf{u}$ v zadaném bodě $(1,1)$. Směrnice tečny t má tedy hodnotu $\sqrt{5}\mathrm{e}^2$, tj. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{5}\mathrm{e}^2$, a to je geometrický význam směrové derivace.

Na obr. 2 a obr. 3 je znázorněný graf G funkce $f(x,y)$ žlutou barvou. Bod $T = \big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big) = \left(1, 1, \mathrm{e}^2\right)$ je označen červenou barvou spolu s vektorem $\mathbf{u}$. Rovina ρ je označena šedou barvou. Funkce $\psi(p)$ a tečna t jsou obarveny modrou barvou. Úhel φ je znázorněn oranžovou barvou.



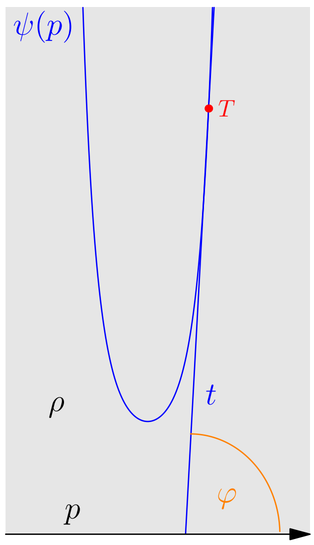
Obrázek 2: Směrová derivace

Pro lepší přehlednost je na obr. 3 zobrazena stejná situace, jako je na obr. 2, avšak s tím rozdílem, že graf funkce $f(x, y)$ je vykreslen průhledně.



Obrázek 3: Směrová derivace – průhledně

Na posledním obrázku obr. 4 je znázorněna situace odehrávající se v rovině ρ. Červenou barvou je označen bod, ve kterém se tečna t dotýká grafu funkce $\psi(p)$.



Obrázek 4: Směrová derivace – rovina ρ