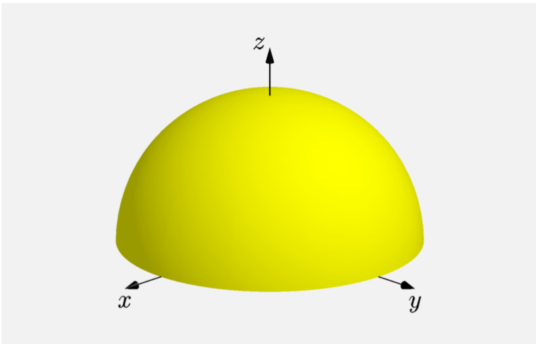
Směrová derivace

Příklad 1.

Zadání:

Nechť je dána funkce $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ (obr. 1). Vypočítejte derivaci funkce $f(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{u} = \frac{(-2,1)}{||(-2,1)||}$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y)$

Řešení:

Vypočítáme první parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnných x a y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\left(9-x^2-y^2\right)^{\frac{-1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(9-x^2-y^2\right)^{\frac{-1}{2}}(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Dosadíme zadaný bod $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right) = \frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{9-\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = -\frac{10}{\sqrt{35}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{9-\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

Vypočteme derivaci ve směru vektoru $\mathbf{u} = \frac{(-2,1)}{||(-2,1)||} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Pro výpočet derivace ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ můžeme využít gradient

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0,y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0,y_0), \mathbf{u}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot u_2,$$

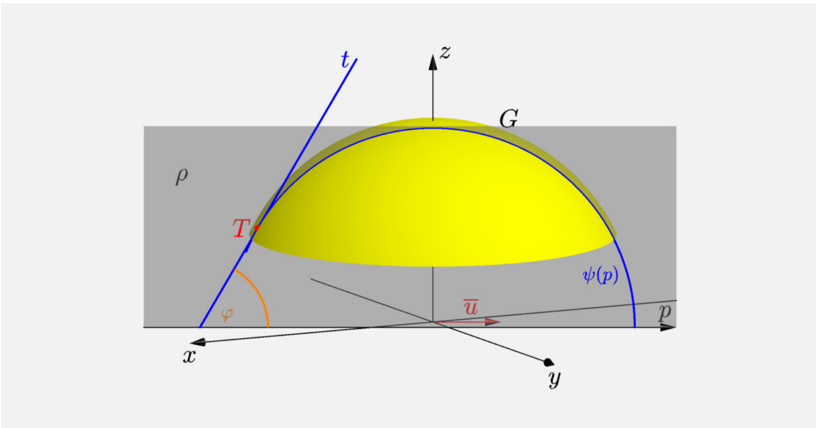
kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je označení pro skalární součin.
Tedy

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0),\, \mathbf{u} \rangle = -\frac{10}{\sqrt{35}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{3}{\sqrt{35}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{23}{5\sqrt{7}}\,.$$

Podívejme se na geometrický význam směrové derivace. Co nám udává číslo $\frac{23}{5\sqrt{7}}$?

1. Průnikem grafu G funkce $f(x, y)$ a roviny určené předpisem[1] $\rho\colon \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$ je graf funkce $\psi(p)$ (p je parametr).
2. V rovině ρ existuje tečna t ke grafu funkce $\psi(p)$ v bodě $p = 0$. Tato tečna t má směrnici určenou námi vypočítanou derivací funkce $f(x, y)$ ve směru vektoru $\mathbf{u}$ v zadaném bodě $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$. Směrnice tečny t má tedy hodnotu $\frac{23}{5\sqrt{7}}$, tj. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{23}{5\sqrt{7}}$, a to je geometrický význam směrové derivace.

Na obr. 2 a obr. 3 je znázorněný graf G funkce $f(x, y)$ žlutou barvou. Bod $T = \left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{35}}{4}\right)$ je označen červenou barvou spolu s vektorem $\mathbf{u}$. Rovina ρ je označena šedou barvou. Funkce $\psi(p)$ a tečna t jsou obarveny modrou barvou. Úhel φ je znázorněn oranžovou barvou.

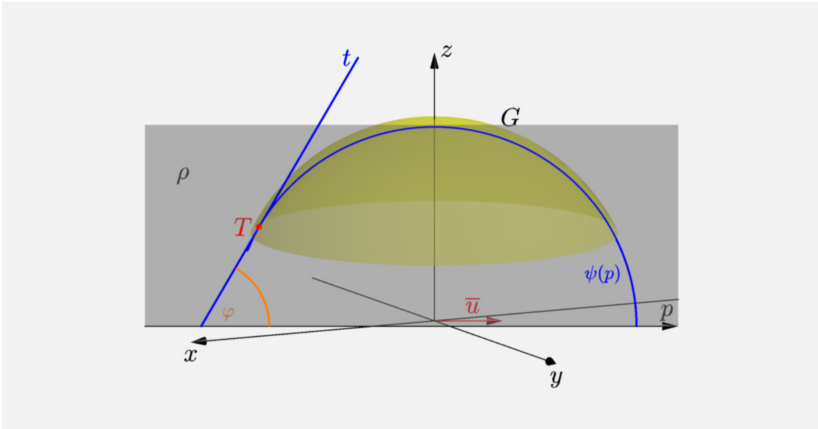


Obrázek 2: Směrová derivace

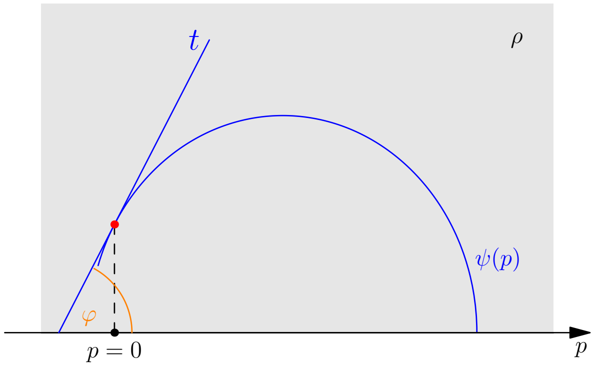
Pro lepší přehlednost je na obr. 3 zobrazena stejná situace, jako je na obr. 2, avšak s tím rozdílem, že graf funkce $f(x, y)$ je vykreslen průhledně.

[1] Rovnici roviny ρ získáme pomocí vektorového součinu vektorů $\mathbf{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ a $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$, kde vektor $\mathbf{z}$ zaručuje rovnoběžnost roviny se z-ovou osou. Vektorovým součinem získáme koeficienty a, b, c rovnice $\rho\colon ax + by + cz + d = 0$.

Na dalším obrázku, tj. obr. 4, je znázorněno pouze to, co se odehrává v rovině ρ. Bod, ve kterém se tečna t dotýká grafu funkce $\psi(p)$, je označen červeně.



Obrázek 3: Směrová derivace – průhledně



Obrázek 4: Směrová derivace – rovina ρ

Závěrem si ukažme výpočet směrové derivace přímo z definice. Položme $\psi(p) = f(A + p\mathbf{u})$, kde $p \in \mathbb{R}$ a $A = (x_0, y_0)$. Víme, že má-li funkce $\psi(p)$ v bodě $p = 0$ derivaci, pak tuto derivaci nazýváme derivací funkce $f(x, y)$ v bodě A ve směru vektoru $\mathbf{u}$. Platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \psi'(0) &= \lim_{p\to 0} \frac{\psi(p) - \psi(0)}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{f(A + p\mathbf{u}) - f(A)}{p} = \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{f(x_0 + pu_1, y_0 + pu_2) - f(x_0, y_0)}{p}\,.\end{aligned}$$

Funkce $\psi(p)$ odpovídá výrazu

$$\begin{aligned}
\psi(p) &= f(A + p(u)) = f\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}p, -\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}}p\right) = \\
&= \sqrt{9 - \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}p\right)^2 - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}}p\right)^2} = \\
&= \sqrt{9 - \left(\frac{25}{4} - \frac{10}{\sqrt{5}}p + \frac{4}{5}p^2\right) - \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{2\sqrt{5}}p + \frac{1}{5}p^2\right)} \\
\psi(p) &= \sqrt{\frac{35}{16} + \frac{23}{2\sqrt{5}}p - p^2}\,.
\end{aligned}$$

Derivace $\psi(p)$ je rovna

$$\psi'(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{35}{16} + \frac{23}{2\sqrt{5}}p - p^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{23}{2\sqrt{5}} - 2p\right)\,.$$

Po dosazení za $p = 0$ dostaneme

$$\psi'(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{35}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{23}{2\sqrt{5}} = \frac{23}{5\sqrt{7}}\,.$$

Číslo $\frac{23}{5\sqrt{7}}$ má pro nás význam směrnice tečny t zobrazené na obrázcích obr. 2, obr. 3 a obr. 4 ($\operatorname{tg}\varphi = \frac{23}{5\sqrt{7}}$).