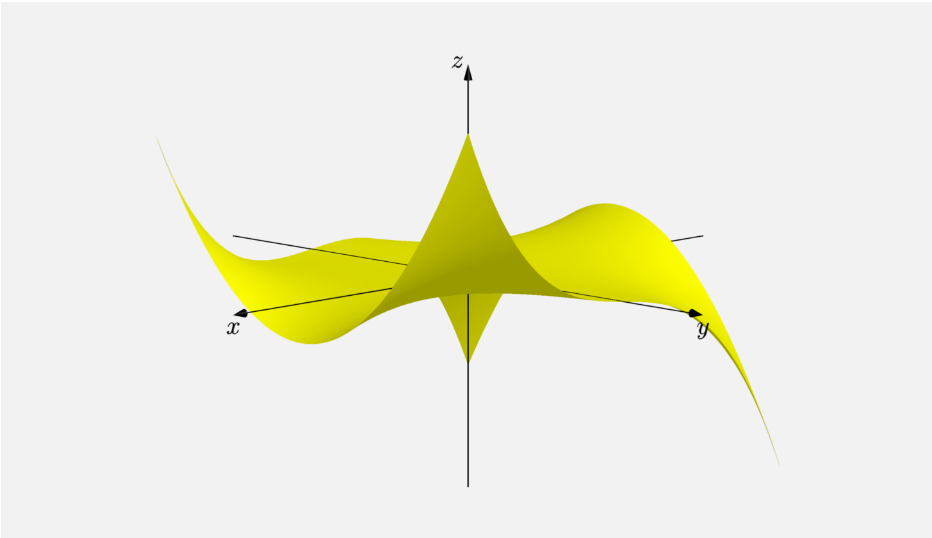
Parciální derivace

Příklad 2.

Zadání:

Nechť je dána funkce $f(x, y) = \frac{1}{4}x^3y^2 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4}xy$ (obr. 1). Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Nejdříve vypočítáme první parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{4}y\,.$$

Dosadíme zadaný bod $(1, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{2}{5}\,.$$

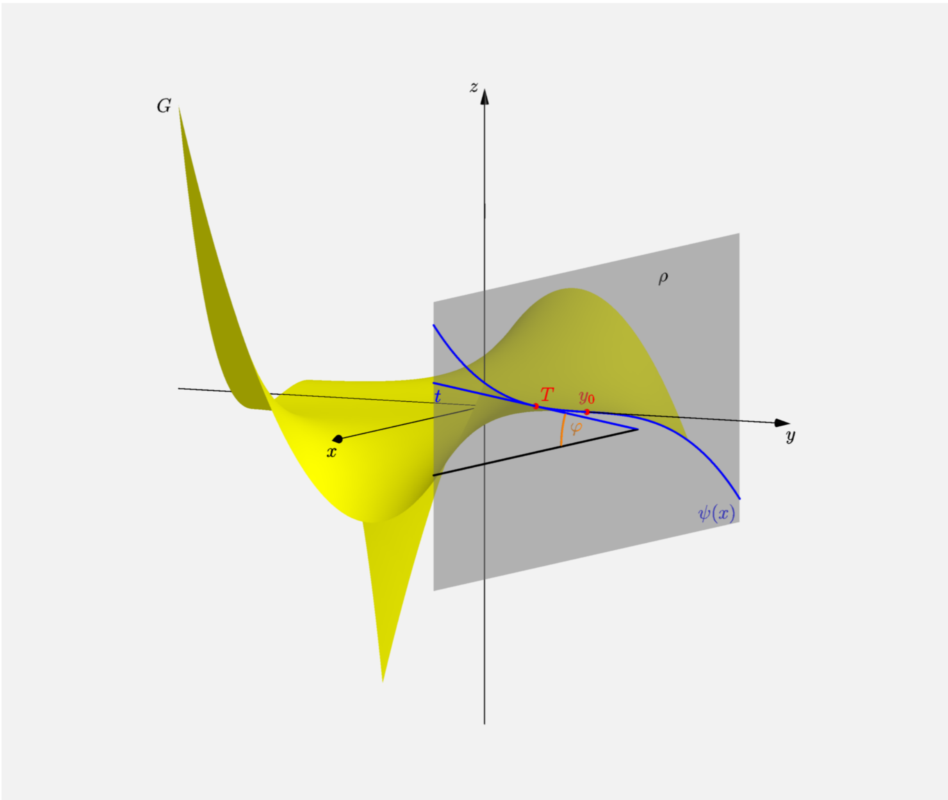
Rozeberme si geometrický význam této parciální derivace.

1. Průnikem grafu G funkce $f(x, y)$ a roviny určené předpisem $\rho\colon y = y_0 = 1$ je graf funkce jedné proměnné $\psi(x) = f(x, y_0) = f(x, 1) = \frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{4}x$.

2. V rovině ρ existuje tečna t ke grafu funkce jedné proměnné $\psi(x) = \frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{4}x$ v bodě $x_0 = 1$. Tato tečna t má směrnici určenou námi vypočítanou první parciální derivací

funkce $f(x,y)$ podle proměnné x v zadaném bodě $(1,1)$. Směrnice tečny t má hodnotu $\frac{2}{5}$, tedy $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{5}$ (tj. úhel $\varphi \doteq \frac{22\pi}{180}\mathrm{rad}$), a to je geometrický význam parciální derivace.

Na obr. 2 je žlutou znázorněný graf G funkce $f(x,y)$. Červenou barvou je označen bod $T = \big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big) = \big(1, 1, \frac{3}{10}\big)$ a souřadnice y_0. Souřadnicí y_0 prochází rovina ρ. Rovina ρ je obarvena šedou barvou. Na obrázku je funkce $\psi(x)$ znázorněná modrou barvou stejně jako tečna t. Úhel φ je obarven oranžovou barvou.



Obrázek 2: Derivace $f(x,y)$ podle x

Dále vypočteme první parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle proměnné y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}x^3 y + \frac{1}{4}x\,.$$

Dosadíme zadaný bod $(1,1)$

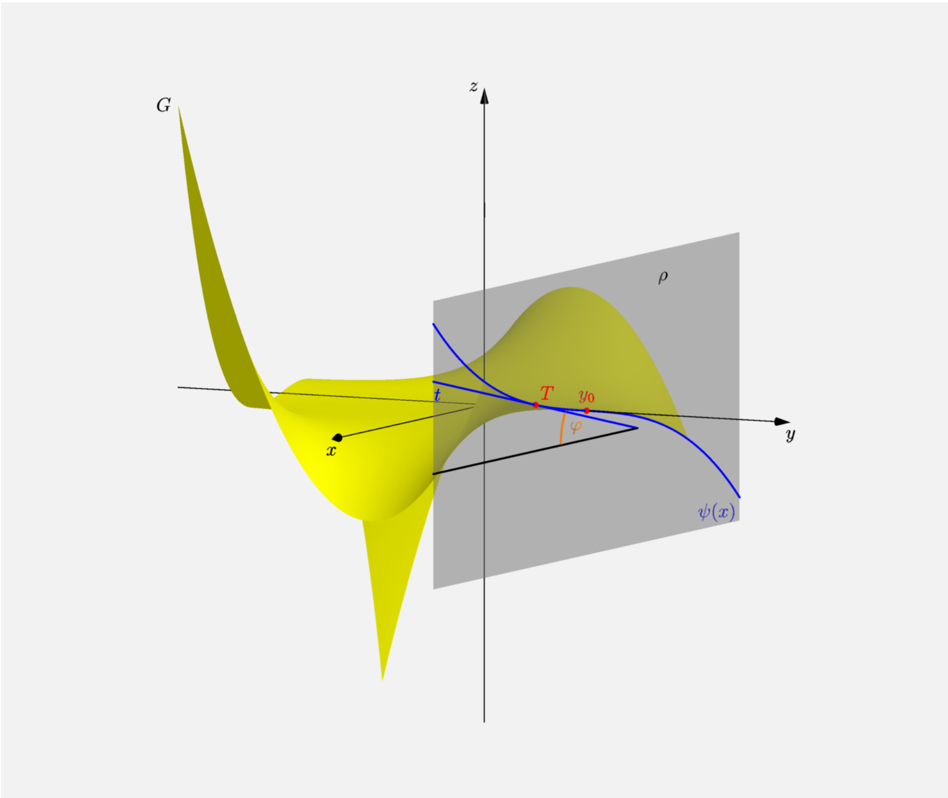
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{4}\,.$$

Znovu si rozebereme geometrický význam parciální derivace.

1. Průnikem grafu G funkce $f(x,y)$ a roviny určené předpisem $\rho'\colon x = x_0 = 1$ je graf funkce jedné proměnné $\psi'(y) = f(x_0,y) = f(1,y) = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{5}$.

2. V rovině ρ' existuje tečna t' ke grafu funkce jedné proměnné $\psi'(y) = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{5}$ v bodě $y_0 = 1$. Tato tečna t' má směrnici určenou námi vypočítanou první parciální derivací $f(x, y)$ podle proměnné y v zadaném bodě $(1, 1)$. Směrnice tečny t' má tedy hodnotu $\frac{3}{4}$, tedy $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{3}{4}$ (tj. úhel $\varphi \doteq \frac{37\pi}{180}\mathrm{rad}$), a to je právě geometrický význam parciální derivace.

Na obr. 3 je znázorněný graf G funkce $f(x, y)$ žlutou barvou. Souřadnice x_0 a bod $T = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) = \big(1, 1, \frac{3}{10}\big)$ jsou označeny červenou barvou. Souřadnicí x_0 prochází rovina ρ'. Rovina ρ' je označena šedou barvou. Funkce $\psi'(y)$ a tečna t' jsou obarveny modrou barvou. Úhel φ' je znázorněn oranžovou barvou.



Obrázek 3: Derivace $f(x, y)$ podle y