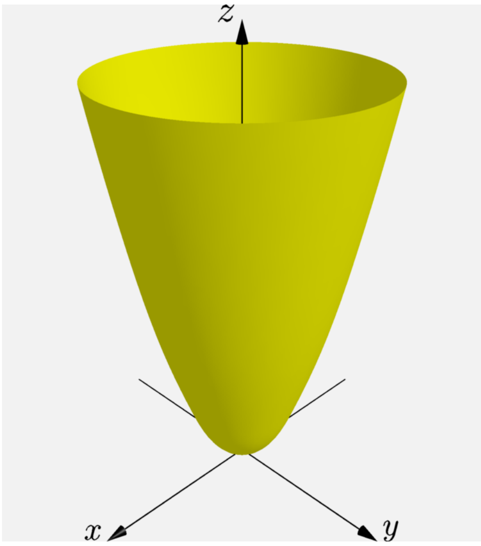
Parciální derivace

Příklad 1.

Zadání:

Uvažujte funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ (obr. 1). Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (2, 1)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Funkce $f(x, y)$ je funkce dvou reálných proměnných, kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vypočteme první parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \, .$$

V dalším kroku dosadíme do vypočtené parciální derivace bod $(2, 1)$

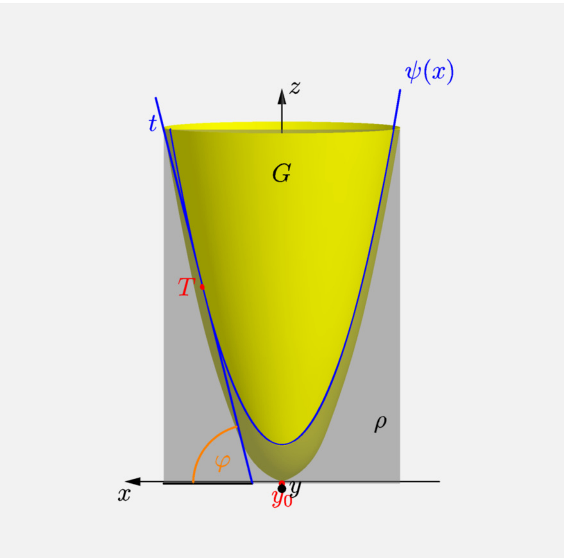
$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 4 \, .$$

Podívejme se na geometrický význam této parciální derivace.

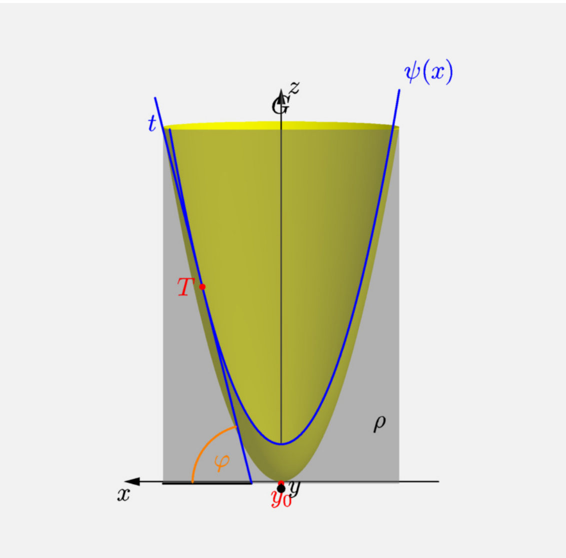
1. Průnikem grafu funkce $f(x, y)$ (označme graf písmenem G) a roviny určené předpisem $\rho\colon\ y = y_0 = 1$ je graf funkce jedné proměnné $\psi(x) = f(x, y_0) = f(x, 1) = x^2 + 1$. Rovina ρ je rovnoběžná s osou z a protíná osu y v $y_0 = 1$.

2. Zaměřme se nyní pouze na rovinu ρ. Existuje tečna t ke grafu funkce jedné proměnné $\psi(x) = x^2 + 1$ v bodě $x_0 = 2$. Tato tečna t má směrnici určenou námi vypočítanou první parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle proměnné x v zadaném bodě $(2, 1)$. Směrnice tečny t má hodnotu 4, tedy $\operatorname{tg} \varphi = 4$, a to je právě geometrický význam parciální derivace.

Na obr. 2 a obr. 3 je žlutou barvou znázorněný graf G funkce $f(x, y)$. Červenou barvou je označen bod $T = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) = (2, 1, 5)$ a souřadnice y_0, kterou prochází rovina ρ. Rovina ρ je označena šedou barvou. Modrou barvou je znázorněná funkce $\psi(x)$ a tečna t. Úhlu φ přísluší oranžová barva.



Obrázek 2: Derivace $f(x, y)$ podle x



Obrázek 3: Derivace $f(x, y)$ podle x

Stejným způsobem budeme postupovat při výpočtu první parciální derivace $f(x, y)$ podle proměnné y.
První parciální derivace $f(x, y)$ podle proměnné y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\ .$$

Dosadíme bod $(2, 1)$

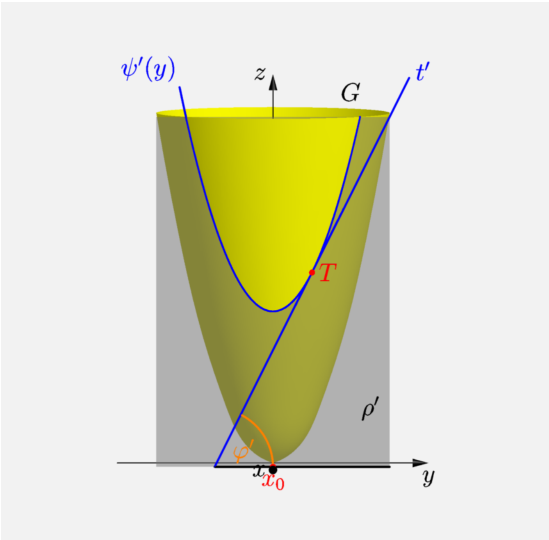
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 2\ .$$

Geometrický význam parciální derivace podle proměnné y.

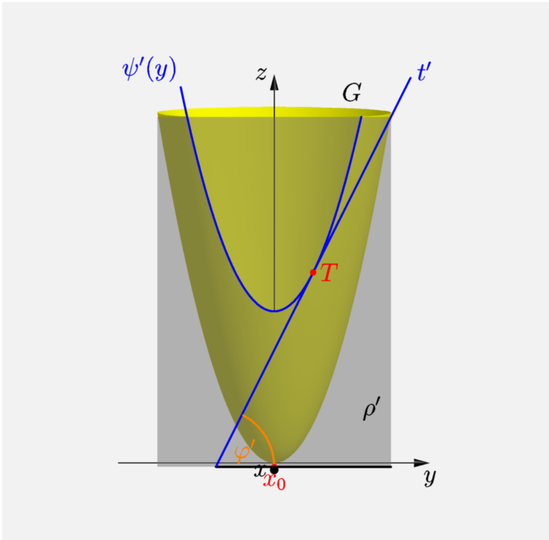
1. Průnikem grafu funkce $f(x,y)$ (označme graf písmenem G) a roviny určené předpisem $\rho'\colon x = x_0 = 2$ je graf funkce jedné proměnné $\psi'(y) = f(x_0, y) = f(2, y) = y^2 + 4$. Rovina ρ' je rovnoběžná s osou z a protíná osu x v $x_0 = 2$.

2. Zaměřme se nyní pouze na rovinu ρ'. Existuje tečna t' ke grafu funkce jedné proměnné $\psi'(y) = y^2+4$ v bodě $y_0 = 1$. Tato tečna t' má směrnici určenou námi vypočítanou první parciální derivací funkce $f(x,y)$ podle proměnné y v zadaném bodě $(2,1)$. Směrnice tečny t' má hodnotu 2, tedy $\operatorname{tg}\varphi = 2$, a to je geometrický význam parciální derivace.

Na obr. 4 a obr. 5 je žlutou barvou znázorněný graf G funkce $f(x,y)$. Červenou barvou je označený bod $T = \big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big) = (2,1,5)$ a souřadnice x_0, kterou prochází rovina ρ'. Rovina ρ' je označena šedou barvou. Modrou barvou je znázorněná funkce $\psi'(y)$ a tečna t'. Úhel φ' je znázorněn oranžovou barvou.



Obrázek 4: Derivace $f(x,y)$ podle y



Obrázek 5: Derivace $f(x,y)$ podle y