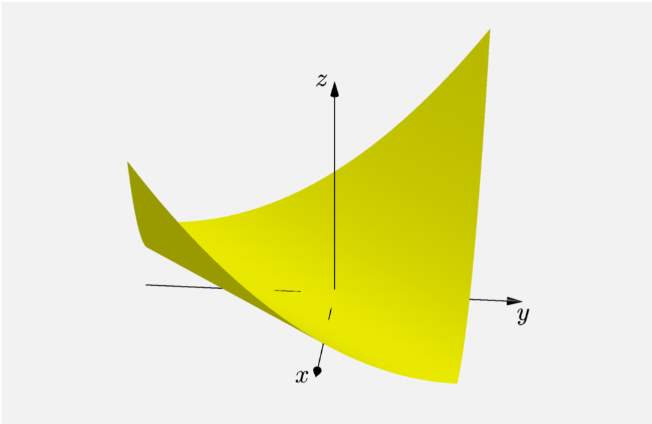
Lokální extrémy

Příklad 3.

Zadání:

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{1}{10}(x-y-1)^2$ (obr. 1).



Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y)$

Řešení:

Funkce $f(x,y)$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a má zde spojité parciální derivace.
Vypočteme první parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x-2y-2}{10},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x+2y+2}{10}.$$

Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých se pokusíme vyjádřit x a y pro nalezení stacionárních bodů

$$\frac{2x-2y-2}{10} = 0$$
$$\frac{2x-2y-2}{10} = 0\,.$$

Jedná se o dvě stejné rovnice, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení.
Vyjádřeme si, čemu se rovná y

$$2x-2y-2=0$$
$$x-y-1=0$$
$$y=x-1\,.$$

Stacionárních bodů je tedy nekonečně mnoho. Každý stacionární bod leží na přímce $y = x - 1$, respektive pro souřadnice stacionárních bodů platí $(x, x - 1)$.

Nyní je třeba zjistit, jestli jsou stacionární body lokálním minimem nebo maximem. Zkusme vypočítat druhé parciální derivace a sestavit determinant $J(x, y)$.
Druhé parciální derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2}{10}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2}{10}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) &= -\frac{2}{10}\,.\end{aligned}$$

Determinant $J(x, y)$ je roven

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{2}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Jak se dalo předpokládat, vyšel determinant $J(x, y)$ nulový. Stále nic nevíme o tom, jestli jsou v bodech přímky $y = x - 1$ lokální minima nebo maxima. Proto opět zvolíme jiný postup výpočtu, který by nás měl dovést k výsledku.

Je-li $y_0 = x_0 - 1$, je $f(x_0, y_0) = \frac{1}{10}\big(x_0 - (x_0 - 1) - 1\big)^2 = 0$, tzn. funkční hodnota je stejná ve všech bodech přímky $y = x - 1$. V libovolném okolí bodu (x_0, y_0) jsou tedy body se stejnou funkční hodnotou. Extrém buď zde není, nebo je neostrý.

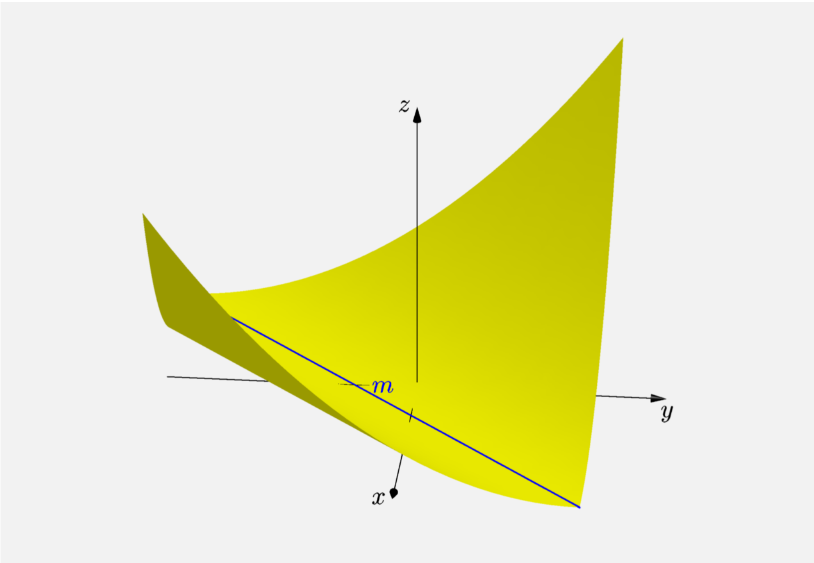
Uvažujme tedy pomocnou funkci jedné proměnné $g(u) = \frac{1}{10}(u - 1)^2$, kde $u \in \mathbb{R}$ představuje substituci $u = x - y$. Funkce $g(u)$ je spojitá, má spojitou derivaci a platí $f(x, y) = g(x - y)$. Pokusme se vyšetřit průběh funkce $g(u)$ a získat tak odpověď.
Zkusíme najít stacionární bod této funkce:

$$\begin{aligned}g'(u) = \frac{1}{10}(2u - 2) &= 0\\ u - 1 &= 0\\ u &= 1\,.\end{aligned}$$

Získali jsme podezřelý bod $u = 1$.

Nyní zjistíme, zda-li je tento bod maximem nebo minimem. Pro $u \in (-\infty, 1)$ platí $g'(u) < 0$, tzn. funkce je zde klesající. Pro $u \in (1, \infty)$ platí $g'(u) > 0$, tzn. funkce je zde rostoucí. Z toho plyne, že pro hodnoty $u \neq 1$ platí $g(u) > g(1)$. Bod $u = 1$ je minimem funkce $g(u)$. Tudíž body nalezené přímky $y = x - 1$ jsou neostrými lokálními minimy funkce $f(x, y)$, protože platí $u = x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$.

Vše je opět znázorněno na obr. 2. Modrá barva označuje lokální minimum. Žlutou barvou je znázorněn graf funkce $f(x, y)$.



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ s extrémem