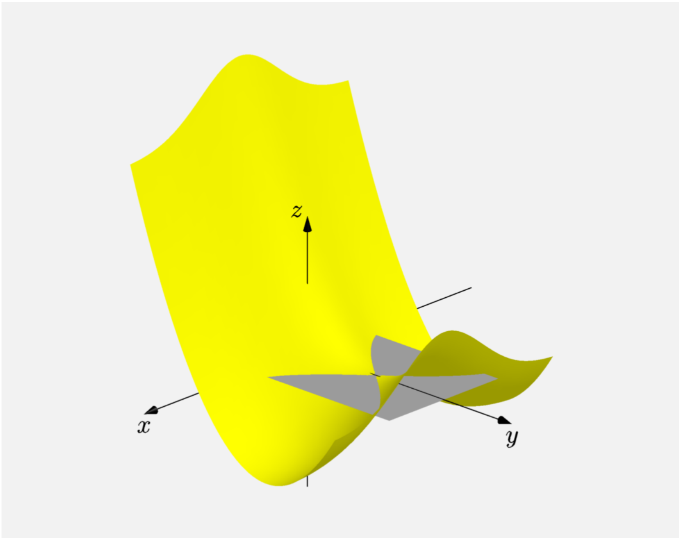
Globální extrémy

Příklad 3.

Zadání:

Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-x^2}$ (žlutá barva v obr. 1) na množině $M = \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$ (šedá barva v obr. 1).



Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y)$

Řešení:

Funkce $f(x,y)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ (definiční obor není ničím omezen). Množina M tvoří uzavřený interval v $\mathbb{R}^2$ (tvoří uzavřený čtverec v rovině xy), a proto víme, že M je uzavřená a ohraničená množina. Jelikož je funkce $f(x,y)$ spojitá na $\mathbb{R}^2$, je $f(x,y)$ spojitá i na M. Jsou tedy splněny všechny předpoklady Weierstrassovy věty, tzn. je zaručena existence globálních extrémů.

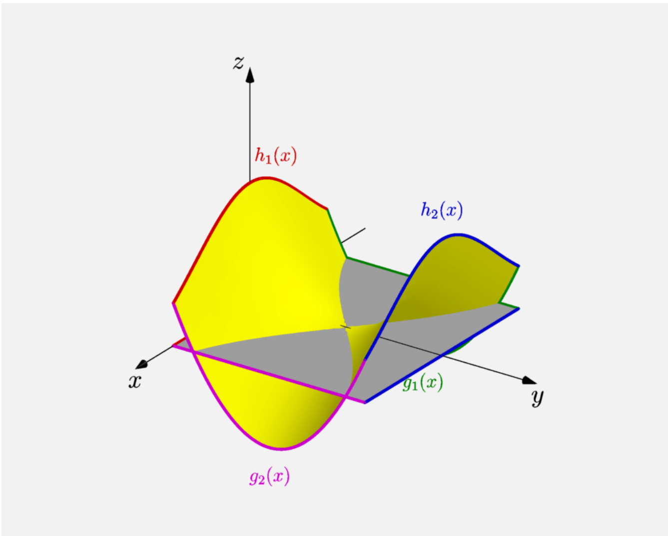
Nejdříve budeme hledat podezřelé body uvnitř zadané množiny M (nebudeme uvažovat její hranici), tzn. budeme hledat všechny podezřelé body, pro které platí $(x,y) \in (-1,1) \times (0,2)$. Pro nalezení těchto bodů použijeme známý postup z lokálních extrémů. Vypočítáme první parciální derivace funkce $f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2$$

a položíme je rovny nule

$$-2xe^{-x^2} = 0\,,$$
$$2y - 2 = 0\,.$$

Z výše uvedených dvou rovnic o dvou neznámých se pokusíme vyjádřit, čemu se rovná proměnná x a čemu proměnná y. Z první rovnice vyplývá, že $x = 0$, protože člen e^{-x^2} nikdy nebude roven nule. Z druhé rovnice vyplývá rovnost $y = 1$. Dostali jsme bod $c_1 = (0, 1)$[1]. Tento bod budeme uvažovat jako stacionární bod, protože bod c_1 opravdu leží uvnitř M. Další podezřelé body budeme hledat na hranici M (viz obr. 2).



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ se zvýrazněnou hranicí

Hranice M je tvořená čtyřmi úsečkami, které jsou rovnoběžné s hlavními osami. V důsledku toho si rozdělíme ∂M podél jednotlivých úseček. Jako první úsek ∂M budeme například uvažovat hranici $\partial M_1 = \langle -1, 1\rangle \times \{0\}$, přičemž nás nebudou zajímat pouze stacionární body uvnitř daného intervalu, ale také jeho krajní body. Na ∂M_1 dostaneme funkci jedné proměnné $f(x, 0)$ (máme totiž pevně dané $y = 0$ viz definice ∂M_1). Označme si $f(x, 0)$ jako $h_1(x)$, resp.

$$h_1(x) = f(x, 0) = e^{-x^2}$$

(červená křivka v obr. 2). Funkce $h_1(x)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body uvnitř ∂M_1, tj. v množině $(-1, 1) \times \{0\}$. Vypočítáme první derivaci $h_1(x)$

$$h_1'(x) = -2xe^{-x^2}$$

[1] Je nutné poznamenat, že správný zápis pro bod c_1 by byl ve třech souřadnicích (graf funkce $f(x, y)$ je záležitosti 3D prostoru), ale v rámci tohoto textu budeme pro přehlednost uvádět pouze první dvě souřadnice (v rovině xy). Třetí souřadnici si čtenář dopočte sám.

a položíme ji rovnou nule

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0\,.$$

Zjistíme, že $x = 0$. Dostaneme bod $c_2 = (0,0)$. Bod c_2 leží uvnitř ∂M_1, tzn. $c_2 \in (-1,1) \times \{0\}$, a je dalším stacionárním bodem. K podezřelým bodům přidáme i krajní body ∂M_1, tzn. body $c_3 = (-1,0)$ a $c_4 = (1,0)$. Stejným způsobem budeme postupovat i na zbylých částech hranice M.

Druhou část hranice M představuje interval $\partial M_2 = \langle -1,1\rangle \times \{2\}$. Na ∂M_2 obdržíme funkci $h_2(x)$

$$h_2(x) = f(x,2) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

(modrá křivka v obr. 2). Funkce $h_2(x)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body uvnitř ∂M_2, tj. v množině $(-1,1) \times \{2\}$. Vypočítáme první derivaci $h_2(x)$

$$h_2'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

a položíme ji rovnou nule

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0\,.$$

Je zřejmé, že $x = 0$. Dostaneme bod $c_5 = (0,2)$, který leží uvnitř ∂M_2, a je dalším stacionárním bodem. K podezřelým bodům přidáme i krajní body ∂M_2, resp. $c_6 = (-1,2)$ a $c_7 = (1,2)$.

Třetí část hranice M je reprezentována intervalem $\partial M_3 = \{-1\} \times \langle 0,2\rangle$. Na ∂M_3 získáme funkci $g_1(y)$

$$g_1(y) = f(-1,y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-1}$$

(zelená křivka v obr. 2). Funkce $g_1(y)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body uvnitř ∂M_3, tj. v množině $\{-1\} \times (-1,1)$. Vypočítáme první derivaci $g_1(y)$

$$g_1'(y) = 2y - 2$$

a položíme ji rovnou nule

$$2y - 2 = 0\,.$$

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že $y = 1$. Dostaneme bod $c_8 = (-1,1)$. Bod c_8 leží uvnitř ∂M_3 a je dalším stacionárním bodem. Krajní body ∂M_3 již nebudeme uvažovat, jelikož jsou už uvažovány v případech ∂M_1 a ∂M_2.

Čtvrtá a poslední část hranice M je tvořena intervalem $\partial M_4 = \{1\} \times \langle 0,2\rangle$. Na ∂M_4 dostaneme funkci $g_2(y)$

$$g_2(y) = f(1,y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-1}$$

(růžová křivka v obr. 2). Funkce $g_2(y)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body uvnitř ∂M_4, tj. v množině $\{1\} \times (-1,1)$. Vypočítáme první derivaci $g_2(y)$

$$g_2'(y) = 2y - 2$$

a položíme ji rovnou nule

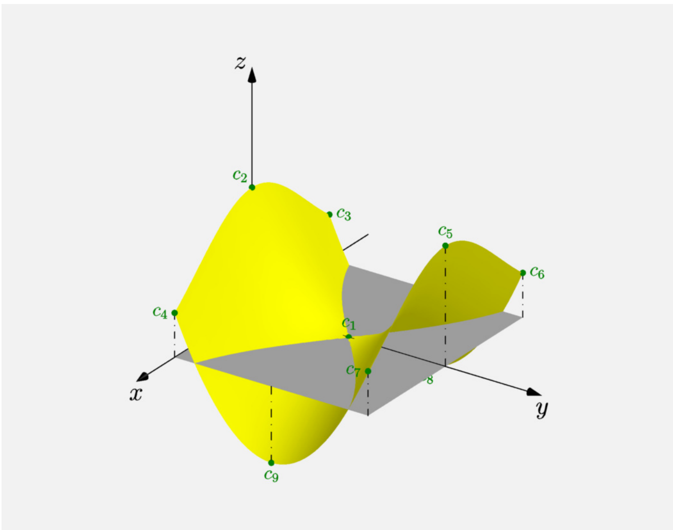
$$2y - 2 = 0\,.$$

Opět pomocí jednoduchého výpočtu zjistíme, že $y = 1$. Dostaneme poslední podezřelý bod $c_9 = (1, 1)$. Bod c_9 leží uvnitř ∂M_4, a proto je dalším stacionárním bodem. Krajní body ∂M_4 také nebudeme uvažovat, jelikož jsou už uvažovány v případech ∂M_1 a ∂M_2.

Nyní, když jsme nalezly všechny potřebné body, nám zbývá vyjádřit si funkční hodnoty v uvažovaných bodech

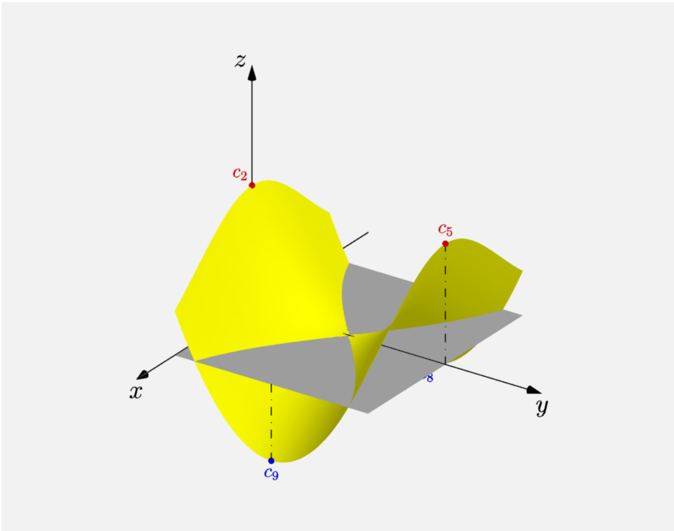
$$\begin{aligned}
f(c_1) &= f(0,1) = 1^2 - 2\cdot 1 + \mathrm{e}^{-0^2} = 0\,,\\
f(c_2) &= f(0,0) = 0^2 - 2\cdot 0 + \mathrm{e}^{-0^2} = 1\,,\\
f(c_3) &= f(-1,0) = 0^2 - 2\cdot 0 + \mathrm{e}^{-(-1)^2} = \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_4) &= f(1,0) = 0^2 - 2\cdot 0 + \mathrm{e}^{-1^2} = \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_5) &= f(0,2) = 2^2 - 2\cdot 2 + \mathrm{e}^{-0^2} = 1\,,\\
f(c_6) &= f(-1,2) = -2^2 - 2\cdot 2 + \mathrm{e}^{-(-1)^2} = \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_7) &= f(1,2) = 2^2 - 2\cdot 2 + \mathrm{e}^{-1^2} = \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_8) &= f(-1,1) = 1^2 - 2\cdot 1 + \mathrm{e}^{-(-1)^2} = -1 + \mathrm{e}^{-1}\,,\\
f(c_9) &= f(1,1) = 1^2 - 2\cdot 1 + \mathrm{e}^{-1^2} = -1 + \mathrm{e}^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Porovnáním získaných funkčních hodnot zjistíme, že v c_2 a c_5 je globální maximum a v c_8 a c_9 je globální minimum. Na následujícím obrázku obr. 3 jsou zelenou barvou zobrazeny všechny podezřelé body, žlutou barvou funkce $f(x, y)$ a šedou barvou množina M.



Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y)$ s podezřelými body

Na posledním obrázku (obr. 4) jsou znázorněny výsledné globální extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M. Minimum je vykresleno modrou barvou a maximum červenou barvou.



Obrázek 4: Graf funkce $f(x, y)$ s maximem a minimem